BHS II K 30

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Grup. II K
3 Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's

Anfangsgründe

der

theoretiſch = praktiſchen

Arithmetik und Geometrie

für diejenigen,

welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen

verbeſſert und vermehrt

von

Friedrich Meinert,

Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,

in der Weidmanniſchen Buchhandlung

1797.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGWERKS-SALINEN
ADMINISTR.

BHS II K 30

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Grupp. II K
Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's

Anfangsgründe

der

theoretiſch-praktiſchen

Arithmetik und Geometrie

für diejenigen,

welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen

verbeſſert und vermehrt

von

Friedrich Meinert,

Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,

in der Weidmanniſchen Buchhandlung

1797.

BIBLIOTHEK DER K.B. GENERAL BERGWESSALINEN ADMINISTR.

BHS II K 30

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek
Gruppe II K
Z Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's

Anfangsgründe

der

theoretiſch-praktiſchen

Arithmetik und Geometrie

für diejenigen,

welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen

verbeſſert und vermehrt

von

Friedrich Meinert,

Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,

in der Weidmanniſchen Buchhandlung

1797.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGWESSALINEN
ADMINISTR.

BHS II K 30 1 fl.

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek
Grup.: II K
3 Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's

Anfangsgründe

der

theoretiſch = praktiſchen

Arithmetik und Geometrie

für diejenigen,

welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen

verbeſſert und vermehrt

von

Friedrich Meinert,

Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,

in der Weidmanniſchen Buchhandlung

1797.

BIBLIOTHEK DER K.B. GENERAL BERGWESSALIEN ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Die 1767 in der Weidmanniſchen Buchhandlung erſchienenen Mathematiſchen Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie ꝛc. Vom Herrn Prediger Johann Ehrenfried Vierenklee, haben ſich nun ſeit 30 Jahren in dem Rufe einer guten und zweckmäßigen Anweiſung für ſolche Forſtbediente erhalten, die ihrer andern Geſchäfte wegen nicht Zeit genug entbehren können, ſich mit der Mathematik ſo zu beſchäftigen, daß ſie ohne weitere Anleitung im Stande ſind, Anwendungen auf alle forſtlichen Gegenſtände zu machen, die eine mathematiſche Behandlung entweder nur zulaſſen, oder nothwendig erfordern. —

Herr Bergrath Gatterer, im Allgemeinen Repertorio der Forſtwiſſenſchaftlichen Litteratur (Band. I. Ulm 1796.) S. 15 nennt die Vierenkleeſchen Anfangsgründe, ein deutliches und ſehr gründliches Werk.

Dieſe allgemein günſtigen Urtheile und das Verlangen des Publikums, nachdem die erſte Auflage ſchon mehrere Jahre vergriffen war, beſtimmten die Verlagshandlung, davon eine neue Auflage zu veranſtalten.

Mir wurde die Durchſicht übertragen und der Antrag gemacht, Veränderungen und Verbeſſerungen da anzubringen, wo Theorie und Ausübung ſie nothwendig machten, doch mit der Bitte, Vierenklee's Unterricht nicht ganz zu vernichten.

Nach einer genauen Prüfung der gegenwärtigen Behandlung der Wälder und Forſten fand ich, daß man unter den Offizianten einen dreifachen Unterſchied machen müſſe; ich fand nämlich Unterbediente, die bloß empiriſch in Form und Materie verfahren, und Oberoffizianten, deren Kenntniſſe weit über dieſe Anfangsgründe reichen; eine gewiſſe Mittelklaſſe von Offiziatten aber ſucht ſich vom empiriſchen Verfahren immer mehr zu entfernen, und doch mangelt es dieſen an gehörigen Vorkenntniſſen, ſich deutliche Einſichten in die Mathematik zu verſchaffen, um das gehörig benutzen zu können, was das forſtliche Rechnungsweſen der Allgemeinen Arithmetik und einer gründlichen Anwendung der gemeinen und zum Theil höhern Geometrie verdankt; dieſe Klaſſe ſchien mir das Publikum zu ſeyn, für welches ſich der Vierenkleeſche Unterricht, auch in etwas geänderter Geſtalt immer

mer noch paſſen würde. Nach dieſem Zwecke unternahm ich die gegenwärtige Bearbeitung.

Die größte Erweiterung hat die Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen, die, wenn ſie auch nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung in dem gegenwärtigen Unterrichte angewandt worden iſt, dennoch dazu dienen kann, nach vorkommenden Fällen Erweiterungen zu veranlaſſen, und eine gründlichere Einſicht ins Rechnungsweſen ſo wohl, als in die Geometrie zu befördern. So können z. B. die quadratiſchen und kubiſchen oder überhaupt die zuſammengeſetzten Verhältniſſe und Proportionen unter andern auch auf die Vergleichung der verſchiedenen Flächen und Körper führen, die, wie bekannt, vorzügliche Gegenſtände der Forſtwirthſchaft ſind, und wodurch die Geometrie auch für dieſen Zweck eine wiſſenſchaftlichere Geſtalt erhält.

In der Geometrie iſt die Lehre von Vermeſſung der Gränzen und Aufnahme der Wälder theils erweitert, theils dadurch anwendbarer geworden, daß das Verfahren mehr anſchaulich durch die Beſchreibung derjenigen Inſtrumente geworden iſt, die man als die zweckmäßigſten und bequemſten zu dergleichen Vermeſſung anerkennt. Zu dieſem Zwecke wurde die neue Kupfertafel mit Tab. II.* bezeichnet nöthig, wofür ich die bei der erſten Auflage befindliche und mit Tab. VI. bezeichnete, weggelaſſen habe,

)(3 weil

Dieſe allgemein günſtigen Urtheile und das Verlangen des Publikums, nachdem die erſte Auflage ſchon mehrere Jahre vergriffen war, beſtimmten die Verlagshandlung, davon eine neue Auflage zu veranſtalten.

Mir wurde die Durchſicht übertragen und der Antrag gemacht, Veränderungen und Verbeſſerungen da anzubringen, wo Theorie und Ausübung ſie nothwendig machten, doch mit der Bitte, Vierenklee's Unterricht nicht ganz zu vernichten.

Nach einer genauen Prüfung der gegenwärtigen Behandlung der Wälder und Forſten fand ich, daß man unter den Offizianten einen dreifachen Unterſchied machen müſſe; ich fand nämlich Unterbediente, die bloß empiriſch in Form und Materie verfahren, und Oberoffizianten, deren Kenntniſſe weit über dieſe Anfangsgründe reichen; eine gewiſſe Mittelklaſſe von Offiziatten aber ſucht ſich vom empiriſchen Verfahren immer mehr zu entfernen, und doch mangelt es dieſen an gehörigen Vorkenntniſſen, ſich deutliche Einſichten in die Mathematik zu verſchaffen, um das gehörig benutzen zu können, was das forſtliche Rechnungsweſen der Allgemeinen Arithmetik und einer gründlichen Anwendung der gemeinen und zum Theil höhern Geometrie verdankt; dieſe Klaſſe ſchien mir das Publikum zu ſeyn, für welches ſich der Vierenkleeſche Unterricht, auch in etwas geänderter Geſtalt immer

mer noch paſſen würde. Nach dieſem Zwecke unternahm ich die gegenwärtige Bearbeitung.

Die größte Erweiterung hat die Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen, die, wenn ſie auch nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung in dem gegenwärtigen Unterrichte angewandt worden iſt, dennoch dazu dienen kann, nach vorkommenden Fällen Erweiterungen zu veranlaſſen, und eine gründlichere Einſicht ins Rechnungsweſen ſo wohl, als in die Geometrie zu befördern. So können z. B. die quadratiſchen und kubiſchen oder überhaupt die zuſammengeſetzten Verhältniſſe und Proportionen unter andern auch auf die Vergleichung der verſchiedenen Flächen und Körper führen, die, wie bekannt, vorzügliche Gegenſtände der Forſtwirthſchaft ſind, und wodurch die Geometrie auch für dieſen Zweck eine wiſſenſchaftlichere Geſtalt erhält.

In der Geometrie iſt die Lehre von Vermeſſung der Gränzen und Aufnahme der Wälder theils erweitert, theils dadurch anwendbarer geworden, daß das Verfahren mehr anſchaulich durch die Beſchreibung derjenigen Inſtrumente geworden iſt, die man als die zweckmäßigſten und bequemſten zu dergleichen Vermeſſung anerkennt. Zu dieſem Zwecke wurde die neue Kupfertafel mit Tab. II.* bezeichnet nöthig, wofür ich die bei der erſten Auflage befindliche und mit Tab. VI. bezeichnete, weggelaſſen habe,

weil ſie Chartencharaktere enthielt, die theils nicht mehr gebräuchlich, theils aber auch auf dem neu hinzugekommenen illuminirten Plane ergänzt worden ſind. Dieſer Plan, welcher größtentheils nach den Vorſchriften des Preußiſchen Forſtvermeſſungsweſens eingerichtet iſt, ſoll denjenigen ForſtoffiziANTEN nützen, die in der Jugend weder Zeit noch Gelegenheit gehabt haben, ſich mit der geometriſchen Zeichenkunſt zu beſchäftigen. Durch eigene Uebung, wenn nur eine mäßig gute Anweiſung vorgelegt wird, iſt man alles zu erlernen im Stande.

Theorien, die in neuern Zeiten erſt ausgemittelt worden ſind, und welche höhere forſtwiſſenſchaftliche Kenntniſſe betreffen, habe ich ſo weit in den gegenwärtigen Unterricht aufgenommen, als es die Vorbereitungskenntniſſe verſtatteten, und da, wo ich nicht ausführlich ſeyn konnte, wenn ich auch wünſchte, es ſeyn zu können, iſt die Litteratur beigefügt worden, um jeden wißbegierigen Anfänger zu veranlaſſen, in Kenntniſſen fortzurücken.

Wer ohne zweckmäßige Bildung in forſtwiſſenſchaftlichen Inſtituten, oder ohne höhern Unterricht auf Schulen und Univerſitäten, ſich durch eignen Fleiß zu irgend einer Forſtbedienung herauf gearbeitet hat, und gegenwärtigen Unterricht verſteht, kann es alsdann wagen, in eigentlich mathematiſchen Lehrbüchern, ſichere und gründlichere Kenntniſſe der Arithmetik und Geometrie zu erler-

erlernen; und wer mit den Elementen der Mathematik einmal vertraut geworden iſt, wird es nicht dabei bewenden laſſen, ſondern auch Unterricht in der allgemeinen Arithmetik ſuchen, um dadurch eine vollſtändige Einſicht in diejenigen mathematiſchen Kenntniſſe zu erhalten, welche für die zweckmäßig zu treibende Forſtwirthſchaft unentbehrlich ſind.

Die allgemeine Arithmetik und Algebra, wenigſtens bis zu den Gleichungen vom 4ten Grade hätte ich noch gern dieſen Anfangsgründen beigefügt, wenn ich nicht beſorgt hätte, dieſe Schrift zu ſehr zu erweitern.

Vielleicht erlauben es meine anderweitigen Geſchäfte, in der Zukunft für diejenigen eine *Anleitung* zur allgemeinen Arithmetik auszuarbeiten, die keinen Unterricht in dieſer beinah unentbehrlichen Kenntniß erhalten haben, und doch gern Anwendung davon im Forſtweſen machen möchten.

Daß ich keine Mühe geſpart habe, den Vortrag der Vierenkleeſchen Anfangsgründe ganz ſo umzuarbeiten, daß das Buch wieder ein gleichförmiges Ganzes geworden iſt, wird man finden, wenn man die gegenwärtige Auflage mit der erſten vergleicht.

Hat dies nützliche Buch unter meiner Feder auch nur etwas gewonnen, und findet es in dieſer

Geſtalt den vorigen Beifall, ſo wird dies ein Theil der Belohnung für meine Sorgfalt ſeyn, die ich auf die Bearbeitung verwandte.

Kenntniſſe des Forſtweſens verbreiten; und noch mehr, Kenntniſſe dieſes Fachs ausüben, heißt, dem Menſchengeſchlechte auf Jahrhunderte zum voraus ein Mittel zur Befriedigung eines Bedürfniſſes ſchaffen, welches kein kultivirtes Volk mehr entbehren kann.

Halle, den 14ten Sept. 1797.

Friedrich Meinert.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik. §. 1 — 28.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen, dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I. Erklärung und Bezeichnung der Zahlen. §. 1 — 8.

II. Vom Zahlenſyſteme. §. 9 — 14.

III. Allgemeine Begriffe vom Rechnen. §. 15 — 22.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Rechenkunſt. §. 23 — 29.

Drittes Kapitel.

Die vier Rechnungsarten in ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Die Addition. §. 30 — 36.

Zweiter Abſchnitt.

Die Multiplikation. §. 37 — 43.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion. §. 44 — 48.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion. §. 49. — 59.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit denſelben.

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Lehren von den Brüchen. §. 60 — 80.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition der Brüche. §. 81 — 82.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche. §. 83 — 84.

Vierter Abſchnitt.

Die Subtraktion der Brüche. §. 85 — 86.

Fünfter Abſchnitt.

Die Diviſion der Brüche. §. 87 — 88.
Von den gebrochenen Brüchen. §. 89 — 91.

Fünftes Kapitel.

Von den Decimaleintheilungen überhaupt und den Decimalbrüchen insbeſondre.

Erſter Abſchnitt.

Die Decimaleintheilungen. §. 92 — 97.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche. §. 98 — 102.
I. Die Addition. §. 103.
II. Die Multiplikation. §. 104.

III.

III. Die Subtraktion. §. 105.

IV. Die Diviſion. §. 106 — 109.

V. Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. §. 110 — 111.

Sechstes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt. §. 112 — 118.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I. Die Ausziehung der Quadratwurzeln. §. 119 — 134.

II. Die Ausziehung der Kubikwurzeln. §. 135 — 150.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen. §. 151 — 152.

I. Arithmetiſche Verhältniſſe. §. 153 — 155.

II. Geometriſche Verhältniſſe. §. 156 — 161.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen. §. 162 — 164.

I. Arithmetiſche Proportionen. §. 165 — 169.

II. Geometriſche Proportionen. §. 170 — 179.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen und Proportionen. §. 180 — 189.

Achtes Kapitel.

Anwendung der theoretiſchen Arithmetik, beſonders aber der Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen auf die im Forſtweſen und im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle.

Erſter Abſchnitt.

Anwendung der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 190 — 192.

Zweiter Abſchnitt.

Anwendung der geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 193.

I. Die einfache Regel Detri.

A. Die gerade oder gemeine einfache Regel Detri. §. 194 — 207.

B. Die umgekehrte einfache Regel Detri. §. 208 — 209.

II. Die zuſammengeſetzte Regel Detri. §. 210 — 211.

A. Die zuſammengeſetzte gerade Regel Detri. §. 212.

B. Die zuſammengeſetzte umgekehrte Regel Detri. §. 213 — 215.

Anwendungen der Regel Detri auf Decimalzahlen. §. 216.

III. Die Regel Multiplex oder die Kettenregel. §. 217.

IV. Die Reeſiſche Regel. §. 218.

V. Die Verbindung der Kettenregel mit der Reeſiſchen. §. 219.

VI. Die Geſellſchafts- und Vermiſchungsregel. §. 220 — 221.

Schlußanmerkung zur Arithmetik. §. 222.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Erſter Theil.

Die theoretiſche Geometrie.

Einleitung,
welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 40.

Erſte Abtheilung.
Die Längenmeſſung oder die Euthymetrie. §. 41 — 69.

Zweite Abtheilung.
Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie. §. 70.

I. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Dreiecke. §. 71 — 95.

II. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vierecke. §. 96 — 114.

III. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vielecke. §. 115 — 128.

IV. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Kreiſe und anderer krummliniger Figuren. §. 129 — 145.

V. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der gemiſchtlinigten Figuren. §. 146 — 148.

Dritte Abtheilung.
Die Körpermeſſung oder die Stereometrie. §. 149 — 168.

Zweiter Theil.
Die praktiſche Geometrie.

Einleitung,
welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 5.

Erſte Abtheilung.
Angewandte Längenmeſſung oder Euthymetrie im Forſtweſen.

I. Von der Meſſung der Weiten oder Entfernungen. §. 6 — 11.

II. Vom Höhenmeſſen. §. 12 — 17.

III. Von Durchſchlägen durch Gehölze. §. 18 — 19.

IV. Von Vermeſſung der Gränzen eines Reviers. §. 20 — 26.

V. Von den Blößen, Wieſen rc. eines Reviers. §. 27 — 28.

VI. Prüfung, ob eine Figur, oder ein Revier richtig aufgenommen worden. §. 29 — 30.

VII. Von der Beſtimmung der Lage eines Reviers nach den Himmelsgegenden und von der Mittagslinie. §. 31 — 32.

VIII. Vom Umfange und dem Durchmeſſer eines Baums. §. 33 — 38.

Allgemeine Anmerkung über Waldvermeſſungen überhaupt.

Zweite Abtheilung.
Die angewandte Flächenmeſſung oder die Epipedometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe rc. §. 39.

I. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſenkrecht aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 40 — 42.

II.

II. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſchief aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 43 — 44.

III. Von den Grundflächen der Bäume. §. 45 — 46.

IV. Von der Berechnung des Inhalts eines ganzen Reviers. §. 47 — 48.

V. Von der Eintheilung eines Reviers in Gehaue oder Schläge nach dem Flächeninhalte. §. 49 — 54.

Allgemeine Anmerkung über Schläge und Gehaue.

Dritte Abtheilung.

Die angewandte Körpermeſſung oder die Stereometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe. §. 55.

I. Vom körperlichen Inhalte einer Holzklafter, eines Malters und Sechszigers. §. 56 — 59.

II. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Bäume. §. 60 — 61.

III. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc. §. 62 — 63.

IV. Von dem Werthe eines jeden Holzſtückes. §. 64 — 65.

V. Von der Taxirung eines jeden Baumes nach dem Holzpreiſe. §. 66 — 67.

VI. Von der Berechnung eines Baumſtammes nach Klafterholz. §. 68 — 69.

VII. Von der Berechnung einzelner Holzſtücke, deren Inhalt einer Klafter gleich iſt. §. 70.

VIII. Von der Berechnung der Säulen und Schwellen. §. 71 — 74.

IX. Von der Berechnung der Breter und Latten aus einem Klotze. §. 75 — 77.

X. Von der Zählung der Bäume eines ganzen Reviers nach ihrer verſchiedenen Größe. §. 78 — 79.

XI. Von der Berechnung des Holzbeſtandes auf einem Reviere, deſſen Bäume gezählt worden ſind. §. 80 — 81.

XII. Von dem jährlichen Zuwachſe des Holzes. §. 82 — 85.

XIII. Von den Gehauen, nach welchen man jährlich eine gewiſſe Anzahl Klaftern und Malter, ohne Rückſicht auf den Flächeninhalt ſchlagen kann. §. 86.

Erſter Anhang.

Tafeln und Gebrauchsanweiſung.

Zweiter Anhang.

Beſchreibung der illuminirten Forſt-Charte.

Allge-

Allgemeine Einleitung

in die

Forſt = Mathematik.

Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik.

§. 1.

Jedem Gegenſtande, der einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt, legt man eine Größe bei, und verſteht daher unter Größe die Eigenſchaft eines Dinges oder Gegenſtandes, nach welcher es einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. So kann z. B. eine Linie vermehrt und vermindert werden, desgleichen eine Zahl: daher *haben* Linien und Zahlen, Größe, und werden alſo als Größen betrachtet und behandelt. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit andern Gegenſtänden. Demnach nennt man überhaupt dasjenige, was ſich vermehren oder vermindern läßt, und an welchem außer der erwähnten, keine andere Eigenſchaft in Betrachtung kommt, ſelbſt eine Größe.

§. 2.

Man erhält Begriffe von einer Größe entweder durch unmittelbare Betrachtung und Vorſtellung, oder durch Vergleichung mit einer andern bekannten Größe, welches letztere wiederum entweder durch unmittelbare Vergleichung oder durch das unſerer Vernunft eigene Geſchäft, durch Schlüſſe geſchehen kann. So erhält man z. B. die Größe irgend eines Fußes oder ſeine Länge durch unmittelbare Betrachtung; die Größe oder

Länge aber der Entfernung irgend eines Gegenſtandes von einem andern, durch unmittelbare Vergleichung mit der nun ſchon bekannten Länge eines Fußes, das heißt, durch unmittelbare Meſſung; oder man erhält den Begriff von der Länge oder Größe einer Entfernung durch Schlüſſe, die aber eine künſtlichere Operation veranlaſſen.

§. 3.

Durch dieſe Betrachtungen wird man auf den Begriff der **Mathematik** oder **Größenlehre** geleitet, welche die Wiſſenſchaft Größen durch Schlüſſe zu finden ausmacht.

§. 4.

Der geſammte Anfang aller Lehren von den Größen, die man ganz allein als Größen, abgeſondert von allen übrigen Eigenſchaften, betrachtet, macht die **reine Mathematik** aus. So iſt z. B. die Ausmittelung der Größe einer Kugel, deren Durchmeſſer 2 Fuß beträgt, eben ſo ein Gegenſtand der reinen Mathematik, ſo wie die Summirung der Zahlen 5 und 8.

§. 5.

Denkt man ſich eine Größe als eine Menge von Dingen, auf deren Zuſammenhang und Ordnung keine Rückſicht genommen wird, ſo hat man einen Gegenſtand der **Arithmetik** oder **Rechenkunſt**. Demnach ſind die Zahlen 4 oder 5 oder 7 ſolche Gegenſtände.

Größen dieſer Art nennt man auch **unſtäte** oder **diskrete** Größen; folglich wäre die Arithmetik im allgemeinen Sinne die **Wiſſenſchaft der diskreten Größen**.

§. 6.

Man kann ſich auch eine Größe als etwas **ausgedehntes** denken, wobei man auf Zuſammenhang und Ordnung

Ordnung der Theile ſehen muß. Solche Größen nennt man ſtäte Größen und ſie ſind der Gegenſtand der Geometrie; daher iſt auch die Geometrie die Wiſſenſchaft der ſtäten Größen.

Da nun aber die Ausdehnung nur im Raume möglich iſt, und die Stätigkeit der Größen keine andere Eigenſchaft ausdrückt, als ununterbrochen, dem Raume nach fortdauernd, ſo iſt die Geometrie im allgemeinſten Sinne die Wiſſenſchaft des Raums.

§. 7.

Wendet man die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenſtände der Natur und des bürgerlichen Lebens, die entweder als Größen betrachtet werden können, oder wirkliche Größe ſind, an, ſo hat man angewandte Mathematik.

§. 8.

Hiernach wäre die ganze Körperwelt ein Gegenſtand der angewandten Mathematik, und dieſe Wiſſenſchaft würde daher ſo viel Theile erhalten, als es Arten von Gegenſtänden in der Natur giebt, deren Größe ſich beſtimmen läßt. Indeß hat man nur die Hauptarten derſelben ausgehoben, indem ſich die reine Mathematik auf alle anwenden läßt, durch deren Hülfe daher die Größe aller übrigen beſtimmt werden kann.

Dieſe Gegenſtände der Natur, worauf die reine Mathematik hauptſächlich angewendet wird, ſind folgende: die Kräfte der Körper, das Licht und die Himmelskörper oder das Weltgebäude. Daraus ſind alſo drei Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik, nämlich Dynamik, Optik und Aſtronomie entſtanden. Jede dieſer Hauptabtheilungen hat mehrere Unterabtheilungen unter eigenen Namen und von nicht geringem Umfange.

§. 9.

Die Dynamik, Optik und Aſtronomie werden auch phyſiſche Mathematik genannt. Da aber auch andere und der Naturlehre im beſondern Sinne eigene Gegenſtände und Lehren eine mathematiſche Behandlung zulaſſen, wie z. B. die Lehre von dem Schalle, vom Feuer, von der Elektricität u. dergl. ſo nennt man dieſe im beſondern Sinne die phyſiſche Mathematik.

§. 10.

Den Theil der angewandten Mathematik, der die reine Mathematik auf die Gegenſtände des bürgerlichen Lebens enthält, nennt man die bürgerliche oder politiſche Mathematik. Da nun bei der Bearbeitung dieſer Gegenſtände bloß mathematiſche Kenntniſſe nicht zureichen, ſondern mit Kenntniſſen aus verſchiedenen mechaniſchen Künſten verbunden werden müſſen, wenn die bearbeiteten Gegenſtände mit der Ausübung harmoniren ſollen, ſo hat man dieſen Theil der Mathematik die techniſche Mathematik genannt. Hierzu gehören die praktiſche Rechenkunſt, die Land- und Feldmeßkunſt, die Markſcheidekunſt, die praktiſche Maſchinenlehre, die architektoniſchen Wiſſenſchaften, die Schiffkunſt.

§. 11.

Jede Wiſſenſchaft der geſammten Mathematik hat zwei Theile, den gemeinen und höhern. Jenen nennt man die Elementarmathematik, dieſen die höhere Mathematik. Der Unterſchied dieſer beiden Theile ergiebt ſich theils aus dem Umfange und Inhalte, theils aber und zwar beſtimmter aus der Lehrart, die man bei der Behandlung dieſer Wiſſenſchaften anwendet.

§. 12.

§. 12.

Da der letzte Zweck aller Bemühungen unſers Verſtandes darin beſteht, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen mit der wirklichen Beſchaffenheit der Dinge zu erforſchen oder Wahrheit zu finden, ſo muß man ſich bemühen, die Wahrheit zu erkennen. Das ſicherſte Kennzeichen der Wahrheit aber iſt, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen. Jeder Widerſpruch unter denſelben zeigt Irrthum oder Unrichtigkeit. Aus der Vergleichung und Verbindung unſerer Vorſtellungen ſetzen wir Kenntniſſe und Wiſſenſchaften zuſammen.

Den Zuſtand, wenn wir Vorſtellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennt man überhaupt Empfindung. Hieraus begreift man leicht, was die Empfindungskraft ſei. Die Empfindungen ſind äuſſere, wenn ſich die Gegenſtände, welche von uns empfunden werden, außerhalb unſerer Seele befinden; innere hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unſerer Seele vorgehet. Die Kraft Begriffe von Gegenſtänden fortzuſetzen, heißt das Gedächtniß, welches in dem Falle Erinnerungskraft genannt wird, wenn wir erkennen, daß wir den nämlichen Begriff ſchon zu einer andern Zeit gehabt haben. Die Kraft, abweſende Dinge ſich ſo vorzuſtellen, als wenn ſie gegenwärtig wären, wird die Einbildungskraft, und die Kraft Begriffe zu vergleichen und zuſammenzuſetzen, die Beurtheilungskraft genannt. Die letztere Kraft heißt auch der Verſtand oder die Vernunft.

Die vorzüglichſten Wirkungen des menſchlichen Verſtandes ſind: Begriffe, Urtheile oder Sätze und Schlüſſe zu machen. Begriffe oder Ideen entſtehen durch die bloßen Vorſtellungen in unſerer Seele; Urtheile oder Sätze aber, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und endlich Schlüſſe, wenn wir aus zwei oder mehrern Sätzen einen dritten herleiten. Man

nennt daher auch das Vermögen der Begriffe, Verſtand; das Vermögen der Urtheile oder Sätze, die Urtheilskraft; das Vermögen der Schlüſſe aber, die Vernunft.

§ 13.

Dieſe Wirkungen unſers Verſtandes müſſen ſich bei der Erlernung aller Kenntniſſe, vorzüglich aber beim Studium der mathematiſchen Wiſſenſchaften äußern. Um in der Mathematik ſicher zur Erkenntniß der Wahrheit zu gelangen, beobachtet man folgenden Gang oder folgende Lehrart (Methode):

Man ſchickt Erklärungen voraus, in welchen man theils die Bedeutung der Wörter, theils die Kenntniß des Gegenſtandes beſtimmt. Eine Erklärung (Definition) muß den zu erklärenden Gegenſtand ſo beſtimmen, daß ein jeder ihn unter dem gegebenen Begriffe denkt. Der Begriff vom Gegenſtande ſelbſt muß theils ausführlich ſein, d. i. er muß die weſentlichen Merkmale des Gegenſtandes völlig enthalten; theils genau, d. i. er muß nicht zu viele Merkmale enthalten, ſondern zwiſchen ſeinen wahren Gränzen ſein; theils urſprünglich, d. i. die Beſtimmung des Begriffs muß nicht erſt einer Ableitung (Deduktion) bedürfen, ſondern ſchlechthin (abſolut) geſetzt werden. Z. B. der Kreis iſt eine ebene Figur, umgränzt von einer Linie, die von einem Punkte innerhalb der Figur (Mittelpunkt) gleichweit abſteht.

Betrift die Erklärung bloß die Feſtſtellung der Wörter, ſo heißt ſie eine Worterklärung (Nominaldefinition); betrift ſie aber die Beſtimmung einer Sache, ſo wird ſie Sacherklärung (Realdefinition) genannt. Zeigt die Erklärung zugleich die Möglichkeit oder die Entſtehung einer Sache, ſo heißt ſie eine genetiſche Erklärung. Von den letztern beiden Erklärungen kann man auch die erſte eine theoretiſche, die andere aber

eine

eine praktiſche Erklärung nennen. So wäre die vom Kreiſe gegebene eine theoretiſche, dieſe aber: Ein Kreis entſteht, wenn eine gerade Linie auf einer Ebene um einen feſten Punkt ſich ſo bewegt, daß die Stelle des Anfangs zugleich die Stelle des Endes der Bewegung wird, eine praktiſche Erklärung. In der Elementargeometrie kann man beide Arten der Erklärung anwenden. Da die praktiſche aber ſchon den der reinen Geometrie fremden Begriff der Bewegung enthält, und da überdies die genetiſchen Erklärungen ſich nur bei den krummlinigen Figuren anbringen laſſen, indem die geradlinigen auf mehr als eine Art beſchrieben (gezeichnet) werden können, ſo zieht man, der Einheit der Lehrart wegen, die theoretiſchen den praktiſchen Erklärungen vor.

Die Bedeutung gewiſſer Zeichen und gewiſſe Annahmen ohne nothwendige Gründe, beſtimmt man ebenfalls im voraus in willkürlichen Sätzen.

§. 14.

Nach den Erklärungen folgen die Sätze. Ein Satz (Propoſition) heißt die Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen zwei Erkenntniſſen. Diejenige Erkenntniß, von welcher die andere bejaht oder verneint wird, heißt das Subjekt, und die bejahende oder verneinende das Prädikat. Jedes von dieſen iſt entweder ein bloßer Begriff, oder es kann ſelbſt ein Satz ſein. So enthält der Satz: Ein Kreis iſt rund, zwei Begriffe, wovon der Begriff Kreis das Subjekt, der Begriff rund aber, das Prädikat iſt. Bedingungsſätze (hypothetiſche Sätze) enthalten in dem Satze, der das Subjekt vorſtellt, die Bedingung (Annahme, Vorausſetzung, Hypotheſis); in dem Satze aber, der das Prädikat ausdrückt, die Folge (Theſis). Z. B. der Kreis iſt einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie ſo groß iſt, wie die Peripherie des Kreiſes, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer gleicht.

Anmerkung.

Eine Erklärung enthält allemal einen allgemeinen Satz, der auch umgekehrt allgemein gültig iſt; z. B. ein Dreieck iſt eine dreiſeitige Figur. Umgekehrt: Eine von drei Seiten völlig begränzte Figur iſt ein Dreieck. Ein allgemeiner Satz hingegen, der keine Erklärung iſt, z. B. alle Menſchen ſind ſterblich, läßt ſich zwar allemal partikulär umkehren — einige Sterbliche ſind Menſchen — aber nicht immer allgemein — alle Sterbliche ſind Menſchen —, ſondern wenn das letztere ſtatt finden ſoll, muß es erſt bewieſen werden.

§. 15.

Ein Satz heißt analytiſch, wenn das Prädikat ſchon im Begriffe des Subjekts enthalten iſt: z. B. jeder Körper iſt ausgedehnt; ſynthetiſch, wenn jenes nicht in dieſem enthalten iſt: z. B. 3 und 4 iſt gleich 7.

Beruht die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte auf Wahrnehmung: ſo heißt der Satz empiriſch z. B. ein Stein iſt ſchwer. Ein ſolcher Satz heißt auch ein Satz a poſteriori. Läßt ſich hingegen dieſe Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte unabhängig von aller Wahrnehmung einſehen: ſo heißt er ein reiner Satz, oder ein Satz a priori z. B. ein Dreieck iſt eine Figur. Da nun die Wahrnehmung bloß lehrt, daß etwas ſo und nicht anders iſt, nicht aber, daß es ſchlechterdings ſo ſein müſſe: ſo führen empiriſche Sätze, oder Sätze a poſteriori niemals abſolute Nothwendigkeit und ſtrenge Allgemeinheit mit ſich, ſondern dieſe iſt bloß den Sätzen a priori eigen.

Alle Sätze der reinen Mathematik ſind ſynthetiſche Sätze a priori. Jeder Satz heißt theoretiſch, wenn er bloß beſtimmt, daß etwas ſo und ſo iſt — oder nicht, z. B. in jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten Winkeln gleich; praktiſch hingegen, wenn

er

er beſtimmt, daß und wie es möglich ſei, z. B. eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Ein ſynthetiſcher Satz, deſſen Richtigkeit oder Möglichkeit unmittelbar einleuchtend und gewiß iſt, ohne daß ſie bewieſen werden darf, heißt, wenn er theoretiſch iſt, ein Grundſatz (Axiom), z. B. von einem Punkte zum andern iſt nur eine gerade Linie möglich — und wenn er praktiſch iſt, ein Forderungsſatz (Poſtulat), z. B. von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

Iſt dagegen die Richtigkeit oder Möglichkeit eines Satzes nicht unmittelbar einleuchtend, ſo heißt er, wenn er theoretiſch iſt, ein Lehrſatz (Theorem), z. B. an jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten gleich — und wenn er praktiſch iſt, eine Aufgabe (Problem) z. B. aus einem Winkel und zwei anliegenden Seiten ein Dreieck zu zeichnen. Jede Aufgabe ſetzt gewiſſe *Regeln* voraus, durch deren Anwendung das, was ſie enthält, möglich wird. Die Beſtimmung dieſer Regeln und die Art der Anwendung um das zu Stande zu bringen, was die Aufgabe fordert, heißt ihre Auflöſung (Solution). Die zur Auflöſung nöthigen Stücke werden die Data genannt, und die Zuſammenſetzung der Theile des Begriffs zu einem Ganzen, heißt die Konſtruktion.

Sätze, die aus den vorhin genannten entweder unmittelbar gefolgert, oder durch einen leichten Schluß daraus hergeleitet werden, nennt man Zuſätze (Corollaria, Folgerungen).

Anmerkungen (Scholien) enthalten nichts weſentliches oder zum Syſtem nothwendig gehöriges, ſondern ſpecielle Erläuterungen und Anwendungen, ſo wie auch hiſtoriſche, litterariſche und artiſtiſche Nachrichten.

Lehrſätze oder Aufgaben, die nicht in die Wiſſenſchaft weſentlich gehören, aber doch mit Nutzen angewandt werden können, werden Lehnſätze (Lemmata) genannt.

In der angewandten Mathematik treten oft an die Stelle der Grundſätze Erfahrungen, Beobachtungen und Verſuche. Auch ſetzt man in dieſem Theile der Mathematik oft voraus, daß es ſich mit einer Erſcheinung ſo und ſo verhalte, und überzeugt ſich nachher durch die Uebereinſtimmung der Folge mit der Vorausſetzung von der Richtigkeit oder Wahrſcheinlichkeit der Hypotheſe; vorzüglich iſt dies der Fall in der Aſtronomie.

§. 16.

Ein mathematiſcher Beweis (Demonſtration) iſt die ſinnliche (intuitive) Darſtellung der nothwendigen Verknüpfung zwiſchen dem Subjekte und Prädikate. Oft kann man einen Satz durch einen einzigen Schluß beweiſen; in andern Fällen wird dazu auch wohl eine ganze Reihe erfordert. Weniggeübten machen zuſammengeſetzte Beweiſe die meiſten Schwierigkeiten. Um einen Satz zu beweiſen, muß man Schritt vor Schritt gehen, jeden einzelnen Satz, woraus die ganze Schlußkette beſteht, als wahr erkennen, auch muß man den Zuſammenhang aller deutlich einſehen, und den Einfluß auf den Schlußſatz gleichſam fühlen können. Iſt der Beweis ſo beſchaffen, daß ſich das Gegentheil von dem bewieſenen Satze unmöglich denken läßt, ſo wird er apodiktiſch oder eine Demonſtration genannt, von welcher Beſchaffenheit alle mathematiſchen Beweiſe ſein müſſen.

Iſt der Beweis aus Erklärungen und allgemeinen Begriffen zuſammengeſetzt, ſo heißt er ein Beweis a priori; nimmt man hingegen die Erfahrung zu Hülfe, ſo beweiſet man a poſteriori. So iſt z. B. der Beweis des Satzes: Alle rechte Winkel ſind einander gleich, ein Beweis a priori; der vom Daſein Gottes aus der

Ordnung

Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, ein Beweis a poſteriori. Die Beweiſe ſind entweder direkte oder indirekte Beweiſe. Ein direkter Beweis zeigt die Richtigkeit des Satzes geradezu; ein indirekter aber die Unmöglichkeit des Gegentheils. Alle direkten Beweiſe werden daher aus Einſicht der Gründe; alle indirekten aber nur aus den falſchen Folgen des Gegentheils geführt. Beide Beweisarten haben in der Mathematik gleiche Würde, und man wählt daher jedesmal die, welche die Wahrheit des Satzes am bequemſten und deutlichſten darſtellt.

Lehrſätze und Aufgaben bedürfen eines Beweiſes. — Grund- und Forderungsſätze aber können vermöge ihrer Einfachheit nicht bewieſen werden.

§. 17.

Der Mathematiker beſtimmt alſo alle Begriffe deutlich und thut nicht nur die Möglichkeit der Sätze dar, ſondern beſtimmt auch die zuſammengeſetzten Sätze aus unleugbaren Grundſätzen. Auch wählt der Mathematiker in ſeiner Wiſſenſchaft gute techniſche Ausdrücke, deren Bedeutung unabänderlich bleibt, und verbindet damit eine kurze Zeichenſprache da, wo es nur angehet.

Hierdurch aber unterſcheidet ſich die mathematiſche Methode noch nicht von jeder andern wiſſenſchaftlichen Lehrart, ſondern dadurch, daß der Mathematiker intuitiv verfährt, d. i. daß er nicht aus Begriffen ſchließt, ſondern ſeine Begriffe konſtruirt; das heißt, ſie in der Anſchauung darſtellt, und zwar in einer nicht empiriſchen, ſondern in einer von aller Erfahrung unabhängigen Anſchauung a priori. Da nun jede Anſchauung eine einzelne Vorſtellung iſt, jeder Begriff aber mehr einzelne Dinge unter ſich begreift: ſo ſtellt ſich der Mathematiker in ſeinen Beweiſen oder Demonſtrationen jedesmal

1 fl.
BHS II K 30

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke
Aktiengesellschaft
Bibliothek
Grup: II K
Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's
Anfangsgründe
der
theoretiſch-praktiſchen
Arithmetik und Geometrie
für diejenigen,
welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen
verbeſſert und vermehrt
von
Friedrich Meinert,
Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,
in der Weidmanniſchen Buchhandlung
1797.

BIBLIOTHEK
DER K. B. GENERAL
BERG- U. SALINEN
ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Die 1767 in der Weidmanniſchen Buchhandlung erſchienenen Mathematiſchen Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie ꝛc. Vom Herrn Prediger Johann Ehrenfried Vierenklee, haben ſich nun ſeit 30 Jahren in dem Rufe einer guten und zweckmäßigen Anweiſung für ſolche Forſtbediente erhalten, die ihrer andern Geſchäfte wegen nicht Zeit genug entbehren können, ſich mit der Mathematik ſo zu beſchäftigen, daß ſie ohne weitere Anleitung im Stande ſind, Anwendungen auf alle forſtlichen Gegenſtände zu machen, die eine mathematiſche Behandlung entweder nur zulaſſen, oder nothwendig erfordern. —

Herr Bergrath Gatterer, im Allgemeinen Repertorio der Forſtwiſſenſchaftlichen Litteratur (Band. I. Ulm 1796.) S. 15 nennt die Vierenkleeſchen Anfangsgründe, ein deutliches und ſehr gründliches Werk.

 Dieſe

Dieſe allgemein günſtigen Urtheile und das Verlangen des Publikums, nachdem die erſte Auflage ſchon mehrere Jahre vergriffen war, beſtimmten die Verlagshandlung, davon eine neue Auflage zu veranſtalten.

Mir wurde die Durchſicht übertragen und der Antrag gemacht, Veränderungen und Verbeſſerungen da anzubringen, wo Theorie und Ausübung ſie nothwendig machten, doch mit der Bitte, Vierenklee's Unterricht nicht ganz zu vernichten.

Nach einer genauen Prüfung der gegenwärtigen Behandlung der Wälder und Forſten fand ich, daß man unter den Offizianten einen dreifachen Unterſchied machen müſſe; ich fand nämlich Unterbediente, die bloß empiriſch in Form und Materie verfahren, und Oberoffizianten, deren Kenntniſſe weit über dieſe Anfangsgründe reichen; eine gewiſſe Mittelklaſſe von Offizianten aber ſucht ſich vom empiriſchen Verfahren immer mehr zu entfernen, und doch mangelt es dieſen an gehörigen Vorkenntniſſen, ſich deutliche Einſichten in die Mathematik zu verſchaffen, um das gehörig benutzen zu können, was das forſtliche Rechnungsweſen der Allgemeinen Arithmetik und einer gründlichen Anwendung der gemeinen und zum Theil höhern Geometrie verdankt; dieſe Klaſſe ſchien mir das Publikum zu ſeyn, für welches ſich der Vierenkleeſche Unterricht, auch in etwas geänderter Geſtalt immer

mer noch paſſen würde. Nach dieſem Zwecke unternahm ich die gegenwärtige Bearbeitung.

Die größte Erweiterung hat die Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen, die, wenn ſie auch nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung in dem gegenwärtigen Unterrichte angewandt worden iſt, dennoch dazu dienen kann, nach vorkommenden Fällen Erweiterungen zu veranlaſſen, und eine gründlichere Einſicht ins Rechnungsweſen ſo wohl, als in die Geometrie zu befördern. So können z. B. die quadratiſchen und kubiſchen oder überhaupt die zuſammengeſetzten Verhältniſſe und Proportionen unter andern auch auf die Vergleichung der verſchiedenen Flächen und Körper führen, die, wie bekannt, vorzügliche Gegenſtände der Forſtwirthſchaft ſind, und wodurch die Geometrie auch für dieſen Zweck eine wiſſenſchaftlichere Geſtalt erhält.

In der Geometrie iſt die Lehre von Vermeſſung der Gränzen und Aufnahme der Wälder theils erweitert, theils dadurch anwendbarer geworden, daß das Verfahren mehr anſchaulich durch die Beſchreibung derjenigen Inſtrumente geworden iſt, die man als die zweckmäßigſten und bequemſten zu dergleichen Vermeſſung anerkennt. Zu dieſem Zwecke wurde die neue Kupfertafel mit Tab. II.* bezeichnet nöthig, wofür ich die bei der erſten Auflage befindliche und mit Tab. VI. bezeichnete, weggelaſſen habe,

weil ſie Chartencharaktere enthielt, die theils nicht mehr gebräuchlich, theils aber auch auf dem neu hinzugekommenen illuminirten Plane ergänzt worden ſind. Dieſer Plan, welcher gröſtentheils nach den Vorſchriften des Preußiſchen Forſtvermeſſungsweſens eingerichtet iſt, ſoll denjenigen Forſtoffizianten nützen, die in der Jugend weder Zeit noch Gelegenheit gehabt haben, ſich mit der geometriſchen Zeichenkunſt zu beſchäftigen. Durch eigene Uebung, wenn nur eine mäßig gute Anweiſung vorgelegt wird, iſt man alles zu erlernen im Stande.

Theorien, die in neuern Zeiten erſt ausgemittelt worden ſind, und welche höhere forſtwiſſenſchaftliche Kenntniſſe betreffen, habe ich ſo weit in den gegenwärtigen Unterricht aufgenommen, als es die Vorbereitungskenntniſſe verſtatten, und da, wo ich nicht ausführlich ſeyn konnte, wenn ich auch wünſchte, es ſeyn zu können, iſt die Litteratur beigefügt worden, um jeden wißbegierigen Anfänger zu veranlaſſen, in Kenntniſſen fortzurücken.

Wer ohne zweckmäßige Bildung in forſtwiſſenſchaftlichen Inſtituten, oder ohne höhern Unterricht auf Schulen und Univerſitäten, ſich durch eignen Fleiß zu irgend einer Forſtbedienung herauf gearbeitet hat, und gegenwärtigen Unterricht verſteht, kann es alsdann wagen, in eigentlich mathematiſchen Lehrbüchern, ſichere und gründlichere Kenntniſſe der Arithmetik und Geometrie zu erler-

erlernen; und wer mit den Elementen der Mathematik einmal vertraut geworden iſt, wird es nicht dabei bewenden laſſen, ſondern auch Unterricht in der allgemeinen Arithmetik ſuchen, um dadurch eine vollſtändige Einſicht in diejenigen mathematiſchen Kenntniſſe zu erhalten, welche für die zweckmäßig zu treibende Forſtwirthſchaft unentbehrlich ſind.

Die allgemeine Arithmetik und Algebra, wenigſtens bis zu den Gleichungen vom 4ten Grade hätte ich noch gern dieſen Anfangsgründen beigefügt, wenn ich nicht beſorgt hätte, dieſe Schrift zu ſehr zu erweitern.

Vielleicht erlauben es meine anderweitigen Geſchäfte, in der Zukunft für diejenigen eine *Anleitung* zur allgemeinen Arithmetik auszuarbeiten, die keinen Unterricht in dieſer beinah unentbehrlichen Kenntniß erhalten haben, und doch gern Anwendung davon im Forſtweſen machen möchten.

Daß ich keine Mühe geſpart habe, den Vortrag der Vierenkleeſchen Anfangsgründe ganz ſo umzuarbeiten, daß das Buch wieder ein gleichförmiges Ganzes geworden iſt, wird man finden, wenn man die gegenwärtige Auflage mit der erſten vergleicht.

Hat dies nützliche Buch unter meiner Feder auch nur etwas gewonnen, und findet es in dieſer

Geſtalt den vorigen Beifall, ſo wird dies ein Theil der Belohnung für meine Sorgfalt ſeyn, die ich auf die Bearbeitung verwandte.

Kenntniſſe des Forſtweſens verbreiten; und noch mehr, Kenntniſſe dieſes Fachs ausüben, heißt, dem Menſchengeſchlechte auf Jahrhunderte zum voraus ein Mittel zur Befriedigung eines Bedürfniſſes ſchaffen, welches kein kultivirtes Volk mehr entbehren kann.

Halle, den 14ten Sept. 1797.

Friedrich Meinert.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik. §. 1 — 28.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen, dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I. Erklärung und Bezeichnung der Zahlen. §. 1 — 8.
II. Vom Zahlenſyſteme. §. 9 — 14.
III. Allgemeine Begriffe vom Rechnen. §. 15 — 22.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Rechenkunſt. §. 23 — 29.

Drittes Kapitel.

Die vier Rechnungsarten in ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.
Die Addition. §. 30 — 36.

Zweiter Abſchnitt.
Die Multiplikation. §. 37 — 43.

Dritter Abſchnitt.
Die Subtraktion. §. 44 — 48.

Geſtalt den vorigen Beifall, ſo wird dies ein Theil der Belohnung für meine Sorgfalt ſeyn, die ich auf die Bearbeitung verwandte.

Kenntniſſe des Forſtweſens verbreiten; und noch mehr, Kenntniſſe dieſes Fachs ausüben, heißt, dem Menſchengeſchlechte auf Jahrhunderte zum voraus ein Mittel zur Befriedigung eines Bedürfniſſes ſchaffen, welches kein kultivirtes Volk mehr entbehren kann.

Halle, den 14ten Sept. 1797.

Friedrich Meinert.

Inhalt.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik. §. 1 — 28.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen, dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I. Erklärung und Bezeichnung der Zahlen. §. 1 — 8.

II. Vom Zahlenſyſteme. §. 9 — 14.

III. Allgemeine Begriffe vom Rechnen. §. 15 — 22.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Rechenkunſt. §. 23 — 29.

Drittes Kapitel.

Die vier Rechnungsarten in ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Die Addition. §. 30 — 36.

Zweiter Abſchnitt.

Die Multiplikation. §. 37 — 43.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion. §. 44 — 48.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion. §. 49. — 59.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit denſelben.

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Lehren von den Brüchen. §. 60 — 80.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition der Brüche. §. 81 — 82.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche. §. 83 — 84.

Vierter Abſchnitt.

Die Subtraktion der Brüche. §. 85 — 86.

Fünfter Abſchnitt.

Die Diviſion der Brüche. §. 87 — 88.

Von den gebrochenen Brüchen. §. 89 — 91.

Fünftes Kapitel.

Von den Decimaleintheilungen überhaupt und den Decimalbrüchen insbeſondre.

Erſter Abſchnitt.

Die Decimaleintheilungen. §. 92 — 97.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche. §. 98 — 102.

I. Die Addition. §. 103.

II. Die Multiplikation. §. 104.

III. Die Subtraktion. §. 105.

IV. Die Diviſion. §. 106 — 109.

V. Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. §. 110 — 111.

Sechstes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt. §. 112 — 118.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I. Die Ausziehung der Quadratwurzeln. §. 119 — 134.

II. Die Ausziehung der Kubikwurzeln. §. 135 — 150.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen. §. 151 — 152.

I. Arithmetiſche Verhältniſſe. §. 153 — 155.

II. Geometriſche Verhältniſſe. §. 156 — 161.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen. §. 162 — 164.

I. Arithmetiſche Proportionen. §. 165 — 169.

II. Geometriſche Proportionen. §. 170 — 179.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen und Proportionen. §. 180 — 189.

Achtes Kapitel.

Anwendung der theoretiſchen Arithmetik, beſonders aber der Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen auf die im Forſtweſen und im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle.

Erſter Abſchnitt.

Anwendung der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 190 — 192.

Zweiter Abſchnitt.

Anwendung der geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 193.

I. Die einfache Regel Detri.

A. Die gerade oder gemeine einfache Regel Detri. §. 194 — 207.

B. Die umgekehrte einfache Regel Detri. §. 208 — 209.

II. Die zuſammengeſetzte Regel Detri. §. 210 — 211.

A. Die zuſammengeſetzte gerade Regel Detri. §. 212.

B. Die zuſammengeſetzte umgekehrte Regel Detri. §. 213 — 215.

Anwendungen der Regel Detri auf Decimalzahlen. §. 216.

III. Die Regel Multiplex oder die Kettenregel. §. 217.

IV. Die Reeſiſche Regel. §. 218.

V. Die Verbindung der Kettenregel mit der Reeſiſchen. §. 219.

VI. Die Geſellſchafts- und Vermiſchungsregel. §. 220 — 221.

Schlußanmerkung zur Arithmetik. §. 222.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Erſter Theil.

Die theoretiſche Geometrie.

Einleitung,
welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 40.

Erſte Abtheilung.
Die Längenmeſſung oder die Euthymetrie. §. 41 — 69.

Zweite Abtheilung.
Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie. §. 70.

I. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Dreiecke. §. 71 — 95.

II. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vierecke. §. 96 — 114.

III. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vielecke. §. 115 — 128.

IV. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Kreiſe und anderer krummliniger Figuren. §. 129 — 145.

V. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der gemiſchtlinigten Figuren. §. 146 — 148.

Dritte Abtheilung.
Die Körpermeſſung oder die Stereometrie. §. 149 — 168.

Zweiter

Zweiter Theil.
Die praktiſche Geometrie.

Einleitung,
welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 5.

Erſte Abtheilung.
Angewandte Längenmeſſung oder Euthymetrie im Forſtweſen.

I. Von der Meſſung der Weiten oder Entfernungen. §. 6 — 11.

II. Vom Höhenmeſſen. §. 12 — 17.

III. Von Durchſchlägen durch Gehölze. §. 18 — 19.

IV. Von Vermeſſung der Gränzen eines Reviers. §. 20 — 26.

V. Von den Blößen, Wieſen ꝛc. eines Reviers. §. 27 — 28.

VI. Prüfung, ob eine Figur, oder ein Revier richtig aufgenommen worden. §. 29 — 30.

VII. Von der Beſtimmung der Lage eines Reviers nach den Himmelsgegenden und von der Mittagslinie. §. 31 — 32.

VIII. Vom Umfange und dem Durchmeſſer eines Baums. §. 33 — 38.

Allgemeine Anmerkung über Waldvermeſſungen überhaupt.

Zweite Abtheilung.
Die angewandte Flächenmeſſung oder die Epipedometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe ꝛc. §. 39.

I. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſenkrecht aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 40 — 42.

II. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſchief aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 43 — 44.

III. Von den Grundflächen der Bäume. §. 45 — 46.

IV. Von der Berechnung des Inhalts eines ganzen Reviers. §. 47 — 48.

V. Von der Eintheilung eines Reviers in Gehaue oder Schläge nach dem Flächeninhalte. §. 49 — 54.

Allgemeine Anmerkung über Schläge und Gehaue.

Dritte Abtheilung.

Die angewandte Körpermeſſung oder die Stereometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe. §. 55.

I. Vom körperlichen Inhalte einer Holzklafter, eines Malters und Sechszigers. §. 56 — 59.

II. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Bäume. §. 60 — 61.

III. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc. §. 62 — 63.

IV. Von dem Werthe eines jeden Holzſtückes. §. 64 — 65.

V. Von der Taxirung eines jeden Baumes nach dem Holzpreiſe. §. 66 — 67.

VI. Von der Berechnung eines Baumſtammes nach Klafterholz. §. 68 — 69.

VII. Von der Berechnung einzelner Holzſtücke, deren Inhalt einer Klafter gleich iſt. §. 70.

VIII. Von der Berechnung der Säulen und Schwellen. §. 71 — 74.

IX. Von der Berechnung der Breter und Latten aus einem Klotze. §. 75 — 77.

X. Von der Zählung der Bäume eines ganzen Reviers nach ihrer verſchiedenen Größe. §. 78 — 79.

XI. Von der Berechnung des Holzbeſtandes auf einem Reviere, deſſen Bäume gezählt worden ſind. §. 80 — 81.

XII. Von dem jährlichen Zuwachſe des Holzes. §. 82 — 85.

XIII. Von den Gehauen, nach welchen man jährlich eine gewiſſe Anzahl Klaftern und Malter, ohne Rückſicht auf den Flächeninhalt ſchlagen kann. §. 86.

Erſter Anhang.
Tafeln und Gebrauchsanweiſung.

Zweiter Anhang.
Beſchreibung der illuminirten Forſt-Charte.

Allge-

Allgemeine Einleitung

in die

Forſt-Mathematik.

Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik.

§. 1.

Jedem Gegenſtande, der einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt, legt man eine Größe bei, und verſteht daher unter Größe die Eigenſchaft eines Dinges oder Gegenſtandes, nach welcher es einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. So kann z. B. eine Linie vermehrt und vermindert werden, desgleichen eine Zahl: daher haben Linien und Zahlen, Größe, und werden alſo als Größen betrachtet und behandelt. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit andern Gegenſtänden. Demnach nennt man überhaupt dasjenige, was ſich vermehren oder vermindern läßt, und an welchem außer der erwähnten, keine andere Eigenſchaft in Betrachtung kommt, ſelbſt eine Größe.

§. 2.

Man erhält Begriffe von einer Größe entweder durch unmittelbare Betrachtung und Vorſtellung, oder durch Vergleichung mit einer andern bekannten Größe, welches letztere wiederum entweder durch unmittelbare Vergleichung oder durch das unſerer Vernunft eigene Geſchäft, durch Schlüſſe geſchehen kann. So erhält man z. B. die Größe irgend eines Fußes oder ſeine Länge durch unmittelbare Betrachtung; die Größe oder

Länge aber der Entfernung irgend eines Gegenſtandes von einem andern, durch unmittelbare Vergleichung mit der nun ſchon bekannten Länge eines Fußes, das heißt, durch unmittelbare Meſſung; oder man erhält den Begriff von der Länge oder Größe einer Entfernung durch Schlüſſe, die aber eine künſtlichere Operation veranlaſſen.

§. 3.

Durch dieſe Betrachtungen wird man auf den Begriff der Mathematik oder Größenlehre geleitet, welche die Wiſſenſchaft Größen durch Schlüſſe zu finden ausmacht.

§. 4.

Der geſammte Anfang aller Lehren von den Größen, die man ganz allein als Größen, abgeſondert von allen übrigen Eigenſchaften, betrachtet, macht die reine Mathematik aus. So iſt z. B. die Ausmittelung der Größe einer Kugel, deren Durchmeſſer 2 Fuß beträgt, eben ſo ein Gegenſtand der reinen Mathematik, ſo wie die Summirung der Zahlen 5 und 8.

§. 5.

Denkt man ſich eine Größe als eine Menge von Dingen, auf deren Zuſammenhang und Ordnung keine Rückſicht genommen wird, ſo hat man einen Gegenſtand der Arithmetik oder Rechenkunſt. Demnach ſind die Zahlen 4 oder 5 oder 7 ſolche Gegenſtände.

Größen dieſer Art nennt man auch unſtäte oder diskrete Größen; folglich wäre die Arithmetik im allgemeinen Sinne die Wiſſenſchaft der diskreten Größen.

§. 6.

Man kann ſich auch eine Größe als etwas ausgedehntes denken, wobei man auf Zuſammenhang und Ordnung

Ordnung der Theile ſehen muß. Solche Größen nennt man ſtäte Größen und ſie ſind der Gegenſtand der Geometrie; daher iſt auch die Geometrie die Wiſſenſchaft der ſtäten Größen.

Da nun aber die Ausdehnung nur im Raume möglich iſt, und die Stätigkeit der Größen keine andere Eigenſchaft ausdrückt, als ununterbrochen, dem Raume nach fortdauernd, ſo iſt die Geometrie im allgemeinſten Sinne die Wiſſenſchaft des Raums.

§. 7.

Wendet man die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenſtände der Natur und des bürgerlichen Lebens, die entweder als Größen betrachtet werden können, oder wirkliche Größe ſind, an, ſo hat man angewandte Mathematik.

§. 8.

Hiernach wäre die ganze Körperwelt ein Gegenſtand der angewandten Mathematik, und dieſe Wiſſenſchaft würde daher ſo viel Theile erhalten, als es Arten von Gegenſtänden in der Natur giebt, deren Größe ſich beſtimmen läßt. Indeß hat man nur die Hauptarten derſelben ausgehoben, indem ſich die reine Mathematik auf alle anwenden läßt, durch deren Hülfe daher die Größe aller übrigen beſtimmt werden kann.

Dieſe Gegenſtände der Natur, worauf die reine Mathematik hauptſächlich angewendet wird, ſind folgende: die Kräfte der Körper, das Licht und die Himmelskörper oder das Weltgebäude. Daraus ſind alſo drei Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik, nämlich Dynamik, Optik und Aſtronomie entſtanden. Jede dieſer Hauptabtheilungen hat mehrere Unterabtheilungen unter eigenen Namen und von nicht geringem Umfange.

§. 9.

Die Dynamik, Optik und Aſtronomie werden auch phyſiſche Mathematik genannt. Da aber auch andere und der Naturlehre im beſondern Sinne eigene Gegenſtände und Lehren eine mathematiſche Behandlung zulaſſen, wie z. B. die Lehre von dem Schalle, vom Feuer, von der Elektricität u. dergl. ſo nennt man dieſe im beſondern Sinne die phyſiſche Mathematik.

§. 10.

Den Theil der angewandten Mathematik, der die reine Mathematik auf die Gegenſtände des bürgerlichen Lebens enthält, nennt man die bürgerliche oder politiſche Mathematik. Da nun bei der Bearbeitung dieſer Gegenſtände bloß mathematiſche Kenntniſſe nicht zureichen, ſondern mit Kenntniſſen aus verſchiedenen mechaniſchen Künſten verbunden werden müſſen, wenn die bearbeiteten Gegenſtände mit der Ausübung harmoniren ſollen, ſo hat man dieſen Theil der Mathematik die techniſche Mathematik genannt. Hierzu gehören die praktiſche Rechenkunſt, die Land- und Feldmeßkunſt, die Markſcheidekunſt, die praktiſche Maſchinenlehre, die architektoniſchen Wiſſenſchaften, die Schiffkunſt.

§. 11.

Jede Wiſſenſchaft der geſammten Mathematik hat zwei Theile, den gemeinen und höhern. Jenen nennt man die Elementarmathematik, dieſen die höhere Mathematik. Der Unterſchied dieſer beiden Theile ergiebt ſich theils aus dem Umfange und Inhalte, theils aber und zwar beſtimmter aus der Lehrart, die man bei der Behandlung dieſer Wiſſenſchaften anwendet.

§. 12.

Da der letzte Zweck aller Bemühungen unſers Verſtandes darin beſteht, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen mit der wirklichen Beſchaffenheit der Dinge zu erforſchen oder Wahrheit zu finden, ſo muß man ſich bemühen, die Wahrheit zu erkennen. Das ſicherſte Kennzeichen der Wahrheit aber iſt, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen. Jeder Widerſpruch unter denſelben zeigt Irrthum oder Unrichtigkeit. Aus der Vergleichung und Verbindung unſerer Vorſtellungen ſetzen wir Kenntniſſe und Wiſſenſchaften zuſammen.

Den Zuſtand, wenn wir Vorſtellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennt man überhaupt Empfindung. Hieraus begreift man leicht, was die Empfindungskraft ſei. Die Empfindungen ſind äuſſere, wenn ſich die Gegenſtände, welche von uns empfunden werden, außerhalb unſerer Seele befinden; innere hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unſerer Seele vorgehet. Die Kraft Begriffe von Gegenſtänden fortzuſetzen, heißt das Gedächtniß, welches in dem Falle Erinnerungskraft genannt wird, wenn wir erkennen, daß wir den nämlichen Begriff ſchon zu einer andern Zeit gehabt haben. Die Kraft, abweſende Dinge ſich ſo vorzuſtellen, als wenn ſie gegenwärtig wären, wird die Einbildungskraft, und die Kraft Begriffe zu vergleichen und zuſammenzuſetzen, die Beurtheilungskraft genannt. Die letztere Kraft heißt auch der Verſtand oder die Vernunft.

Die vorzüglichſten Wirkungen des menſchlichen Verſtandes ſind: Begriffe, Urtheile oder Sätze und Schlüſſe zu machen. Begriffe oder Ideen entſtehen durch die bloßen Vorſtellungen in unſerer Seele; Urtheile oder Sätze aber, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und endlich Schlüſſe, wenn wir aus zwei oder mehrern Sätzen einen dritten herleiten. Man

nennt daher auch das Vermögen der Begriffe, Verſtand; das Vermögen der Urtheile oder Sätze, die Urtheilskraft; das Vermögen der Schlüſſe aber, die Vernunft.

§ 13.

Dieſe Wirkungen unſers Verſtandes müſſen ſich bei der Erlernung aller Kenntniſſe, vorzüglich aber beim Studium der mathematiſchen Wiſſenſchaften äußern. Um in der Mathematik ſicher zur Erkenntniß der Wahrheit zu gelangen, beobachtet man folgenden Gang oder folgende Lehrart (Methode):

Man ſchickt Erklärungen voraus, in welchen man theils die Bedeutung der Wörter, theils die Kenntniß des Gegenſtandes beſtimmt. Eine Erklärung (Definition) muß den zu erklärenden Gegenſtand ſo beſtimmen, daß ein jeder ihn unter dem gegebenen Begriffe denkt. Der Begriff vom Gegenſtande ſelbſt muß theils ausführlich ſein, d. i. er muß die weſentlichen Merkmale des Gegenſtandes völlig enthalten; theils genau, d. i. er muß nicht zu viele Merkmale enthalten, ſondern zwiſchen ſeinen wahren Gränzen ſein; theils urſprünglich, d. i. die Beſtimmung des Begriffs muß nicht erſt einer Ableitung (Deduktion) bedürfen, ſondern ſchlechthin (abſolut) geſetzt werden. Z. B. der Kreis iſt eine ebene Figur, umgränzt von einer Linie, die von einem Punkte innerhalb der Figur (Mittelpunkt) gleichweit abſteht.

Betrift die Erklärung bloß die Feſtſtellung der Wörter, ſo heißt ſie eine Worterklärung (Nominaldefinition); betrift ſie aber die Beſtimmung einer Sache, ſo wird ſie Sacherklärung (Realdefinition) genannt. Zeigt die Erklärung zugleich die Möglichkeit oder die Entſtehung einer Sache, ſo heißt ſie eine genetiſche Erklärung. Von den letztern beiden Erklärungen kann man auch die erſte eine theoretiſche, die andere aber eine

eine praktiſche Erklärung nennen. So wäre die vom Kreiſe gegebene eine theoretiſche, dieſe aber: Ein Kreis entſteht, wenn eine gerade Linie auf einer Ebene um einen feſten Punkt ſich ſo bewegt, daß die Stelle des Anfangs zugleich die Stelle des Endes der Bewegung wird, eine praktiſche Erklärung. In der Elementargeometrie kann man beide Arten der Erklärung anwenden. Da die praktiſche aber ſchon den der reinen Geometrie fremden Begriff der Bewegung enthält, und da überdies die genetiſchen Erklärungen ſich nur bei den krummlinigen Figuren anbringen laſſen, indem die geradlinigen auf mehr als eine Art beſchrieben (gezeichnet) werden können, ſo zieht man, der Einheit der Lehrart wegen, die theoretiſchen den praktiſchen Erklärungen vor.

Die Bedeutung gewiſſer Zeichen und gewiſſe Annahmen ohne nothwendige Gründe, beſtimmt man ebenfalls im voraus in willkürlichen Sätzen.

§. 14.

Nach den Erklärungen folgen die Sätze. Ein Satz (Propoſition) heißt die Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen zwei Erkenntniſſen. Diejenige Erkenntniß, von welcher die andere bejaht oder verneint wird, heißt das Subjekt, und die bejahende oder verneinende das Prädikat. Jedes von dieſen iſt entweder ein bloßer Begriff, oder es kann ſelbſt ein Satz ſein. So enthält der Satz: Ein Kreis iſt rund, zwei Begriffe, wovon der Begriff Kreis das Subjekt, der Begriff rund aber, das Prädikat iſt. Bedingungsſätze (hypothetiſche Sätze) enthalten in dem Satze, der das Subjekt vorſtellt, die Bedingung (Annahme, Vorausſetzung, Hypotheſis); in dem Satze aber, der das Prädikat ausdrückt, die Folge (Theſis). Z. B. der Kreis iſt einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie ſo groß iſt, wie die Peripherie des Kreiſes, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer gleicht.

Anmerkung.

Eine Erklärung enthält allemal einen allgemeinen Satz, der auch umgekehrt allgemein gültig iſt; z. B. ein Dreieck iſt eine dreiſeitige Figur. Umgekehrt: Eine von drei Seiten völlig begränzte Figur iſt ein Dreieck. Ein allgemeiner Satz hingegen, der keine Erklärung iſt, z. B. alle Menſchen ſind ſterblich, läßt ſich zwar allemal partikulär umkehren — einige Sterbliche ſind Menſchen — aber nicht immer allgemein — alle Sterbliche ſind Menſchen —, ſondern wenn das letztere ſtatt finden ſoll, muß es erſt bewieſen werden.

§. 15.

Ein Satz heißt analytiſch, wenn das Prädikat ſchon im Begriffe des Subjekts enthalten iſt: z. B. jeder Körper iſt ausgedehnt; ſynthetiſch, wenn jenes nicht in dieſem enthalten iſt: z. B. 3 und 4 iſt gleich 7.

Beruht die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte auf Wahrnehmung: ſo heißt der Satz empiriſch z. B. ein Stein iſt ſchwer. Ein ſolcher Satz heißt auch ein Satz a poſteriori. Läßt ſich hingegen dieſe Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte unabhängig von aller Wahrnehmung einſehen: ſo heißt er ein reiner Satz, oder ein Satz a priori z. B. ein Dreieck iſt eine Figur. Da nun die Wahrnehmung bloß lehrt, daß etwas ſo und nicht anders iſt, nicht aber, daß es ſchlechterdings ſo ſein müſſe: ſo führen empiriſche Sätze, oder Sätze a poſteriori niemals abſolute Nothwendigkeit und ſtrenge Allgemeinheit mit ſich, ſondern dieſe iſt bloß den Sätzen a priori eigen.

Alle Sätze der reinen Mathematik ſind ſynthetiſche Sätze a priori. Jeder Satz heißt theoretiſch, wenn er bloß beſtimmt, daß etwas ſo und ſo iſt — oder nicht, z. B. in jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten Winkeln gleich; praktiſch hingegen, wenn

er

er beſtimmt, daß und wie es möglich ſei, z. B. eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Ein ſynthetiſcher Satz, deſſen Richtigkeit oder Möglichkeit unmittelbar einleuchtend und gewiß iſt, ohne daß ſie bewieſen werden darf, heißt, wenn er theoretiſch iſt, ein Grundſatz (Axiom), z. B. von einem Punkte zum andern iſt nur eine gerade Linie möglich — und wenn er praktiſch iſt, ein Forderungsſatz (Poſtulat), z. B. von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

Iſt dagegen die Richtigkeit oder Möglichkeit eines Satzes nicht unmittelbar einleuchtend, ſo heißt er, wenn er theoretiſch iſt, ein Lehrſatz (Theorem), z. B. an jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten gleich — und wenn er praktiſch iſt, eine Aufgabe (Problem) z. B. aus einem Winkel und zwei anliegenden Seiten ein Dreieck zu zeichnen. Jede Aufgabe ſetzt gewiſſe *Regeln* voraus, durch deren Anwendung das, was ſie enthält, möglich wird. Die Beſtimmung dieſer Regeln und die Art der Anwendung um das zu Stande zu bringen, was die Aufgabe fordert, heißt ihre Auflöſung (Solution). Die zur Auflöſung nöthigen Stücke werden die Data genannt, und die Zuſammenſetzung der Theile des Begriffs zu einem Ganzen, heißt die Konſtruktion.

Sätze, die aus den vorhin genannten entweder unmittelbar gefolgert, oder durch einen leichten Schluß daraus hergeleitet werden, nennt man Zuſätze (Corollaria, Folgerungen).

Anmerkungen (Scholien) enthalten nichts weſentliches oder zum Syſtem nothwendig gehöriges, ſondern ſpecielle Erläuterungen und Anwendungen, ſo wie auch hiſtoriſche, litterariſche und artiſtiſche Nachrichten.

Lehr-

Lehrſätze oder Aufgaben, die nicht in die Wiſſenſchaft weſentlich gehören, aber doch mit Nutzen angewandt werden können, werden Lehnſätze (Lemmata) genannt.

In der angewandten Mathematik treten oft an die Stelle der Grundſätze Erfahrungen, Beobachtungen und Verſuche. Auch ſetzt man in dieſem Theile der Mathematik oft voraus, daß es ſich mit einer Erſcheinung ſo und ſo verhalte, und überzeugt ſich nachher durch die Uebereinſtimmung der Folge mit der Vorausſetzung von der Richtigkeit oder Wahrſcheinlichkeit der Hypotheſe; vorzüglich iſt dies der Fall in der Aſtronomie.

§. 16.

Ein mathematiſcher Beweis (Demonſtration) iſt die ſinnliche (intuitive) Darſtellung der nothwendigen Verknüpfung zwiſchen dem Subjekte und Prädikate. Oft kann man einen Satz durch einen einzigen Schluß beweiſen; in andern Fällen wird dazu auch wohl eine ganze Reihe erfordert. Weniggeübten machen zuſammengeſetzte Beweiſe die meiſten Schwierigkeiten. Um einen Satz zu beweiſen, muß man Schritt vor Schritt gehen, jeden einzelnen Satz, woraus die ganze Schlußkette beſteht, als wahr erkennen, auch muß man den Zuſammenhang aller deutlich einſehen, und den Einfluß auf den Schlußſatz gleichſam fühlen können. Iſt der Beweis ſo beſchaffen, daß ſich das Gegentheil von dem bewieſenen Satze unmöglich denken läßt, ſo wird er apodiktiſch oder eine Demonſtration genannt, von welcher Beſchaffenheit alle mathematiſchen Beweiſe ſein müſſen.

Iſt der Beweis aus Erklärungen und allgemeinen Begriffen zuſammengeſetzt, ſo heißt er ein Beweis a priori; nimmt man hingegen die Erfahrung zu Hülfe, ſo beweiſet man a poſteriori. So iſt z. B. der Beweis des Satzes: Alle rechte Winkel ſind einander gleich, ein Beweis a priori; der vom Daſein Gottes aus der

Ordnung

Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, ein Beweis a poſteriori. Die Beweiſe ſind entweder direkte oder indirekte Beweiſe. Ein direkter Beweis zeigt die Richtigkeit des Satzes geradezu; ein indirekter aber die Unmöglichkeit des Gegentheils. Alle direkten Beweiſe werden daher aus Einſicht der Gründe; alle indirekten aber nur aus den falſchen Folgen des Gegentheils geführt. Beide Beweisarten haben in der Mathematik gleiche Würde, und man wählt daher jedesmal die, welche die Wahrheit des Satzes am bequemſten und deutlichſten darſtellt.

Lehrſätze und Aufgaben bedürfen eines Beweiſes. — Grund- und Forderungsſätze aber können vermöge ihrer Einfachheit nicht bewieſen werden.

§. 17.

Der Mathematiker beſtimmt alſo alle Begriffe deutlich und thut nicht nur die Möglichkeit der Sätze dar, *ſondern* beſtimmt auch die zuſammengeſetzten Sätze aus unleugbaren Grundſätzen. Auch wählt der Mathematiker in ſeiner Wiſſenſchaft gute techniſche Ausdrücke, deren Bedeutung unabänderlich bleibt, und verbindet damit eine kurze Zeichenſprache da, wo es nur angehet.

Hierdurch aber unterſcheidet ſich die mathematiſche Methode noch nicht von jeder andern wiſſenſchaftlichen Lehrart, ſondern dadurch, daß der Mathematiker intuitiv verfährt, d. i. daß er nicht aus Begriffen ſchließt, ſondern ſeine Begriffe konſtruirt; das heißt, ſie in der Anſchauung darſtellt, und zwar in einer nicht empiriſchen, ſondern in einer von aller Erfahrung unabhängigen Anſchauung a priori. Da nun jede Anſchauung eine einzelne Vorſtellung iſt, jeder Begriff aber mehr einzelne Dinge unter ſich begreift: ſo ſtellt ſich der Mathematiker in ſeinen Beweiſen oder Demonſtrationen jedes-

mal

mal das Allgemeine im Einzelnen vor. Aus dieſem Grunde ſind die Erklärungen, Grundſätze, Foderungsſätze und Beweiſe in der Art, wie ſie der Mathematiker hat, der Mathematik ausſchließend eigen.

Da die reine Mathematik von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt, ſo muß ſich der Mathematiker ſeinen Gegenſtand, z. B. Summe, Proportion, Potenz, Kreis, Dreieck, Kugel, Kegel ꝛc. jedesmal erſt durch die Definition ſelber machen, und daher nicht nur die weſentlichen Merkmale, die der Begriff deſſelben enthalten ſoll, ſelbſt wählen, ſondern ihn auch aus demſelben zuſammenſetzen, folglich kann ſeinem Gegenſtande weſentlich niemals mehr oder weniger, ſondern nur gerade ſo viel und das zukommen, was ſein Begriff anzeigt, mithin iſt er ſicher, daß dieſer durch die Erklärung ausführlich genau und urſprünglich beſtimmt, und daher nichts weiter nöthig iſt, als ihn zu konſtruiren, um alle ſynthetiſchen Sätze, die von ihm ſtatt finden, auszumitteln, und ſo alle ſeine Arten und Eigenſchaften beſtimmen.

§. 18.

Bei der Bearbeitung und dem Vortrage der Mathematik kann man auf zweierlei Art verfahren. Entweder man geht von den erſten Gründen, von dem was ausgemacht gewiß iſt, aus, auf neue Wahrheiten fort, welche aus den vorigen folgen, und ſo geht man immer weiter, bis man auf etwas Unbekanntes oder bisher Unbewieſenes kömmt, welches man finden oder beweiſen wollte, und nennt dies Verfahren Syntheſis (ſynthetiſche Methode); oder man geht von dem Unbekannten oder Unbewieſenen aus und auf die Gründe zurück, woraus es folgen müßte, bis man auf einen anerkannten oder ausgemachten Grund oder Ungrund kömmt, und nennt dies die Analyſis (analytiſche Methode).

§. 19.

Durch den Gebrauch der analytiſchen Methode behandelt man das Unbekannte ſo, als ob es ſchon bekannt wäre, und unterſucht, wie es zu finden ſei, und ob das Erwieſene auf wahren und zulänglichen Gründen beruhe.

Die Erfinder dieſer Methode ſind die Alten. Plato ſoll ſie zuerſt in der Geometrie gebraucht haben. In neuern Zeiten iſt ſie vervollkommnet und erweitert worden, indem man die Größen allgemein durch Buchſtaben bezeichnete und ſie arithmetiſch behandelte. Die geometriſche Analyſis der Alten iſt durch die neuere algebraiſche Analyſis faſt zu ſehr verdrängt worden.

§. 20.

So wie man eine ganze Wiſſenſchaft der Mathematik bald nach der ſynthetiſchen, bald nach der analytiſchen Methode behandeln kann, ſo hat man auch zweierlei Beweisarten angenommen, die in den verſchiedenen Methoden oder Lehrarten ihren Grund haben. Sind nämlich die Schlüſſe eines Beweiſes ſo mit einander verbunden, daß immer der folgende den Grund des vorhergehenden enthält, ſo iſt die Beweisart analytiſch; enthält aber der vorhergehende den Grund des folgenden, ſo iſt es die ſynthetiſche Beweisart. Die ſynthetiſche Beweisart kommt in der Elementar-Geometrie, die analytiſche aber in der Algebra oder Analyſis vor.

§. 21.

Alle Größen- folglich auch alle Zahlenbeſtimmungen in der Mathematik beruhen auf Gleichungen (Aequationen). Eine Gleichung aber heißt die Darſtellung ebenderſelben Größe, entweder durch zwei identiſche (einerlei) oder zwei verſchiedene Begriffe. So ſind die Ausdrücke z. B. zwei iſt gleich zwei, oder $2 = 2$; 12 mal 13 iſt 200 weniger 44, oder

$12.\ 13 = 200 - 44$ Gleichungen, wovon die erſte durch zwei identiſche, und die zweite durch zwei verſchiedene Begriffe ausgedrückt iſt. Die Gleichungen erhalten ihren Namen von den verſchiedenen Graden, in denen ſich die unbekannte Größe (die man ſucht) befindet. Alle Zahlen ſtehen für ſich im erſten Grade; alle Multipla einer Zahl mit ſich ſelbſt im zweiten; alle Multipla des zweiten Grades mit der urſprünglichen Zahl aber im dritten Grade u. ſ. f. Die geſuchte Zahl in einer Gleichung durch lauter bekannte (gegebene) beſtimmen, heißt die Gleichung auflöſen.

§. 22.

Man theilt die Arithmetik in die gemeine und höhere ein; die gemeine lehrt die Auflöſung der Gleichungen von der leichtern Art durch Zahlzeichen; die höhere hingegen unterſucht die Natur und Auflöſung aller möglichen Gleichungen in ihrer größten Allgemeinheit durch allgemeinere Zeichen, nämlich durch Buchſtaben und enthält die Algebra und die Infiniteſimalrechnung.

Ungeachtet man auch die gemeinen Rechnungsformen durch Buchſtaben ausdrücken, und mit dieſen die gemeinen Rechnungsoperationen vornehmen kann, ſo iſt dies dennoch keine Algebra, ſondern Buchſtabenrechnung, die nur einen Theil der allgemeinen Arithmetik ausmacht.

§. 23.

Auch die Geometrie wird in die gemeine und höhere eingetheilt. Die gemeine oder Elementargeometrie ſchränkt ſich nämlich unter den Linien bloß auf die gerade und die Kreislinie ein, und unter den Flächen und Körpern bloß auf diejenigen, die ſich durch gerade und Kreislinien konſtruiren laſſen. Für die höhere Geometrie gehören demnach alle übrigen krummen Linien, Flächen und Körper.

§. 24.

Sucht man aus ſolchen drei gegebenen Stücken eines Dreiecks, die daſſelbe völlig beſtimmen, die übrigen Stücke durch Rechnung, ſo hat man die Trigonometrie. Auch dieſe Wiſſenſchaft hat ihren gemeinen und höhern Theil.

Zu der gemeinen Trigonometrie gehört alles, was ſich durch gemeine Arithmetik und Elementargeometrie herleiten läßt, zum höhern Theile aber alles übrige.

Anmerkung.

Eine ähnliche Bewandniß hat es auch mit allen Theilen der angewandten Mathematik.

§. 25.

Durch die verſchiedenen Lehrarten werden die Gränzen der gemeinen und höhern Mathematik überhaupt genauer (wie oben §. 11.) beſtimmt.

Den Theil der reinen Mathematik, den man vermittelſt der analytiſchen Methode behandelt, und der die allgemeinen Grundſätze der mathematiſchen Erfindungskunſt enthält, nennt man überhaupt die Analyſis und beſteht in der höhern Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. Die Analyſis enthält ebenfalls zwei Haupttheile, nämlich die Analyſis des Endlichen und die Analyſis des Unendlichen, wofür man aber ſchicklicher gemeine und höhere Analyſis ſetzen könnte. Zur gemeinen Analyſis gehört die Algebra und dasjenige von der höhern Geometrie und Trigonometrie, was aus der Algebra hergeleitet wird; zur höhern Analyſis aber die Infiniteſimalrechnung nebſt allem aus der höhern Geometrie und Trigonometrie, was durch Hülfe derſelben gefunden wird.

§. 26.

Beide Methoden, ſowohl die ſynthetiſche, als auch die analytiſche, verſchaffen eine vortrefliche Uebung des Verſtandes, und dieſe, nämlich die Schärfung unſerer edelſten Seelenkräfte iſt ein Hauptvortheil, den die Mathematik gewähret. Die Mathematik iſt jeder kultivirten Nation nothwendig und achtungswerth geworden, weil ihr Einfluß auf die Befriedigung unſerer wichtigſten Bedürfniſſe und auf die Annehmlichkeit und Bequemlichkeit des menſchlichen Lebens unverkennbar iſt.

§. 27.

Was den Nutzen der Mathematik für Forſtbediente insbeſondere betrift, ſo lehrt die Erfahrung, daß ein Förſter ohne gründliche Kenntniß der Arithmetik, ohne Anfangsgründe der Geometrie, und ohne einige Kenntniſſe der praktiſchen Maſchinenlehre, und der Civilbaukunſt, ſeinem Poſten weder gehörig vorſtehen, vielweniger das Intereſſe des Staates, dem er dient, gehörig befördern kann.

Da nun heut zu Tage die Forſtwirthſchaft zu den ſtaatswirthſchaftlichen Zweigen gehört, die eine beſondere Aufmerkſamkeit erfordern, ſo iſt es den Forſtbedienten um ſo mehr Pflicht, ſich mit den Kenntniſſen bekannt zu machen, welche entweder unmittelbar oder mittelbar dieſen Zweig der Staatswirthſchaft nicht nur erhalten, ſondern auch verbeſſern und erhöhen helfen.

Die Menge aller forſtwiſſenſchaftlichen Kenntniſſe ſo wohl als die der mathematiſchen, die ein Förſter haben muß, läßt ſich im allgemeinen nicht beſtimmen; indeß iſt ſo viel gewiß, daß je höher der Poſten iſt, den ein Förſter bekleidet, deſto größer ſind ſeine Pflichten, folglich deſtomehr muß er Haupt- und Hülfskenntniſſe beſitzen.

Wer ſich der Forſtwirthſchaft widmet, hat immer den Vorſatz, ſich von den niedern Stufen des Dienſtes auf

die höhern hinaufzuarbeiten, und daher muß der angehende Förſter ſeinen Plan bei Erlernung der nöthigen Kenntniſſe ſo entwerfen und ausführen, daß es ihm bei vorkommender Gelegenheit, einen wichtigern Poſten zu erhalten, nicht an Kenntniſſen fehle. Demjenigen, der von Jugend auf eine fürs Forſtweſen ſchickliche, wiſſenſchaftliche Bildung erhält, wird es nicht an Gelegenheit mangeln, ſich auch die dazu gehörigen mathematiſchen Hülfskenntniſſe zu erwerben; wer aber entweder ganz unvorbereitet oder wenigſtens nicht vollkommen dazu geſchickt in die Forſtwirthſchaft kommt, muß ſich nach ſeinen Kräften bemühen, das nachzuholen, was ihm an einer zweckmäßigen Bildung mangelt.

§. 28.

Ob es gleich nicht abſolut nothwendig iſt, daß jeder, der ſich dem Forſtweſen widmet, vollſtändige Kenntniſſe der theoretiſchen und praktiſchen Mathematik beſitze, ſo iſt es denn doch der Natur der Sache angemeſſen, die Anfangsgründe der reinen Mathematik zu kennen und einige Kenntniſſe ſolcher Theile der angewandten Mathematik zu wiſſen, ohne welche keine gute Forſtwirthſchaft beſtehen kann. Größtentheils erfordern die Geſchäfte eines Förſters nur praktiſch-mathematiſche Kenntniſſe; da aber keine brauchbare Praktik ohne Theorie möglich iſt, ſo ſetzt jene die Elemente dieſer voraus. Um die Wahl derjenigen mathematiſchen Kenntniſſe dem Förſter zu erleichtern, die er als Hülfskenntniſſe mit den Hauptkenntniſſen ſeines Faches verbinden muß, theile ich hier folgende Anzeige der erforderlichen praktiſchen Kenntniſſe aus der Mathematik mit, ſo wie ſie der Königl. Preuß. Geh. Rath und Oberforſtmeiſter der Churmark-Brandenburg, F. A. L. von Burgsdorf (in ſ. Forſthandbuche; zweite Auflage, Berlin 1790 in der Einleitung S. 22. §. 19.) angiebt, um nicht den Vorwurf zu erregen, daß der im Forſtweſen nicht wirklich arbei-

tende Schriftſteller mehr verlange, als irgend ein Förſter in der Ausübung anwenden könne.

Jedes dem Forſtweſen ſich widmende oder ſchon in demſelben arbeitende Subjekt muß folgende mathematiſche Kenntniſſe entweder wirklich beſitzen, oder ſich zu erwerben ſuchen:

1) Kenntniſſe im Rechnen. Da das Rechnen ſchon zu den Geſchäften im gemeinen Leben nothwendig, um ſo mehr begreift man, daß es im Forſtdienſte unentbehrlich iſt, indem ausgemacht die Forſtwirthſchaft ohne eine gut angelegte Rechnung oder ein nach Grundſätzen eingerichtetes Rechnungsweſen unmöglich beſtehen kann, und jeder Förſter, in welchem Verhältniſſe er auch immer mit dem Ganzen ſtehen mag, irgend eine Art Rechnung über einen größern oder kleinern Theil der Forſtausgaben oder Einkünfte führen muß. Und geſetzt, man könnte auch durch Hülfe der Rechenkunſt des gemeinen Lebens mit dem Forſtrechnungsweſen, in ſofern es Einnahme und Ausgabe betrift, fertig werden, ſo wird man doch ſeine Rechnungskenntniſſe ſobald über die gemeinen erhöhen müſſen, als man nöthig hat, Rechenkunſt auf Geometrie und andere Theile der Mathematik anzuwenden. Da nun dies der Fall bei jeder nur mäßigen Forſtbedienung iſt, ſo iſt es keinem Zweifel unterworfen, daß der Förſter ſeine Aufmerkſamkeit auf die Erlernung gründlicher Kenntniſſe der Rechenkunſt wenden müſſe; und da keine gründlichen Einſichten in dieſer Kenntniß ohne Beihülfe der Mathematik möglich ſind, und gründliche Arithmetik ſchon ſelbſt ein Theil dieſer Wiſſenſchaft iſt; ſo gehört die Arithmetik zu den einem Förſter nöthigen Hülfskenntniſſen aus der Mathematik.

2) Kenntniſſe der praktiſchen Geometrie. Unter den gewöhnlichen Umſtänden und bei gut eingerichteten

Forſten

Forſten wird zwar von einem Förſter nicht die geſammte Kenntniß der praktiſchen Geometrie erfordert, weil die Vermeſſung, Berechnung, Zeichnung und Eintheilung ganzer Forſten eine Sache iſt, die in jedem wohlregierten Lande nur anfänglich bei der Einführung der auf gründliche Kenntniß eingerichteten Forſtwirthſchaft nöthig war, und in den meiſten Forſten auch jetzt noch von eigen dazu beſtimmten Forſtvermeſſern vorgenommen wird; demungeachtet kommen immer noch Arbeiten vor, wozu geometriſche Kenntniſſe unentbehrlich ſind. Selbſt dem eigentlichen Forſtvermeſſer oder den Feldmeſſern, die bei manchen Kammern neben ihrer Hauptfunktion auch zu den Vermeſſungsgeſchäften der Forſten angewieſen werden, kann es nicht gleichgültig ſeyn, die praktiſchen Kenntniſſe der Geometrie ſo angewandt zu finden, wie ſie bei Forſtvermeſſungen wirklich vorkommen. Um aber den Förſter auf die Nothwendigkeit praktiſchgeometriſcher Kenntniſſe aufmerkſam zu machen, ſo werden hier diejenigen Arbeiten namhaft gemacht, die ſeine Beſtimmung faſt täglich darbietet, und dieſe beſtehen darin:

a) Schläge oder Gehaue, Oerter und Schonungen oder Gehäge regulär und beſtimmt abzuſtecken;

b) den Flächeninhalt eines Stückes zur Anfertigung der nöthigen Kulturkoſten- und Nutzungsanſchläge zu berechnen;

c) den körperlichen Inhalt und den daraus zu beſtimmenden Werth unterſchiedener Holzſortimenter auszumitteln; und

d) überhaupt, wo es auf ein Maß, die Menge und den Werth eines Gegenſtandes der Forſtwirthſchaft ankömmt, in allen Fällen nach ſiche-

ren und unwiderſprechlichen Gründen zu verfahren.

Eine auch nur oberflächliche Ueberſicht dieſer, dem Förſter eigenen Geſchäfte, zeigt, daß ſie ohne gründliche Kenntniſſe aus der Arithmetik und praktiſchen Geometrie nicht unternommen werden können. Da aber gründliche Einſichten und Kenntniſſe der praktiſchen, ohne das Studium der theoretiſchen Geometrie zu erwerben unmöglich ſind, und einzelne Lehren außer dem Zuſammenhange nichts nützen, ſo iſt die Erlernung der Geometrie ein Haupttheil derjenigen Kenntniſſe, welche die Mathematik dem Forſtweſen darbietet. Die ausübende Geometrie aber zählt unter ihre Hülfskenntniſſe die Zeichenkunſt, und da dieſe auch den Förſter in den Stand ſetzt, ſeinen Arbeiten mehr Deutlichkeit zu geben, und überhaupt in forſtwirthſchaftlichen Unternehmungen eine leichtere Ueberſicht gewährt, ſo wird es nicht ohne Vortheil ſeyn, wenn auch wenigſtens etwas Zeichnen mit zu den Kenntniſſen gezählt wird, die einen Förſter zieren und ehren. Demnach wäre die reine Elementarmathematik nach ihrem theoretiſchen und praktiſchen Theile verbunden mit der Zeichenkunſt erſte nothwendige mathematiſche Hülfskenntniß.

3) Kenntniſſe aus der angewandten Mathematik. Die aus der angewandten Mathematik dem Förſter nöthigen Kenntniſſe betreffen die Mechanik, die Civilbaukunſt, die Waſſerbaukunſt und die Sandbaukunſt. Das Mehr oder Weniger dieſer Kenntniſſe ergiebt ſich aus den Gegenſtänden, die der Förſter pflichtmäßig kennen und zu bearbeiten wiſſen muß, ſo wie aus der Stufe des Dienſtes, worauf er ſtehet.

Die Pflichten eines Förſters, die er nur durch Kenntniſſe der Mechanik gehörig erfüllen kann, beſtehen

darin,

darin, daß er die Werkzeuge und Maſchinen, deren man ſich bei den Forſtgeſchäften und Waldhandthierungen überhaupt bedient, nach Theorie und Praktik, nach Vortheilen und Mängeln zu beurtheilen, die Vorurtheile der Arbeiter, die ſo oft zum Schaden der Forſtwirthſchaft befolgt werden, zu beſiegen, und dagegen die beſten und zweckmäßigſten Mittel in Ausübung zu bringen weiß.

Hierzu dienen

a) die erſten Kenntniſſe der ſtatiſchen Wiſſenſchaften, und

b) das dem Zwecke nach Unentbehrliche aus der praktiſchen Maſchinenlehre.

Die gemeinen Hebezeuge und die brauchbarſten Maſchinen erfordern zwar keine weitläuftige und ſchwere Theorien; aber ſie ohne alle theoretiſche Kenntniſſe gebrauchen iſt nichts anders, als nach dem Herkommen verfahren, das oft nur auf Vorurtheil gebaut und ohne Hinſicht auf wahre Vortheile beibehalten wird.

Da der Förſter doch billig die Anwendung der verſchiedenen Holzarten im Civilbaue, ihre zu irgend einer ſolchen Bauunternehmung erforderliche Menge, Eigenſchaften und darnach zu richtende Auswahl, verſtehen ſoll, um den Nachtheil zu verhüten, welcher dem Staate theils dadurch erwächſt, daß Bau- und Werkhölzer oft auf eine ungeſchickte Weiſe in Brennholz verwandelt werden, theils daß das, den Unterthanen frei verabreichte Bau- und Ausbeſſerungsholz unzweckmäßig verwendet, und daß endlich durch Unkunde untaugliches Holz zum Bauen angewieſen wird; ſo folgt von ſelbſt die Pflicht für den Förſter, ſich mit Kenntniſſen der Art bekannt zu machen, die gegen die erwähnten Nachtheile ſichern. Hierzu gehört

die Kenntniß der Civilbaukunſt, wenigſtens nach ihrem praktiſchen Theile.

Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik.

§. 1.

Jedem Gegenſtande, der einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt, legt man eine Größe bei, und verſteht daher unter Größe die Eigenſchaft eines Dinges oder Gegenſtandes, nach welcher es einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. So kann z. B. eine Linie vermehrt und vermindert werden, desgleichen eine Zahl: daher *haben* Linien und Zahlen, Größe, und werden alſo als Größen betrachtet und behandelt. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit andern Gegenſtänden. Demnach nennt man überhaupt dasjenige, was ſich vermehren oder vermindern läßt, und an welchem außer der erwähnten, keine andere Eigenſchaft in Betrachtung kommt, ſelbſt eine Größe.

§. 2.

Man erhält Begriffe von einer Größe entweder durch unmittelbare Betrachtung und Vorſtellung, oder durch Vergleichung mit einer andern bekannten Größe, welches letztere wiederum entweder durch unmittelbare Vergleichung oder durch das unſerer Vernunft eigene Geſchäft, durch Schlüſſe geſchehen kann. So erhält man z. B. die Größe irgend eines Fußes oder ſeine Länge durch unmittelbare Betrachtung; die Größe oder

Länge aber der Entfernung irgend eines Gegenſtandes von einem andern, durch unmittelbare Vergleichung mit der nun ſchon bekannten Länge eines Fußes, das heißt, durch unmittelbare Meſſung; oder man erhält den Begriff von der Länge oder Größe einer Entfernung durch Schlüſſe, die aber eine künſtlichere Operation veranlaſſen.

§. 3.

Durch dieſe Betrachtungen wird man auf den Begriff der Mathematik oder Größenlehre geleitet, welche die Wiſſenſchaft Größen durch Schlüſſe zu finden ausmacht.

§. 4.

Der geſammte Anfang aller Lehren von den Größen, die man ganz allein als Größen, abgeſondert von allen übrigen Eigenſchaften, betrachtet, macht die reine Mathematik aus. So iſt z. B. die Ausmittelung der Größe einer Kugel, deren Durchmeſſer 2 Fuß beträgt, eben ſo ein Gegenſtand der reinen Mathematik, ſo wie die Summirung der Zahlen 5 und 8.

§. 5.

Denkt man ſich eine Größe als eine Menge von Dingen, auf deren Zuſammenhang und Ordnung keine Rückſicht genommen wird, ſo hat man einen Gegenſtand der Arithmetik oder Rechenkunſt. Demnach ſind die Zahlen 4 oder 5 oder 7 ſolche Gegenſtände.

Größen dieſer Art nennt man auch unſtäte oder diskrete Größen; folglich wäre die Arithmetik im allgemeinen Sinne die Wiſſenſchaft der diskreten Größen.

§. 6.

Man kann ſich auch eine Größe als etwas ausgedehntes denken, wobei man auf Zuſammenhang und Ordnung

Ordnung der Theile ſehen muß. Solche Größen nennt man ſtäte Größen und ſie ſind der Gegenſtand der Geometrie; daher iſt auch die Geometrie die Wiſſenſchaft der ſtäten Größen.

Da nun aber die Ausdehnung nur im Raume möglich iſt, und die Stätigkeit der Größen keine andere Eigenſchaft ausdrückt, als ununterbrochen, dem Raume nach fortdauernd, ſo iſt die Geometrie im allgemeinſten Sinne die Wiſſenſchaft des Raums.

§. 7.

Wendet man die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenſtände der Natur und des bürgerlichen Lebens, die entweder als Größen betrachtet werden können, oder wirkliche Größe ſind, an, ſo hat man angewandte Mathematik.

§. 8.

Hiernach wäre die ganze Körperwelt ein Gegenſtand der angewandten Mathematik, und dieſe Wiſſenſchaft würde daher ſo viel Theile erhalten, als es Arten von Gegenſtänden in der Natur giebt, deren Größe ſich beſtimmen läßt. Indeß hat man nur die Hauptarten derſelben ausgehoben, indem ſich die reine Mathematik auf alle anwenden läßt, durch deren Hülfe daher die Größe aller übrigen beſtimmt werden kann.

Dieſe Gegenſtände der Natur, worauf die reine Mathematik hauptſächlich angewendet wird, ſind folgende: die Kräfte der Körper, das Licht und die Himmelskörper oder das Weltgebäude. Daraus ſind alſo drei Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik, nämlich Dynamik, Optik und Aſtronomie entſtanden. Jede dieſer Hauptabtheilungen hat mehrere Unterabtheilungen unter eigenen Namen und von nicht geringem Umfange.

§. 9.

Die Dynamik, Optik und Aſtronomie werden auch phyſiſche Mathematik genannt. Da aber auch andere und der Naturlehre im beſondern Sinne eigene Gegenſtände und Lehren eine mathematiſche Behandlung zulaſſen, wie z. B. die Lehre von dem Schalle, vom Feuer, von der Elektricität u. dergl. ſo nennt man dieſe im beſondern Sinne die phyſiſche Mathematik.

§. 10.

Den Theil der angewandten Mathematik, der die reine Mathematik auf die Gegenſtände des bürgerlichen Lebens enthält, nennt man die bürgerliche oder politiſche Mathematik. Da nun bei der Bearbeitung dieſer Gegenſtände bloß mathematiſche Kenntniſſe nicht zureichen, ſondern mit Kenntniſſen aus verſchiedenen mechaniſchen Künſten verbunden werden müſſen, wenn die bearbeiteten Gegenſtände mit der Ausübung harmoniren ſollen, ſo hat man dieſen Theil der Mathematik die techniſche Mathematik genannt. Hierzu gehören die praktiſche Rechenkunſt, die Land- und Feldmeßkunſt, die Markſcheidekunſt, die praktiſche Maſchinenlehre, die architektoniſchen Wiſſenſchaften, die Schiffkunſt.

§. 11.

Jede Wiſſenſchaft der geſammten Mathematik hat zwei Theile, den gemeinen und höhern. Jenen nennt man die Elementarmathematik, dieſen die höhere Mathematik. Der Unterſchied dieſer beiden Theile ergiebt ſich theils aus dem Umfange und Inhalte, theils aber und zwar beſtimmter aus der Lehrart, die man bei der Behandlung dieſer Wiſſenſchaften anwendet.

§. 12.

§. 12.

Da der letzte Zweck aller Bemühungen unſers Verſtandes darin beſteht, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen mit der wirklichen Beſchaffenheit der Dinge zu erforſchen oder Wahrheit zu finden, ſo muß man ſich bemühen, die Wahrheit zu erkennen. Das ſicherſte Kennzeichen der Wahrheit aber iſt, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen. Jeder Widerſpruch unter denſelben zeigt Irrthum oder Unrichtigkeit. Aus der Vergleichung und Verbindung unſerer Vorſtellungen ſetzen wir Kenntniſſe und Wiſſenſchaften zuſammen.

Den Zuſtand, wenn wir Vorſtellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennt man überhaupt Empfindung. Hieraus begreift man leicht, was die Empfindungskraft ſei. Die Empfindungen ſind äuſſere, wenn ſich die Gegenſtände, welche von uns empfunden werden, außerhalb unſerer Seele befinden; innere hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unſerer Seele vorgehet. Die Kraft Begriffe von Gegenſtänden fortzuſetzen, heißt das Gedächtniß, welches in dem Falle Erinnerungskraft genannt wird, wenn wir erkennen, daß wir den nämlichen Begriff ſchon zu einer andern Zeit gehabt haben. Die Kraft, abweſende Dinge ſich ſo vorzuſtellen, als wenn ſie gegenwärtig wären, wird die Einbildungskraft, und die Kraft Begriffe zu vergleichen und zuſammenzuſetzen, die Beurtheilungskraft genannt. Die letztere Kraft heißt auch der Verſtand oder die Vernunft.

Die vorzüglichſten Wirkungen des menſchlichen Verſtandes ſind: Begriffe, Urtheile oder Sätze und Schlüſſe zu machen. Begriffe oder Ideen entſtehen durch die bloßen Vorſtellungen in unſerer Seele; Urtheile oder Sätze aber, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und endlich Schlüſſe, wenn wir aus zwei oder mehrern Sätzen einen dritten herleiten. Man

nennt daher auch das Vermögen der Begriffe, Verſtand; das Vermögen der Urtheile oder Sätze, die Urtheilskraft; das Vermögen der Schlüſſe aber, die Vernunft.

§ 13.

Dieſe Wirkungen unſers Verſtandes müſſen ſich bei der Erlernung aller Kenntniſſe, vorzüglich aber beim Studium der mathematiſchen Wiſſenſchaften äußern. Um in der Mathematik ſicher zur Erkenntniß der Wahrheit zu gelangen, beobachtet man folgenden Gang oder folgende Lehrart (Methode):

Man ſchickt Erklärungen voraus, in welchen man theils die Bedeutung der Wörter, theils die Kenntniß des Gegenſtandes beſtimmt. Eine Erklärung (Definition) muß den zu erklärenden Gegenſtand ſo beſtimmen, daß ein jeder ihn unter dem gegebenen Begriffe denkt. Der Begriff vom Gegenſtande ſelbſt muß theils ausführlich ſein, d. i. er muß die weſentlichen Merkmale des Gegenſtandes völlig enthalten; theils genau, d. i. er muß nicht zu viele Merkmale enthalten, ſondern zwiſchen ſeinen wahren Gränzen ſein; theils urſprünglich, d. i. die Beſtimmung des Begriffs muß nicht erſt einer Ableitung (Deduktion) bedürfen, ſondern ſchlechthin (abſolut) geſetzt werden. Z. B. der Kreis iſt eine ebene Figur, umgränzt von einer Linie, die von einem Punkte innerhalb der Figur (Mittelpunkt) gleichweit abſteht.

Betrift die Erklärung bloß die Feſtſtellung der Wörter, ſo heißt ſie eine Worterklärung (Nominaldefinition); betrift ſie aber die Beſtimmung einer Sache, ſo wird ſie Sacherklärung (Realdefinition) genannt. Zeigt die Erklärung zugleich die Möglichkeit oder die Entſtehung einer Sache, ſo heißt ſie eine genetiſche Erklärung. Von den letztern beiden Erklärungen kann man auch die erſte eine theoretiſche, die andere aber

eine

eine praktiſche Erklärung nennen. So wäre die vom Kreiſe gegebene eine theoretiſche, dieſe aber: Ein Kreis entſteht, wenn eine gerade Linie auf einer Ebene um einen feſten Punkt ſich ſo bewegt, daß die Stelle des Anfangs zugleich die Stelle des Endes der Bewegung wird, eine praktiſche Erklärung. In der Elementargeometrie kann man beide Arten der Erklärung anwenden. Da die praktiſche aber ſchon den der reinen Geometrie fremden Begriff der Bewegung enthält, und da überdies die genetiſchen Erklärungen ſich nur bei den krummlinigen Figuren anbringen laſſen, indem die geradlinigen auf mehr als eine Art beſchrieben (gezeichnet) werden können, ſo zieht man, der Einheit der Lehrart wegen, die theoretiſchen den praktiſchen Erklärungen vor.

Die Bedeutung gewiſſer Zeichen und gewiſſe Annahmen ohne nothwendige Gründe, beſtimmt man ebenfalls im voraus in willkürlichen Sätzen.

§. 14.

Nach den Erklärungen folgen die Sätze. Ein Satz (Propoſition) heißt die Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen zwei Erkenntniſſen. Diejenige Erkenntniß, von welcher die andere bejaht oder verneint wird, heißt das Subjekt, und die bejahende oder verneinende das Prädikat. Jedes von dieſen iſt entweder ein bloßer Begriff, oder es kann ſelbſt ein Satz ſein. So enthält der Satz: Ein Kreis iſt rund, zwei Begriffe, wovon der Begriff Kreis das Subjekt, der Begriff rund aber, das Prädikat iſt. Bedingungsſätze (hypothetiſche Sätze) enthalten in dem Satze, der das Subjekt vorſtellt, die Bedingung (Annahme, Vorausſetzung, Hypotheſis); in dem Satze aber, der das Prädikat ausdrückt, die Folge (Theſis). Z. B. der Kreis iſt einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie ſo groß iſt, wie die Peripherie des Kreiſes, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer gleicht.

Anmerkung.

Eine Erklärung enthält allemal einen allgemeinen Satz, der auch umgekehrt allgemein gültig iſt; z. B. ein Dreieck iſt eine dreiſeitige Figur. Umgekehrt: Eine von drei Seiten völlig begränzte Figur iſt ein Dreieck. Ein allgemeiner Satz hingegen, der keine Erklärung iſt, z. B. alle Menſchen ſind ſterblich, läßt ſich zwar allemal partikulär umkehren — einige Sterbliche ſind Menſchen — aber nicht immer allgemein — alle Sterbliche ſind Menſchen —, ſondern wenn das letztere ſtatt finden ſoll, muß es erſt bewieſen werden.

§. 15.

Ein Satz heißt analytiſch, wenn das Prädikat ſchon im Begriffe des Subjekts enthalten iſt: z. B. jeder Körper iſt ausgedehnt; ſynthetiſch, wenn jenes nicht in dieſem enthalten iſt: z. B. 3 und 4 iſt gleich 7.

Beruht die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte auf Wahrnehmung: ſo heißt der Satz empiriſch z. B. ein Stein iſt ſchwer. Ein ſolcher Satz heißt auch ein Satz a poſteriori. Läßt ſich hingegen dieſe Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte unabhängig von aller Wahrnehmung einſehen: ſo heißt er ein reiner Satz, oder ein Satz a priori z. B. ein Dreieck iſt eine Figur. Da nun die Wahrnehmung bloß lehrt, daß etwas ſo und nicht anders iſt, nicht aber, daß es ſchlechterdings ſo ſein müſſe: ſo führen empiriſche Sätze, oder Sätze a poſteriori niemals abſolute Nothwendigkeit und ſtrenge Allgemeinheit mit ſich, ſondern dieſe iſt bloß den Sätzen a priori eigen.

Alle Sätze der reinen Mathematik ſind ſynthetiſche Sätze a priori. Jeder Satz heißt theoretiſch, wenn er bloß beſtimmt, daß etwas ſo und ſo iſt — oder nicht, z. B. in jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten Winkeln gleich; praktiſch hingegen, wenn

er

er beſtimmt, daß und wie es möglich ſei, z. B. eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Ein ſynthetiſcher Satz, deſſen Richtigkeit oder Möglichkeit unmittelbar einleuchtend und gewiß iſt, ohne daß ſie bewieſen werden darf, heißt, wenn er theoretiſch iſt, ein Grundſatz (Axiom), z. B. von einem Punkte zum andern iſt nur eine gerade Linie möglich — und wenn er praktiſch iſt, ein Forderungsſatz (Poſtulat), z. B. von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

Iſt dagegen die Richtigkeit oder Möglichkeit eines Satzes nicht unmittelbar einleuchtend, ſo heißt er, wenn er theoretiſch iſt, ein Lehrſatz (Theorem), z. B. an jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten gleich — und wenn er praktiſch iſt, eine Aufgabe (Problem) z. B. aus einem Winkel und zwei anliegenden Seiten ein Dreieck zu zeichnen. Jede Aufgabe ſetzt gewiſſe *Regeln* voraus, durch deren Anwendung das, was ſie enthält, möglich wird. Die Beſtimmung dieſer Regeln und die Art der Anwendung um das zu Stande zu bringen, was die Aufgabe fordert, heißt ihre Auflöſung (Solution). Die zur Auflöſung nöthigen Stücke werden die Data genannt, und die Zuſammenſetzung der Theile des Begriffs zu einem Ganzen, heißt die Konſtruktion.

Sätze, die aus den vorhin genannten entweder unmittelbar gefolgert, oder durch einen leichten Schluß daraus hergeleitet werden, nennt man Zuſätze (Corollaria, Folgerungen).

Anmerkungen (Scholien) enthalten nichts weſentliches oder zum Syſtem nothwendig gehöriges, ſondern ſpecielle Erläuterungen und Anwendungen, ſo wie auch hiſtoriſche, litterariſche und artiſtiſche Nachrichten.

Lehr-

Lehrſätze oder Aufgaben, die nicht in die Wiſſenſchaft weſentlich gehören, aber doch mit Nutzen angewandt werden können, werden Lehnſätze (Lemmata) genannt.

In der angewandten Mathematik treten oft an die Stelle der Grundſätze Erfahrungen, Beobachtungen und Verſuche. Auch ſetzt man in dieſem Theile der Mathematik oft voraus, daß es ſich mit einer Erſcheinung ſo und ſo verhalte, und überzeugt ſich nachher durch die Uebereinſtimmung der Folge mit der Vorausſetzung von der Richtigkeit oder Wahrſcheinlichkeit der Hypotheſe; vorzüglich iſt dies der Fall in der Aſtronomie.

§. 16.

Ein mathematiſcher Beweis (Demonſtration) iſt die ſinnliche (intuitive) Darſtellung der nothwendigen Verknüpfung zwiſchen dem Subjekte und Prädikate. Oft kann man einen Satz durch einen einzigen Schluß beweiſen; in andern Fällen wird dazu auch wohl eine ganze Reihe erfordert. Wenniggeübten machen zuſammengeſetzte Beweiſe die meiſten Schwierigkeiten. Um einen Satz zu beweiſen, muß man Schritt vor Schritt gehen, jeden einzelnen Satz, woraus die ganze Schlußkette beſteht, als wahr erkennen, auch muß man den Zuſammenhang aller deutlich einſehen, und den Einfluß auf den Schlußſatz gleichſam fühlen können. Iſt der Beweis ſo beſchaffen, daß ſich das Gegentheil von dem bewieſenen Satze unmöglich denken läßt, ſo wird er apodiktiſch oder eine Demonſtration genannt, von welcher Beſchaffenheit alle mathematiſchen Beweiſe ſein müſſen.

Iſt der Beweis aus Erklärungen und allgemeinen Begriffen zuſammengeſetzt, ſo heißt er ein Beweis a priori; nimmt man hingegen die Erfahrung zu Hülfe, ſo beweiſet man a poſteriori. So iſt z. B. der Beweis des Satzes: Alle rechte Winkel ſind einander gleich, ein Beweis a priori; der vom Daſein Gottes aus der Ordnung

Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, ein Beweis a poſteriori. Die Beweiſe ſind entweder direkte oder indirekte Beweiſe. Ein direkter Beweis zeigt die Richtigkeit des Satzes geradezu; ein indirekter aber die Unmöglichkeit des Gegentheils. Alle direkten Beweiſe werden daher aus Einſicht der Gründe; alle indirekten aber nur aus den falſchen Folgen des Gegentheils geführt. Beide Beweisarten haben in der Mathematik gleiche Würde, und man wählt daher jedesmal die, welche die Wahrheit des Satzes am bequemſten und deutlichſten darſtellt.

Lehrſätze und Aufgaben bedürfen eines Beweiſes. — Grund- und Forderungsſätze aber können vermöge ihrer Einfachheit nicht bewieſen werden.

§. 17.

Der Mathematiker beſtimmt alſo alle Begriffe deutlich und thut nicht nur die Möglichkeit der Sätze dar, ſondern beſtimmt auch die zuſammengeſetzten Sätze aus unleugbaren Grundſätzen. Auch wählt der Mathematiker in ſeiner Wiſſenſchaft gute techniſche Ausdrücke, deren Bedeutung unabänderlich bleibt, und verbindet damit eine kurze Zeichenſprache da, wo es nur angehet.

Hierdurch aber unterſcheidet ſich die mathematiſche Methode noch nicht von jeder andern wiſſenſchaftlichen Lehrart, ſondern dadurch, daß der Mathematiker intuitiv verfährt, d. i. daß er nicht aus Begriffen ſchließt, ſondern ſeine Begriffe konſtruirt; das heißt, ſie in der Anſchauung darſtellt, und zwar in einer nicht empiriſchen, ſondern in einer von aller Erfahrung unabhängigen Anſchauung a priori. Da nun jede Anſchauung eine einzelne Vorſtellung iſt, jeder Begriff aber mehr einzelne Dinge unter ſich begreift: ſo ſtellt ſich der Mathematiker in ſeinen Beweiſen oder Demonſtrationen jedes-

mal

mal das Allgemeine im Einzelnen vor. Aus dieſem Grunde ſind die Erklärungen, Grundſätze, Forderungsſätze und Beweiſe in der Art, wie ſie der Mathematiker hat, der Mathematik ausſchließend eigen.

Da die reine Mathematik von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt, ſo muß ſich der Mathematiker ſeinen Gegenſtand, z. B. Summe, Proportion, Potenz, Kreis, Dreieck, Kugel, Kegel ꝛc. jedesmal erſt durch die Definition ſelber machen, und daher nicht nur die weſentlichen Merkmale, die der Begriff deſſelben enthalten ſoll, ſelbſt wählen, ſondern ihn auch aus demſelben zuſammenſetzen, folglich kann ſeinem Gegenſtande weſentlich niemals mehr oder weniger, ſondern nur gerade ſo viel und das zukommen, was ſein Begriff anzeigt, mithin iſt er ſicher, daß dieſer durch die Erklärung ausführlich genau und urſprünglich beſtimmt, und daher nichts weiter nöthig iſt, als ihn zu konſtruiren, um alle ſynthetiſchen Sätze, die von ihm ſtatt finden, auszumitteln, und ſo alle ſeine Arten und Eigenſchaften beſtimmen.

§. 18.

Bei der Bearbeitung und dem Vortrage der Mathematik kann man auf zweierlei Art verfahren. Entweder man geht von den erſten Gründen, von dem was ausgemacht gewiß iſt, aus, auf neue Wahrheiten fort, welche aus den vorigen folgen, und ſo geht man immer weiter, bis man auf etwas Unbekanntes oder bisher Unbewieſenes kömmt, welches man finden oder beweiſen wollte, und nennt dies Verfahren Syntheſis (ſynthetiſche Methode); oder man geht von dem Unbekannten oder Unbewieſenen aus und auf die Gründe zurück, woraus es folgen müßte, bis man auf einen anerkannten oder ausgemachten Grund oder Ungrund kömmt, und nennt dies die Analyſis (analytiſche Methode).

§. 19.

Durch den Gebrauch der analytiſchen Methode behandelt man das Unbekannte ſo, als ob es ſchon bekannt wäre, und unterſucht, wie es zu finden ſei, und ob das Erwieſene auf wahren und zulänglichen Gründen beruhe.

Die Erfinder dieſer Methode ſind die Alten. Plato ſoll ſie zuerſt in der Geometrie gebraucht haben. In neuern Zeiten iſt ſie vervollkommnet und erweitert worden, indem man die Größen allgemein durch Buchſtaben bezeichnete und ſie arithmetiſch behandelte. Die geometriſche Analyſis der Alten iſt durch die neuere algebraiſche Analyſis faſt zu ſehr verdrängt worden.

§. 20.

So wie man eine ganze Wiſſenſchaft der Mathematik bald nach der ſynthetiſchen, bald nach der analytiſchen Methode behandeln kann, ſo hat man auch zweierlei Beweisarten angenommen, die in den verſchiedenen Methoden oder Lehrarten ihren Grund haben. Sind nämlich die Schlüſſe eines Beweiſes ſo mit einander verbunden, daß immer der folgende den Grund des vorhergehenden enthält, ſo iſt die Beweisart analytiſch; enthält aber der vorhergehende den Grund des folgenden, ſo iſt es die ſynthetiſche Beweisart. Die ſynthetiſche Beweisart kommt in der Elementar-Geometrie, die analytiſche aber in der Algebra oder Analyſis vor.

§. 21.

Alle Größen- folglich auch alle Zahlenbeſtimmungen in der Mathematik beruhen auf Gleichungen (Aequationen). Eine Gleichung aber heißt die Darſtellung ebenderſelben Größe, entweder durch zwei identiſche (einerlei) oder zwei verſchiedene Begriffe. So ſind die Ausdrücke z. B. zwei iſt gleich zwei, oder $2 = 2$; 12 mal 13 iſt 200 weniger 44, oder

12.

12. 12 = 200 — 44 Gleichungen, wovon die erſte durch zwei identiſche, und die zweite durch zwei verſchiedene Begriffe ausgedrückt iſt. Die Gleichungen erhalten ihren Namen von den verſchiedenen Graden, in denen ſich die unbekannte Größe (die man ſucht) befindet. Alle Zahlen ſtehen für ſich im erſten Grade; alle Multipla einer Zahl mit ſich ſelbſt im zweiten; alle Multipla des zweiten Grades mit der urſprünglichen Zahl aber im dritten Grade u. ſ. f. Die geſuchte Zahl in einer Gleichung durch lauter bekannte (gegebene) beſtimmen, heißt die Gleichung auflöſen.

§. 22.

Man theilt die Arithmetik in die gemeine und höhere ein; die gemeine lehrt die Auflöſung der Gleichungen von der leichtern Art durch Zahlzeichen; die höhere hingegen unterſucht die Natur und Auflöſung aller möglichen Gleichungen in ihrer größten Allgemeinheit durch allgemeinere Zeichen, nämlich durch Buchſtaben und enthält die Algebra und die Infiniteſimalrechnung.

Ungeachtet man auch die gemeinen Rechnungsformen durch Buchſtaben ausdrücken, und mit dieſen die gemeinen Rechnungsoperationen vornehmen kann, ſo iſt dies dennoch keine Algebra, ſondern Buchſtabenrechnung, die nur einen Theil der allgemeinen Arithmetik ausmacht.

§. 23.

Auch die Geometrie wird in die gemeine und höhere eingetheilt. Die gemeine oder Elementargeometrie ſchränkt ſich nämlich unter den Linien bloß auf die gerade und die Kreislinie ein, und unter den Flächen und Körpern bloß auf diejenigen, die ſich durch gerade und Kreislinien konſtruiren laſſen. Für die höhere Geometrie gehören demnach alle übrigen krummen Linien, Flächen und Körper.

§. 24.

Sucht man aus ſolchen drei gegebenen Stücken eines Dreiecks, die daſſelbe völlig beſtimmen, die übrigen Stücke durch Rechnung, ſo hat man die Trigonometrie. Auch dieſe Wiſſenſchaft hat ihren gemeinen und höhern Theil.

Zu der gemeinen Trigonometrie gehört alles, was ſich durch gemeine Arithmetik und Elementargeometrie herleiten läßt, zum höhern Theile aber alles übrige.

Anmerkung.

Eine ähnliche Bewandniß hat es auch mit allen Theilen der angewandten Mathematik.

§. 25.

Durch die verſchiedenen Lehrarten werden die Gränzen der gemeinen und höhern Mathematik überhaupt genauer (wie oben §. 11.) beſtimmt.

Den Theil der reinen Mathematik, den man vermittelſt der analytiſchen Methode behandelt, und der die allgemeinen Grundſätze der mathematiſchen Erfindungskunſt enthält, nennt man überhaupt die Analyſis und beſteht in der höhern Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. Die Analyſis enthält ebenfalls zwei Haupttheile, nämlich die Analyſis des Endlichen und die Analyſis des Unendlichen, wofür man aber ſchicklicher gemeine und höhere Analyſis ſetzen könnte. Zur gemeinen Analyſis gehört die Algebra und dasjenige von der höhern Geometrie und Trigonometrie, was aus der Algebra hergeleitet wird; zur höhern Analyſis aber die Infiniteſimalrechnung nebſt allem aus der höhern Geometrie und Trigonometrie, was durch Hülfe derſelben gefunden wird.

§. 26.

Beide Methoden, ſowohl die ſynthetiſche, als auch die analytiſche, verſchaffen eine vortrefliche Uebung des Verſtandes, und dieſe, nämlich die Schärfung unſerer edelſten Seelenkräfte iſt ein Hauptvortheil, den die Mathematik gewähret. Die Mathematik iſt jeder kultivirten Nation nothwendig und achtungswerth geworden, weil ihr Einfluß auf die Befriedigung unſerer wichtigſten Bedürfniſſe und auf die Annehmlichkeit und Bequemlichkeit des menſchlichen Lebens unverkennbar iſt.

§. 27.

Was den Nutzen der Mathematik für Forſtbediente insbeſondere betrift, ſo lehrt die Erfahrung, daß ein Förſter ohne gründliche Kenntniß der Arithmetik, ohne Anfangsgründe der Geometrie, und ohne einige Kenntniſſe der praktiſchen Maſchinenlehre, und der Civilbaukunſt, ſeinem Poſten weder gehörig vorſtehen, vielweniger das Intereſſe des Staates, dem er dient, gehörig befördern kann.

Da nun heut zu Tage die Forſtwirthſchaft zu den ſtaatswirthſchaftlichen Zweigen gehört, die eine beſondere Aufmerkſamkeit erfordern, ſo iſt es den Forſtbedienten um ſo mehr Pflicht, ſich mit den Kenntniſſen bekannt zu machen, welche entweder unmittelbar oder mittelbar dieſen Zweig der Staatswirthſchaft nicht nur erhalten, ſondern auch verbeſſern und erhöhen helfen.

Die Menge aller forſtwiſſenſchaftlichen Kenntniſſe ſo wohl als die der mathematiſchen, die ein Förſter haben muß, läßt ſich im allgemeinen nicht beſtimmen; indeß iſt ſo viel gewiß, daß je höher der Poſten iſt, den ein Förſter bekleidet, deſto größer ſind ſeine Pflichten, folglich deſtomehr muß er Haupt- und Hülfskenntniſſe beſitzen.

Wer ſich der Forſtwirthſchaft widmet, hat immer den Vorſatz, ſich von den niedern Stufen des Dienſtes auf die

die höhern hinaufzuarbeiten, und daher muß der angehende Förſter ſeinen Plan bei Erlernung der nöthigen Kenntniſſe ſo entwerfen und ausführen, daß es ihm bei vorkommender Gelegenheit, einen wichtigern Poſten zu erhalten, nicht an Kenntniſſen fehle. Demjenigen, der von Jugend auf eine fürs Forſtweſen ſchickliche, wiſſenſchaftliche Bildung erhält, wird es nicht an Gelegenheit mangeln, ſich auch die dazu gehörigen mathematiſchen Hülfskenntniſſe zu erwerben; wer aber entweder ganz unvorbereitet oder wenigſtens nicht vollkommen dazu geſchickt in die Forſtwirthſchaft kommt, muß ſich nach ſeinen Kräften bemühen, das nachzuholen, was ihm an einer zweckmäßigen Bildung mangelt.

§. 28.

Ob es gleich nicht abſolut nothwendig iſt, daß jeder, der ſich dem Forſtweſen widmet, vollſtändige Kenntniſſe der theoretiſchen und praktiſchen Mathematik beſitze, ſo iſt es denn doch der Natur der Sache angemeſſen, die Anfangsgründe der reinen Mathematik zu kennen und einige Kenntniſſe ſolcher Theile der angewandten Mathematik zu wiſſen, ohne welche keine gute Forſtwirthſchaft beſtehen kann. Gröſtentheils erfordern die Geſchäfte eines Förſters nur praktiſch-mathematiſche Kenntniſſe; da aber keine brauchbare Praktik ohne Theorie möglich iſt, ſo ſetzt jene die Elemente dieſer voraus. Um die Wahl derjenigen mathematiſchen Kenntniſſe dem Förſter zu erleichtern, die er als Hülfskenntniſſe mit den Hauptkenntniſſen ſeines Faches verbinden muß, theile ich hier folgende Anzeige der erforderlichen praktiſchen Kenntniſſe aus der Mathematik mit, ſo wie ſie der Königl. Preuß. Geh. Rath und Oberforſtmeiſter der Churmark-Brandenburg, F. A. L. von Burgsdorf (in ſ. Forſthandbuche; zweite Auflage, Berlin 1790 in der Einleitung S. 22. §. 19.) angiebt, um nicht den Vorwurf zu erregen, daß der im Forſtweſen nicht wirklich arbei-

tende Schriftſteller mehr verlange, als irgend ein Förſter in der Ausübung anwenden könne.

Jedes dem Forſtweſen ſich widmende oder ſchon in demſelben arbeitende Subjekt muß folgende mathematiſche Kenntniſſe entweder wirklich beſitzen, oder ſich zu erwerben ſuchen:

1) Kenntniſſe im Rechnen. Da das Rechnen ſchon zu den Geſchäften im gemeinen Leben nothwendig, um ſo mehr begreift man, daß es im Forſtdienſte unentbehrlich iſt, indem ausgemacht die Forſtwirthſchaft ohne eine gut angelegte Rechnung oder ein nach Grundſätzen eingerichtetes Rechnungsweſen unmöglich beſtehen kann, und jeder Förſter, in welchem Verhältniſſe er auch immer mit dem Ganzen ſtehen mag, irgend eine Art Rechnung über einen größern oder kleinern Theil der Forſtausgaben oder Einkünfte führen muß. Und geſetzt, man könnte auch durch Hülfe der Rechenkunſt des gemeinen Lebens mit dem Forſtrechnungsweſen, in ſofern es Einnahme und Ausgabe betrift, fertig werden, ſo wird man doch ſeine Rechnungskenntniſſe ſobald über die gemeinen erhöhen müſſen, als man nöthig hat, Rechenkunſt auf Geometrie und andere Theile der Mathematik anzuwenden. Da nun dies der Fall bei jeder nur mäßigen Forſtbedienung iſt, ſo iſt es keinem Zweifel unterworfen, daß der Förſter ſeine Aufmerkſamkeit auf die Erlernung gründlicher Kenntniſſe der Rechenkunſt wenden müſſe; und da keine gründlichen Einſichten in dieſer Kenntniß ohne Beihülfe der Mathematik möglich ſind, und gründliche Arithmetik ſchon ſelbſt ein Theil dieſer Wiſſenſchaft iſt; ſo gehört die Arithmetik zu den einem Förſter nöthigen Hülfskenntniſſen aus der Mathematik.

2) Kenntniſſe der praktiſchen Geometrie. Unter den gewöhnlichen Umſtänden und bei gut eingerichteten

Forſten

Forſten wird zwar von einem Förſter nicht die geſammte Kenntniß der praktiſchen Geometrie erfordert, weil die Vermeſſung, Berechnung, Zeichnung und Eintheilung ganzer Forſten eine Sache iſt, die in jedem wohlregierten Lande nur anfänglich bei der Einführung der auf gründliche Kenntniß eingerichteten Forſtwirthſchaft nöthig war, und in den meiſten Forſten auch jetzt noch von eigen dazu beſtimmten Forſtvermeſſern vorgenommen wird; demungeachtet kommen immer noch Arbeiten vor, wozu geometriſche Kenntniſſe unentbehrlich ſind. Selbſt dem eigentlichen Forſtvermeſſer oder den Feldmeſſern, die bei manchen Kammern neben ihrer Hauptfunktion auch zu den Vermeſſungsgeſchäften der Forſten angewieſen werden, kann es nicht gleichgültig ſeyn, die praktiſchen Kenntniſſe der Geometrie ſo angewandt zu finden, wie ſie bei Forſtvermeſſungen wirklich vorkommen. Um aber den Förſter auf die Nothwendigkeit praktiſchgeometriſcher Kenntniſſe aufmerkſam zu machen, ſo werden hier diejenigen Arbeiten namhaft gemacht, die ſeine Beſtimmung faſt täglich darbietet, und dieſe beſtehen darin:

a) Schläge oder Gehaue, Oerter und Schonungen oder Gehäge regulär und beſtimmt abzuſtecken;

b) den Flächeninhalt eines Stückes zur Anfertigung der nöthigen Kulturkoſten- und Nutzungsanſchläge zu berechnen;

c) den körperlichen Inhalt und den daraus zu beſtimmenden Werth unterſchiedener Holzſortimenter auszumitteln; und

d) überhaupt, wo es auf ein Maß, die Menge und den Werth eines Gegenſtandes der Forſtwirthſchaft ankömmt, in allen Fällen nach ſiche-

ren und unwiderſprechlichen Gründen zu verfahren.

Eine auch nur oberflächliche Ueberſicht dieſer, dem Förſter eigenen Geſchäfte, zeigt, daß ſie ohne gründliche Kenntniſſe aus der Arithmetik und praktiſchen Geometrie nicht unternommen werden können. Da aber gründliche Einſichten und Kenntniſſe der praktiſchen, ohne das Studium der theoretiſchen Geometrie zu erwerben unmöglich ſind, und einzelne Lehren außer dem Zuſammenhange nichts nützen, ſo iſt die Erlernung der Geometrie ein Haupttheil derjenigen Kenntniſſe, welche die Mathematik dem Forſtweſen darbietet. Die ausübende Geometrie aber zählt unter ihre Hülfskenntniſſe die Zeichenkunſt, und da dieſe auch den Förſter in den Stand ſetzt, ſeinen Arbeiten mehr Deutlichkeit zu geben, und überhaupt in forſtwirthſchaftlichen Unternehmungen eine leichtere Ueberſicht gewährt, ſo wird es nicht ohne Vortheil ſeyn, wenn auch wenigſtens etwas Zeichnen mit zu den Kenntniſſen gezählt wird, die einen Förſter zieren und ehren. Demnach wäre die reine Elementarmathematik nach ihrem theoretiſchen und praktiſchen Theile verbunden mit der Zeichenkunſt erſte nothwendige mathematiſche Hülfskenntniß.

3) Kenntniſſe aus der angewandten Mathematik. Die aus der angewandten Mathematik dem Förſter nöthigen Kenntniſſe betreffen die Mechanik, die Civilbaukunſt, die Waſſerbaukunſt und die Sandbaukunſt. Das Mehr oder Weniger dieſer Kenntniſſe ergiebt ſich aus den Gegenſtänden, die der Förſter pflichtmäßig kennen und zu bearbeiten wiſſen muß, ſo wie aus der Stufe des Dienſtes, worauf er ſtehet.

Die Pflichten eines Förſters, die er nur durch Kenntniſſe der Mechanik gehörig erfüllen kann, beſtehen

darin,

darin, daß er die Werkzeuge und Maſchinen, deren man ſich bei den Forſtgeſchäften und Waldhandthierungen überhaupt bedient, nach Theorie und Praktik, nach Vortheilen und Mängeln zu beurtheilen, die Vorurtheile der Arbeiter, die ſo oft zum Schaden der Forſtwirthſchaft befolgt werden, zu beſiegen, und dagegen die beſten und zweckmäßigſten Mittel in Ausübung zu bringen weiß.

Hierzu dienen

a) die erſten Kenntniſſe der ſtatiſchen Wiſſenſchaften, und

b) das dem Zwecke nach Unentbehrliche aus der praktiſchen Maſchinenlehre.

Die gemeinen Hebezeuge und die brauchbarſten Maſchinen erfordern zwar keine weitläuftige und ſchwere Theorien; aber ſie ohne alle theoretiſche Kenntniſſe gebrauchen iſt nichts anders, als nach dem Herkommen verfahren, das oft nur auf Vorurtheil gebaut und ohne Hinſicht auf wahre Vortheile beibehalten wird.

Da der Förſter doch billig die Anwendung der verſchiedenen Holzarten im Civilbaue, ihre zu irgend einer ſolchen Bauunternehmung erforderliche Menge, Eigenſchaften und darnach zu richtende Auswahl, verſtehen ſoll, um den Nachtheil zu verhüten, welcher dem Staate theils dadurch erwächſt, daß Bau- und Werkhölzer oft auf eine ungeſchickte Weiſe in Brennholz verwandelt werden, theils daß das, den Unterthanen frei verabreichte Bau- und Ausbeſſerungsholz unzweckmäßig verwendet, und daß endlich durch Unkunde untaugliches Holz zum Bauen angewieſen wird; ſo folgt von ſelbſt die Pflicht für den Förſter, ſich mit Kenntniſſen der Art bekannt zu machen, die gegen die erwähnten Nachtheile ſichern. Hierzu gehört

die Kenntniß der Civilbaukunſt, wenigſtens nach ihrem praktiſchen Theile.

Hat der Förſter es in dieſem Theile der angewandten oder praktiſchen Mathematik ſoweit gebracht, daß er außer der Kenntniß und Beurtheilung der Art und Menge der Bauhölzer, auch die Conſtruktion der Gebäude kennt, ſo wird er dadurch dem Staate um ſo mehr nützen, daß er im Stande iſt, die Gebäude und Anlagen, welche der Forſthaushalt nöthig macht, ſelbſt zu entwerfen und zu veranſchlagen, und daß er ſie unter ſeiner Aufſicht entweder neu aufbauen, oder die ſchadhaft gewordenen wieder herſtellen laſſen kann.

Die unentbehrlichſten Kenntniſſe des Waſſerbaues oder der Hydrotechnik beziehen ſich auf folgende Geſchäfte des Förſters:

a) Er muß die Mittel ausfündig zu machen ſuchen, wodurch der Gewalt des Waſſers nach Beſchaffenheit der Beuferung am ſicherſten, und in Nothfällen am ſchnellſten vorzubeugen ſei. Hierdurch werden öfters große Koſten und weitläuftige Baue, durch kleine, in Zeiten eingeſehene und gehörig getroffene Anſtalten und Gegenmittel oder durch Berichtserſtattung erſparet; auch werden dadurch nicht ſelten dem Staate beträchtliche Strecken an den Gränzen der Flüſſe, Ströme, Seen ꝛc. erhalten, die forſtmäßig bebaut und benutzt werden können.

b) Er muß die Forſtkultur ſo viel wie möglich auch in moraſtigen oder ſumpfigen Gegenden auszubreiten und auf überſchwemmten Forſtörtern zu gründen ſuchen.

Hierzu dient

die Lehre von den Waſſerableitungen.

Dieſer Theil der Waſſerbaukunſt gründet ſich zunächſt auf die Grundſätze und daraus gefolgerten Lehren der Hydroſtatik und Hydromechanik, und macht einen wichtigen Theil der Hydraulik. Verbindet der Förſter mit den theoreti-

theoretiſchen Kenntniſſen dieſer Wiſſenſchaft nun noch die Revierkenntniß und die der Beſchaffenheit des Grundes und Bodens, ſo kann er auch zugleich dadurch den anzubauenden Holzarten außerordentlich zu Hülfe kommen.

Endlich erfordert die Beſtimmung eines Förſters

die Wiſſenſchaft des Sandbaues. Sie beſtehet in der Kunſt, Sandſchollen in einerlei Lage, unbehindert ihrer Größe und Flüchtigkeit,

a) zu binden oder ſtehend zu machen, um ſie demnächſt

b) in Holzanwuchs zu ſetzen, und

c) andere daran liegende Grundſtücke vor Ueberſchwemmung mit Sand in Sicherheit zu bringen.

Dieſe geſammten hier angezeigten Kenntniſſe gehören bald im geringeren bald im weitern Umfange für das Forſtweſen, und jedes, auf den Namen eines geſchickten und brauchbaren Förſters Anſpruch machende Subjekt muß dieſe Kenntniſſe ſich nach und nach zu eigen zu machen ſuchen.

Der letzte angeführte Zweig der Forſtwirthſchaft, nämlich der Sandbau, iſt bisher noch ganz unbearbeitet geweſen; daher muß man ihn in den gegenwärtigen Zeiten, da faſt in allen Staaten eine gute Forſtwirthſchaft eingeführt wird, nicht überſehen, ſondern ſich richtige Kenntniß davon verſchaffen und aus der Natur der Sache für die Ausübung brauchbare Regeln herleiten. Verbindet man damit zuverläſſige Veranſchlagung der Koſten, und wählt zu einer ſichern Ausführung die kräftigſten und dabei leichteſten und wohlfeilſten Anſtalten, und verliert nie die zum Grunde liegenden mathematiſch-phyſikaliſchen Geſetze aus den Augen, ſo kann der Erfolg nicht anders als gut, und für den Staat ſowohl, als das gemeine Beſte, vortheilhaft ſeyn.

Anmerkung.

Die vorſtehende Einleitung ſoll dazu dienen, den Zuſammenhang der forſtwiſſenſchaftlich=mathematiſchen Kenntniſſe theils mit der geſammten Mathematik, theils mit den eigentlichen Forſtkenntniſſen zu zeigen. Wer von Jugend auf eine wiſſenſchaftliche Bildung erhalten hat, dem wird es nicht ſchwer werden, die Entwickelung der mathematiſchen Kenntniſſe aus ihren erſten Quellen einzuſehen, und den Gang zu faſſen, den der Mathematiker wählt, um mathematiſche Wiſſenſchaften nach ihrem Gehalte und ihrer Würde angemeſſen zu behandeln. Dem, der an ſcharfes Nachdenken nicht gewöhnt worden, wird zwar manches in dieſer Einleitung zu ſchwer und unfaßlich bleiben; allein durch die Bekanntſchaft mit den folgenden arithmetiſchen Lehren und der Geometrie wird ſich das für ihn Dunkele nach und nach aufhellen und das ſchwerfaßliche leicht werden. Kann ſich ein ſolcher auch nicht gleich ſo ganz vollkommen in den Gang des Mathematikers hineindenken, ſo werden anhaltender Fleiß und gehörige Ausdauer doch zuletzt dieſen Gang rechtfertigen, und die Folgen einer nach Theorie geordneten Anwendung werden die Zeit reichlich belohnen, die er der Erlernung dieſer mathematiſchen Kenntniſſe widmet.

Ueber den Nutzen, den die Mathematik oder aus dieſer die gemeinnützigen Kenntniſſe gewähren, kann man folgende Abhandlung nachleſen: Carl Chriſtoph Oettelt's praktiſcher Beweis, daß die Matheſis beim Forſtweſen unentbehrliche Dienſte thue, nebſt Abſchilderung eines geſchickten Förſters. Dritte Auflage. Eiſenach 1786. 8. 174 S. ½ B. Kupfer und 1 B. Tabellen.

Erſter

Erſter Theil

welcher

die Arithmetik

enthält.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I.

Erklärung und Bezeichnung der Zahlen.

§. 1.

Dinge nennt man verſchieden, in ſofern in dem einen etwas iſt, was in dem andern nicht iſt; einerlei aber, ſofern ſie nicht verſchieden ſind. Daher laſſen ſich einerlei Dinge für einander ſetzen (d. i. ſubſtituiren), und umgekehrt: Dinge, die ſich für einander ſetzen laſſen, ſind einerlei. Z. B. vier und drei und eins ſind einerlei, vier und drei aber verſchieden.

§. 2.

Eine Zahl iſt eine Menge von Dingen von einerlei Art; z. B. 4 iſt eine Menge von 1.

§. 3.

Dinge, deren Menge (Anzahl) man ſich denkt oder anzeigt, können zwar in verſchiedener Hinſicht verſchieden ſeyn,

ſeyn, aber in ſofern man ſie in eine Menge zuſammenfaſſen, das iſt zählen will, ſieht man nur auf das, was ſie mit einander gemein haben. Deutſche und Engländer laſſen ſich als Europäer, als Menſchen, als Geſchöpfe oder als Dinge zuſammen zählen, aber nicht als Deutſche und Engländer. So ſind vier Deutſche und drei Engländer zuſammen ſieben Europäer, auch ſieben Menſchen, ſieben Geſchöpfe; aber weder ſieben Deutſche noch ſieben Engländer.

§. 4.

Das Gemeinſchaftliche, was macht, daß Dinge zuſammengezählt werden können, heißt Eins oder die Einheit. Im Beiſpiele §. 3. iſt der Begriff: Europäer, Menſch, Geſchöpf, die Einheit. Man kann daher eine Zahl ſo erklären, daß ſie eine Menge von Einheiten ſei.

§. 5.

Sind die Dinge, die zuſammen gezählt werden ſollen, Ganze, ſo heißt die Zahl, welche ihre Menge ausdrückt, eine ganze Zahl; daher entſteht jede ganze Zahl, wenn man die völlige Einheit mehrere male nimmt. Iſt aber ein Ganzes oder die Einheit in gleiche Theile getheilt, ſo heißt die Zahl, welche entweder einen oder eine Menge dieſer Theile angiebt, eine gebrochene Zahl, oder kurz ein Bruch. Eine ganze Zahl und ein Bruch zuſammen genommen, geben eine gemiſchte Zahl. Iſt von Zahlen nur überhaupt die Rede, ſo verſteht man gewöhnlich ganze Zahlen.

§. 6.

Die Zahlen werden entweder ſo betrachtet, daß man außer der Menge Einheiten, die ſie enthalten, das heißt außer ihrer Größe, auf keine andern Eigenſchaften wie etwa ihren Namen und dergleichen Rückſicht nimmt; oder

man

man ſieht zugleich auf die Art und Beſchaffenheit der Einheiten, die ihre Größe ausmachen. Im erſten Falle heißen ſie ungenannte (abſtrakte); im zweiten Falle aber genannte (concrete) Zahlen. So iſt vier eine ungenannte; vier Thaler aber eine genannte Zahl. Genannte Zahlen heißen dann mehrerleinamig, wenn außer dem größern, noch kleinere Werthe der Zahlen vorkommen. Z. B. 24 Thaler 16 Groſchen 8 Pfennige.

§. 7.

Um Zahlen mit Worten auszudrücken, gebraucht man zunächſt für

die Mengen	·	··	···	:··	::·	:::
die Wörter	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs

:::·	::::	::::·	:::::
Sieben.	Acht.	Neun.	Zehn.

Will man größere Mengen ausdrücken, ſo ſetze man zu zehn wieder eins, zwei, drei, u. ſ. w. und zwar ſo weit hinzu, bis man auf zehn und zehn kommt. Die letztere Zahl, nämlich zehn und zehn oder zweimal zehn, nenne man zwanzig. Zu zwanzig ſetze man wiederum eins, zwei, drei u. ſ. w. hinzu, bis dreimal zehn, und nenne dieſe Zahl dreißig. Bei der Wiederholung dieſes Verfahrens kommt man auf viermal zehn oder vierzig, auf fünfmal zehn oder funfzig u. ſ. w. Zehnmal zehn nenne man hundert; zehnmal hundert aber heiße tauſend. Tauſendmal tauſend wird eine Million; Tauſendmal tauſend Millionen, oder eine Million Millionen eine Billion; eine Million Billionen aber eine Trillion genannt. Fährt man ſo fort, ſo kommt man auf Zahlenbegriffe, die man Quadrillionen u. ſ. w. ausdrückt.

Anmerkung.

Daß wir von eins bis auf zehn zählen iſt willkührlich; eben ſo willkührlich ſind die Wörter, wodurch man die Menge von Einheiten ausdrückt. Dieſe einfache

ſeyn, aber in ſofern man ſie in eine Menge zuſammenfaſſen, das iſt zählen will, ſieht man nur auf das, was ſie mit einander gemein haben. Deutſche und Engländer laſſen ſich als Europäer, als Menſchen, als Geſchöpfe oder als Dinge zuſammen zählen, aber nicht als Deutſche und Engländer. So ſind vier Deutſche und drei Engländer zuſammen ſieben Europäer, auch ſieben Menſchen, ſieben Geſchöpfe; aber weder ſieben Deutſche noch ſieben Engländer.

§. 4.

Das Gemeinſchaftliche, was macht, daß Dinge zuſammengezählt werden können, heißt Eins oder die Einheit. Im Beiſpiele §. 3. iſt der Begriff: Europäer, Menſch, Geſchöpf, die Einheit. Man kann daher eine Zahl ſo erklären, daß ſie eine Menge von Einheiten ſei.

§. 5.

Sind die Dinge, die zuſammen gezählt werden ſollen, Ganze, ſo heißt die Zahl, welche ihre Menge ausdrückt, eine ganze Zahl; daher entſteht jede ganze Zahl, wenn man die völlige Einheit mehrere male nimmt. Iſt aber ein Ganzes oder die Einheit in gleiche Theile getheilt, ſo heißt die Zahl, welche entweder einen oder eine Menge dieſer Theile angiebt, eine gebrochene Zahl, oder kurz ein Bruch. Eine ganze Zahl und ein Bruch zuſammen genommen, geben eine gemiſchte Zahl. Iſt von Zahlen nur überhaupt die Rede, ſo verſteht man gewöhnlich ganze Zahlen.

§. 6.

Die Zahlen werden entweder ſo betrachtet, daß man außer der Menge Einheiten, die ſie enthalten, das heißt außer ihrer Größe, auf keine andern Eigenſchaften wie etwa ihren Namen und dergleichen Rückſicht nimmt; oder man

man ſieht zugleich auf die Art und Beſchaffenheit der Einheiten, die ihre Größe ausmachen. Im erſten Falle heißen ſie *ungenannte* (abſtrakte); im zweiten Falle aber *genannte* (concrete) *Zahlen*. So iſt *vier* eine ungenannte; *vier Thaler* aber eine genannte Zahl. Genannte Zahlen heißen dann *mehrerleinamig*, wenn außer dem größern, noch kleinere Werthe der Zahlen vorkommen. Z. B. 24 Thaler 16 Groſchen 8 Pfennige.

§. 7.

Um Zahlen *mit Worten* auszudrücken, gebraucht man zunächſt für

die *Mengen*	·	··	···	:··	::·	:::
die *Wörter*	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs
:::·	::::	::::·	:::::			
Sieben.	Acht.	Neun.	Zehn.			

Will man größere Mengen ausdrücken, ſo ſetze man zu zehn wieder *eins, zwei, drei*, u. ſ. w. und zwar ſo weit hinzu, bis man auf zehn und zehn kommt. Die letztere Zahl, nämlich zehn und zehn oder zweimal zehn, nenne man *zwanzig*. Zu zwanzig ſetze man wiederum eins, zwei, drei u. ſ. w. hinzu, bis dreimal zehn, und nenne dieſe Zahl *dreißig*. Bei der Wiederholung dieſes Verfahrens kommt man auf viermal zehn oder *vierzig*, auf fünfmal zehn oder *funfzig* u. ſ. w. Zehnmal zehn nenne man *hundert*; zehnmal hundert aber heiße *tauſend*. Tauſendmal tauſend wird eine *Million*; Tauſendmal tauſend Millionen, oder eine Million Millionen eine *Billion*; eine Million Billionen aber eine *Trillion* genannt. Fährt man ſo fort, ſo kommt man auf Zahlenbegriffe, die man *Quadrillionen* u. ſ. w. ausdrückt.

Anmerkung.

Daß wir von *eins bis auf zehn* zählen iſt *willkührlich*; eben ſo willkührlich ſind die Wörter, wodurch man die Menge von Einheiten ausdrückt. Dieſe einfache

fache und ſinnreiche Bezeichnungsart ſetzt uns in den Stand, jede noch ſo große Menge durch wenige Worte, und in vielen Fällen durch ein Wort auszudrücken. Die Art, jede Menge durch Wiederholung der zehn und Hinzuſetzung kleinerer Zahlen auszudrücken, iſt alt und die Urſache davon leicht und ſehr natürlich. Obgleich alle cultivirte Nationen ſo zählen, ſo ſoll es dennoch Völker geben, die nur bis auf drei zählen.

§. 8.

Um Zahlen ſchriftlich auszudrücken, gebraucht man für

die Zahlen	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.
die Zahlzeichen oder Ziffern	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	Sieben.	Acht.	Neun.			
	7.	8.	9.			

So gebraucht, heißen die Zahlzeichen oder Ziffern, einfache. Will man aber größere Zahlen ſchriftlich ausdrücken, ſo ſetzt man mehrere dieſer Ziffern neben einander, und nennt ſie dann zuſammengeſetzte Ziffern. Das Zeichen 0 (Null) heißt im beſondern Sinne Ziffer und hat für ſich keinen Werth, ſondern dient nur, leere Stellen auszufüllen.

II.

Vom Zahlenſyſteme.

§. 9.

Damit man nun im Stande ſei, durch Hülfe dieſer Zeichen oder Ziffern jede gegebene Zahl auszudrücken, ſo hat man jeder Ziffer außer ihrem eigenthümlichen Werthe, den die Figur der Ziffer anzeigt, noch einen beſondern gegeben, der von der Stelle, oder dem Orte herrührt, in welchem ſich eins dieſer Zeichen befindet.

Die

Die beſondern Werthe der Ziffern oder Zahlzeichen werden durch folgendes willkührliche Geſetz beſtimmt:

Man ſchreibt die Zahlzeichen von der rechten gegen die linke Hand zu und läßt jedes in der folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als es bedeuten würde, wenn es die nächſt vorhergehende Stelle einnähme.

§. 10.

Das Zahlzeichen 1 erhält demnach in den verſchiedenen Stellen, folgende Werthe

in der erſten	eins oder eine Einheit	1
zweiten	zehn	10
dritten	hundert	100
vierten	tauſend	1000
fünften	zehntauſend	10000
ſechsten	hunderttauſe	100000
ſiebenten	Million	1000000
achten	zehn Millionen	10000000
neunten	hundert —	100000000
zehnten	tauſend —	1000000000

Die Fortſetzung dieſer Tabelle läßt ſich aus der vorgeſchriebenen nun leicht entwerfen.

Wählte man ſtatt des Zahlzeichens 1, in allen Stellen das Zeichen 2 oder 3 u. ſ. w. ſo würde man im erſten Falle die Zahlenbegriffe zwei, zwanzig, zweihundert u. ſ. w.; im zweiten Falle aber drei, dreißig, dreihundert u. ſ. w. erhalten.

§. 11.

Die Ordnung, nach welcher man von 1 bis 10 zählt, nennt man die Decimalordnung; alle zuſammengeſetzten Zahlen müſſen daher aus einfachen Zahlzeichen beſtehen, die, wenn man das erſte zur rechten Hand ausnimmt, welches immer nur Einheiten ausdrückt, zu

verſchiedenen Decimalordnungen gehören. Die verſchiedenen Decimalordnungen folgen ſo auf einander: da von der rechten Hand zur linken das erſte Zahlzeichen oder das Zahlzeichen in der erſten Stelle, Einheiten ausdrückt, ſo iſt das Zahlzeichen in der zweiten Stelle eine zehnfache Einheit, oder es gehört zur erſten Decimalordnung; das Zahlzeichen in der dritten Stelle gehört demnach zur zweiten Decimalordnung; das in der vierten Stelle zur dritten Decimalordnung u. ſ. w. Alſo überhaupt gehört ein Zahlzeichen, wenn es mit mehrern verbunden wird, zu derjenigen Decimalordnung, welche die Zahl anzeigt, die man erhält, wenn man unterſucht, in der wievielſten Stelle es nach der erſten ſtehet.

Die Zahlen ſo geſchrieben und ſo ausgedrückt, geben das Zahlenſyſtem nach Decimalordnungen, oder das Decimalſyſtem (Dekadik).

§. 12.

Man kann die verſchiedenen Decimalordnungen auch auf folgende Art ausdrücken:

1	zeigt	einfache	Einheiten oder	Einer;
10	—	zehnfache	—	Zehner;
100	—	hundertfache	—	Hunderte;
1000	—	tauſendfache	—	Tauſende;
10000	—	zehntauſendfache	—	Zehntauſende:c.

Demnach enthält die erſte Decimalordnung, die Zehner; die zweite, die Hunderte; die dritte, die Tauſende; die vierte die Zehntauſende u. ſ. w. Mit jedem andern, an die Stelle 1 gewählten Zahlzeichen, hat es eine ähnliche Bewandniß.

Anmerkung 1.

Die Art nach Zehnen zu zählen oder das Decimalſyſtem, iſt keinesweges nothwendig. Es iſt möglich,

lich, aber nicht bequem, alle Zahlen durch zwei Ziffern 1 und 0 auszudrücken. Die Art, mit dieſen zwei Zeichen alle Zahlen zu ſchreiben, würde die Dyadik geben. Das Duodecimalſyſtem (Dodekadik) würde man erhalten, wenn man alle Zahlen durch zwölf Zahlzeichen ausdrückte, wozu noch zwei neue erforderlich wären. Eben ſo gut könnte man von 1 bis auf 4; von 1 bis auf 25 zählen u. ſ. w. Alle dieſe Zahlenſyſteme aber müßten nothwendig unbequemer ausfallen, als unſer bekanntes Decimalſyſtem.

Die Zahlzeichen oder Ziffern, wodurch wir unſere Zahlen ausdrücken, haben wir Europäer im dreizehnten Jahrhunderte von den Arabern erhalten, daher ſie auch arabiſche Ziffern genannt werden. Andere halten ſie für indiſche und noch andere für egyptiſche Buchſtaben.

Anmerkung 2.

Bisweilen braucht man auch die römiſchen Zahlzeichen, die aus den Buchſtaben I, V, X, L und C, beſtehen und ſchreibt damit: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Der Buchſtab L bedeutet funfzig, IↃ fünfhundert, und. cIↃ tauſend. Aus IↃ iſt vermuthlich D, aus cIↃ aber M entſtanden. Es iſt übrigens einleuchtend, daß dieſe Bezeichnung auch nur zu mäßig großen Zahlen unbequem iſt.

§ 15.

Eine mit Ziffern, oder mit Zahlzeichen geſchriebene Zahl zu leſen oder mit Worten auszuſprechen.

Um das Ausſprechen zu erleichtern, bediene man ſich folgender Zeichen und Regeln:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen, durch ein Komma, und gebe jeder derſelben drei Zahlzeichen: in der letzten (dem Werthe nach höchſten) Klaſſe zur Linken können auch weniger als drei Zahlzeichen ſtehen.

2) Ueber das erſte Zahlzeichen in der zweiten, vierten, ſechsten, achten ꝛc. Klaſſe, (oder überhaupt,

über das erſte Zahlzeichen aller geraden Klaſſen, d. i. ſolcher, in welchen die Zahl 2 völlig einmal oder mehreremale enthalten iſt), ſetze man einen Punkt.

3) Ueber das erſte Zahlzeichen der dritten Klaſſe ſetze man einen Strich oder eine römiſche I; über das erſte in der fünften, zwei Striche, oder II; über das erſte in der ſiebenten Klaſſe drei Striche, oder III; über das erſte in der neunten aber vier Striche, oder IV; und ſo fort, über jeder um eins überſprungenen Klaſſe, einen Strich mehr, oder das folgende römiſche Zahlzeichen.

4) Alle Zahlzeichen, die mit einem Punkte bezeichnet ſind, leſe man Tauſend; das Zahlzeichen aber, welches mit einem Striche oder I bezeichnet iſt, leſe man Millionen; das, worüber zwei Striche ſtehen, oder II, Billionen; das, worüber drei Striche ſtehen, oder III, Trillionen; das, über welchem vier Striche ſtehen, oder IV, Quadrillionen u. ſ. w.

5) In jeder Klaſſe drückt man über dies das erſte Zahlzeichen (von der Rechten zur Linken) durch Einer, das zweite durch Zehner, und das dritte durch Hunderte aus.

6) Alle Stellen, die mit Null angefüllt ſind, übergeht man beim Ausſprechen.

Es ſei die Zahl:

. III . II . I .
12, 594, 523, 843, 657, 316, 249, 253. d. i. zwölftauſend, fünfhundert und vier und neunzig Trillionen, fünfhundert und drei und zwanzig tauſend, achthundert und drei und vierzig Billionen, ſechshundert und ſieben und funfzig tauſend dreihundert und ſechszehn Millionen, zweihundert und neun und vierzig Tauſend, zwei Hundert und drei und funfzig.

Eben

Eben ſo:

II . I .
29, 900, 052, 400, 001.

d. i. neun und zwanzig Billionen, neunhunderttauſend und zwei und funfzig Millionen, Vierhunderttauſend und Eins.

§. 14.

Eine durch Worte ausgedrückte Zahl mit Ziffern zu ſchreiben.

Hierbei befolgt man dieſe Regeln:

1) Man bemerkt die Anzahl der Klaſſen oder jede Klaſſe mit einem Komma, und ſetzt eins vom andern ſo weit ab, daß drei Zahlzeichen in jeden Zwiſchenraum geſetzt werden können.

2) In dieſe Zwiſchenräume ſetzt man die Ziffern der durch Worte ausgedrückten Zahl, jede in ihre Klaſſe und Stelle.

3) Bleiben Stellen oder ganze Klaſſen leer, ſo füllt man die leeren Stellen oder Klaſſen mit Null aus.

Es ſei die gegebene Zahl:
Dreizehn Millionen, achthundert und ſiebenzig Tauſend, Vierhundert und Sechſe.

Da hier dreizehn Millionen die höchſte Zahl ſind, ſo erhält man überhaupt nur drei Klaſſen (§. 13.), die hier mit Sternchen bezeichnet ſtehen:

*, *, *

In die dritte Klaſſe (von der Rechten gegen die Linke) ſchreibt man nun 13; in die zweite oder in die Klaſſe der Tauſende aber 870, und in die erſte oder niedrigſte Klaſſe 406.

I .
Demnach erhält man: 13, 87 , 4 6.

I .
oder: 13, 870, 406.

Anmerkung 1.

Beim Ausſprechen findet ſich folgende Irregulärität. Man ſpricht nämlich in jeder Klaſſe die Einer vor den Zehnern aus, da man ſonſt durchgängig die Werthe der Zahlzeichen ſo angiebt, wie ſie auf einander folgen: ſo ſagt man 24, vier und zwanzig, anſtatt: zwanzig und vier. Vermuthlich rührt dieſe Ausnahme noch von den erſten Erfindern unſers Zahlenſyſtems her, welche aller Wahrſcheinlichkeit nach auch die geſchriebenen Zahlen von der Rechten zur Linken geleſen haben, ſo wie jetzt noch die morgenländiſchen Nationen zu ſchreiben und zu leſen gewohnt ſind.

Anmerkung 2.

Mehrere Beiſpiele zur Uebung, um Zahlen zu ſchreiben und zu leſen, hierher zu ſetzen, iſt nach meiner Ueberzeugung unnöthig. Wer ſich das Geſetz merkt, nach welchem die Zahlen geſchrieben und geleſen werden, und mit demſelben die angezeigte Bezeichnungsart verbindet, muß im Stande ſeyn, jede gegebene Zahl zu leſen und zu ſchreiben.

III.

Allgemeine Begriffe vom Rechnen.

§. 15.

Rechnen heißt: Veränderungen mit Zahlen vornehmen, um aus den gegebenen (bekannten) die geſuchten (unbekannten) Zahlen zu finden. Bedient man ſich beim Rechnen der Zahlzeichen, ſo hat man die Zahlenrechenkunſt; braucht man aber Buchſtaben (gewöhnlich das kleine lateiniſche Alphabet): ſo hat man die Buchſtabenrechenkunſt. Jene nennt man die gemeine; dieſe aber die allgemeine Rechenkunſt. Die Buchſtaben vertreten nicht nur die Stellen der Zahlen, ſondern bezeichnen überhaupt Größen.

§. 16.

Die Veränderungen, die mit Zahlen vorgenommen werden können, gründen ſich urſprünglich auf den Begriff der Zahl (§. 2.) in welchem deutlich liegt, daß jede Zahl vermehrt oder vermindert werden kann; demnach wäre die Vermehrung oder Verminderung der Zahlen der Grund aller Zahlenveränderungen. Man vermehrt aber eine Zahl, wenn man ihr eine, oder mehr Einheiten zuſetzt; und vermindert eine Zahl, wenn man von ihr eine oder mehr Einheiten wegnimmt.

§. 17.

Aus dem Begriffe der Veränderungen der Zahlen entſtehen die Rechnungsarten oder Species der Rechenkunſt. Der Natur der Sache gemäß, würde man nur zwei Rechnungsarten haben, nämlich die Addition und die Subtraktion. Man addirt, wenn man eine Zahl um eine oder mehr andere Zahlen vermehrt, und ſubtrahirt, wenn man eine Zahl um eine andere vermindert. Beides geſchieht, wenn man die Einheiten der einen Zahl entweder um ſo viel vermehrt oder vermindert, als die andere Zahl Einheiten enthält. Da ſich aber der Fall oft zuträgt, daß man eine Zahl mehreremale einer andern gegebenen zuſetzen oder eine Zahl von einer andern gegebenen mehreremale wegnehmen ſoll: ſo hat man für dieſe Fälle noch zwei Rechnungsarten eingeführt, nämlich die Multiplikation und die Diviſion. Demnach giebt es vier Rechnungsarten.

§. 18.

Da es ganze Zahlen und Brüche (§. 5.), ungenannte und genannte Zahlen giebt: ſo giebt es auch für jede dieſer Klaſſen von Zahlen, vier Rechnungsarten, nämlich Rech-

nungsarten in ganzen und gebrochenen, in ungenannten und genannten Zahlen. Auch kommen die Veränderungen der Zahlen bald einfach, bald zuſammengeſetzt vor; und aus dieſem Grunde giebt es auch einfache, und zuſammengeſetzte Rechnungsarten.

§. 19.

Einerlei Zahl kann man nicht zugleich vermehren und vermindern, weil die Begriffe Vermehrung und Verminderung einander entgegengeſetzt ſind. Aus dieſem Grunde ſind Addition und Subtraktion, und ſo auch Multiplikation und Diviſion, einander entgegengeſetzt: und umgekehrt.

Anmerkung.

Zahlen und Größen ſind entgegengeſetzt, wenn eine die andere, entweder ganz, oder zum Theile, aufhebt; wie z. B. Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen; Steigen und Fallen.

Umgekehrt, iſt ein Ausdruck, den man der Kürze wegen in der Mathematik eingeführt hat. Im gegenwärtigen Falle (§. 19.) müßte man ſonſt ſagen: Die Subtraktion iſt der Addition, und die Diviſion der Multiplikation entgegengeſetzt.

§. 20.

Wenn Zahlen oder überhaupt Größen mit einander verglichen werden, ſo wird eigentlich unterſucht, ob beide gleich, oder ungleich ſind. Zwei Zahlen oder Größen ſind dann gleich, wenn ſich die eine für die andere ſetzen (ſubſtituiren) läßt; ungleich, wenn dieſes nicht angehet. So ſind ein Paar ungenannte Zahlen gleich, oder gleich groß, wenn ſie einerlei Menge Einheiten enthalten; ungleich, oder ungleich groß, wenn ſie nicht einerlei Menge Einheiten enthalten. Vergleicht man aber genannte Zahlen in Anſehung ihrer Größe mit einander, ſo

ſo muß man nicht allein bei beiden, die Menge ihrer Einheiten, ſondern auch den Werth der Einheiten, unterſuchen. So ſind 4 Thaler und 4 Groſchen als Zahlen betrachtet, zwar gleich, aber nicht als Thaler und Groſchen.

Anmerkung.

Die Werthe der Einheiten machen, bei den Rechnungsarten in genannten Zahlen, eine Hauptunterſuchung aus, und ihrer Verſchiedenheit muß man es daher zuſchreiben, daß Rechnungen mit genannten Zahlen gewöhnlich weitläufiger und verwickelter ſind, als Rechnungen mit ungenannten Zahlen.

§. 21.

Die Arithmetik oder Rechenkunſt beſchäftiget ſich überhaupt mit der Größe in ſo fern, als ſie als ein Ganzes betrachtet werden kann, das aus Theilen beſteht, wovon man wenigere oder mehrere nehmen kann, die aber alle zuſammengenommen für das Ganze geſetzt werden können. Eben ſo muß es auch möglich ſeyn, die Theile einzeln für einander zu ſetzen. So iſt z. B. ein Wald ein Ganzes, der aus Theilen (Bäumen, Revieren, Schlägen) beſteht. Jeder Theil (Baum, Revier oder Schlag von gleicher Größe) kann für den andern genommen, und ſo können alle für das Ganze geſetzt werden.

Die Gleichheit zweier Zahlen, oder überhaupt Größen, drückt man durch das Zeichen (= aequal) anſtatt des Wortes gleich oder gleich groß aus, und ſetzt es zwiſchen beide Zahlen oder Größen; z. B. 4 = 4.

§. 22.

Findet keine Gleichheit ſtatt, oder ſind zwei Zahlen oder Größen ungleich, ſo drückt man dieſe Ungleichheit durch (in = inaequal) aus. So iſt a in = b. Von

zwei ungleichen Zahlen oder Größen iſt allemal eine größer, als die andere. Die erſte nennt man daher auch die größere, die zweite aber die kleinere Zahl oder Größe. In jedem Falle enthält die größere von zwei ungleichen Zahlen oder Größen, die kleinere ganz, und noch etwas mehr; die kleinere aber iſt nur ſo groß, als ein Theil der größern.

Die größere von zwei ungleichen Zahlen oder Größen wird durch das Zeichen (>) ſo bezeichnet, daß ihr die Oeffnung entgegen ſteht; die kleinere erhält zwar das nämliche Zeichen, aber mit zugekehrter Spitze (<). So wird der Ausdruck $7 > 3$ geleſen: 7 iſt größer als 3; und $3 < 7$: 3 iſt kleiner als 7.

Anmerkung.

Dieſe allgemeinen Bemerkungen über die Gleichheit und Ungleichheit der Zahlen oder Größen, ſind im Begriffe der Zahl, und allgemein, im Begriffe der Größe gegründet, (§. 2. und §. 1. Einleitung).

Zweites

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Mathematik.

§. 23.

Jede Zahl, alſo auch jede Größe iſt ſich ſelbſt gleich. So iſt z. B. 4 = 4; der Thaler = dem Thaler. Iſt a das Zeichen irgend einer Größe, ſo läßt ſich der Satz kurz ſo ausdrücken: a = a.

Anmerkung.

Dieſer Satz enthält die Gleichheit ganz allgemein. Mit andern Worten kann er auch ſo ausgedrückt werden: Eine gewiſſe Zahl oder Größe kann nicht zugleich dieſe, und auch eine andere ſeyn; oder: Etwas kann nicht zugleich ſeyn, und nicht ſeyn. Er iſt der Satz des Widerſpruchs der Mathematiker, auf welchen alle Beweiſe der reinen Mathematik, nach der ſynthetiſchen Methode, zurückgeführt werden müſſen, wenn ſie die Gültigkeit einer Demonſtration haben ſollen. Dieſes Verfahren enthält einen Grund der an der Mathematik ſo gerühmten und unbezweifelten Gewißheit.

§. 24.

Das Ganze iſt allen ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich (§. 21).

8 = 6 und 2; oder
1 Thaler = 24 Groſchen.

§. 25.

§. 25.

Das Ganze iſt größer als jeder einzelne Theil; und größer als einige Theile allein genommen.

$$8 > 1;$$
und $8 > 6.$

oder: 1 Thaler > 1 Groſchen, und
1 Thaler > 16 Groſchen.

§. 26.

Wenn zwei Größen einer dritten gleich ſind; ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich.

12 = 8 und 4;
8 und 4 = 10 und 2
――――――――― *)
12 = 10 und 2.

Oder: 1 Ruthe = 10 Fuß;
10 Fuß = 100 Zoll
――――――――― *)
1 Ruthe = 100 Zoll.

Allgemein: $a = b;$
$b = c$
――――― *)
$a = c.$

Anmerkung.

Dieſer Satz enthält einen förmlichen Schluß, oder Sillogism der Vernunftlehre nach der erſten Figur. Der erſte Satz, heißt der Oberſatz; der zweite, der Unterſatz; beide aber die Vorderſätze, oder Prämiſſen; der dritte Satz wird der Schlußſatz oder die Konkluſion genannt. Die Verbindung der Konkluſion mit den Prämiſſen nennt man die Konſequenz.

Zu jedem Vernunftſchluſſe werden alſo drei Stücke erfordert: 1) Der Gegenſtand, welcher verglichen wird; 2) das Merkmal, welches mit dieſem Gegenſtande verglichen wird; 3) das Zwiſchenmerkmal, oder

oder der Mittelbegriff, durch welchen man die richtige Beziehung im Schlußſatze einſieht.

Demnach wäre in dem Schluſſe

$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ b = c \end{array}}{a = c} \text{*)}$$

a der Gegenſtand; c das Merkmal; und b der Mittelbegriff.

*) Im ſchriftlichen Vortrage der mathematiſchen Wiſſenſchaften, pflegt man ſich durch Zeichen ſo kurz wie möglich zu faſſen; daher vertritt die Linie, die Stelle der Wörter: alſo iſt; ſo iſt auch; mithin auch; folglich; ergo. Wörtlich könnte die obige Form ſo ausgedrückt werden: da $a = b$, und $b = c$: ſo iſt auch $a = c$.

§. 27.

Was größer oder kleiner iſt, als eine von zwei gleichen Größen, das iſt auch größer oder kleiner als die andere.

Erſter Fall:
$$\frac{\begin{array}{c} 8 = 6 \text{ und } 2 \\ 12 > 8 \end{array}}{12 > 6 \text{ und } 2.}$$

oder:
$$\frac{\begin{array}{c} 1 \text{ Thaler} = 24 \text{ Groſchen;} \\ 1 \text{ Dukaten} > 1 \text{ Thaler} \end{array}}{1 \text{ Dukaten} > 24 \text{ Groſchen.}}$$

allgemein:
$$\frac{\begin{array}{c} a = b \\ c > a \end{array}}{c > b}$$

Zweiter Fall:
$$\frac{\begin{array}{c} 8 = 6 \text{ und } 2 \\ 5 < 8 \end{array}}{5 < 6 \text{ und } 2.}$$

oder

oder: 1 Dukaten = 3 Thaler.
1 Gulden < 1 Dukaten.

---

1 Gulden < 3 Thaler.

allgemein: $a = b$
$d < a$

$d < b.$

§. 28.

Was größer iſt, als die größere von zwei ungleichen Größen, das iſt um ſo mehr auch größer, als die kleinere.

$8 > 6$
$12 > 8$

$12 > 6$

oder: 1 Thaler > 16 Groſchen;
1 Dukaten > 1 Thaler

---

1 Dukaten > 16 Groſchen.

allgemein: $a > b$
$c > a$

$c > b$

§. 29.

Was kleiner iſt, als die kleinere von zwei ungleichen Größen, das iſt um ſo mehr auch kleiner, als die größere.

$6 < 8$
$4 < 6$

$4 < 8.$

oder: 1 Fuß < 1 Ruthe;
1 Zoll < 1 Fuß

---

1 Zoll < 1 Ruthe.

allge-

allgemein: $\begin{array}{l} a < b \\ \underline{c < a} \\ c < b \end{array}$

Anmerkung.

Die für Groͤßen allgemein durch Woͤrter ausgedrückten Sätze, gelten auch für Zahlen (§. 1. Einl.), wie dies auch die beigeſetzten Beiſpiele zeigen. Da nun der Begriff von Groͤßen auch auf Linien, Flächen und Koͤrper paßt, ſo ſind dieſe Grundſätze nicht nur Grundſätze für die Arithmetik, ſondern auch für die Geometrie, und gelten alſo auch in der geſammten Mathematik. Dieſe Sätze ſind übrigens nicht ſo fremdartig, als ſie auf den erſten Anblick dem Ungeübten ſcheinen moͤgen; jeder vernünftige Menſch braucht ſie in der Anwendung im gemeinen Leben.

Drittes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten ſowohl in ungenannten als auch in genannten und mehrerleinamigen ganzen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Die Addition.

§. 30.

Die Addition lehrt aus gegebenen (bekannten) Zahlen eine andere (unbekannte) finden, die ſo groß iſt, als die gegebenen zuſammengenommen (§. 17.).

Man nennt die gegebenen, die ſummirenden Zahlen; die geſuchte Zahl aber, die Summe (das Aggregat). Die Summe kann daher als das Ganze, und die ſummirenden Zahlen als alle Theile zuſammen genommen, betrachtet werden (§. 21.).

Das Zeichen, wodurch die Addition angedeutet wird, iſt (+), welches durch plus oder mehr ausgeſprochen, und zwiſchen die ſummirenden Zahlen, wenn dieſe in einer fortlaufenden Reihe neben einander geſchrieben werden, geſetzt wird.

So ſind in dem Ausdrucke $6+4=10$, die Zahlen, 6 und 4 die ſummirenden Zahlen, und 10 iſt die Summe.

§. 31.

§. 31.

1) Gleiches zu Gleichen addirt, giebt gleiche Summen.

2) Wenn man dagegen zu ungleichen Größen oder Zahlen, gleiche addirt, ſo werden die Summen ungleich. Die Summe iſt größer, wenn man eben ſo viel zu der größern; hingegen kleiner, wenn man eben ſo viel zu der kleinern addirt.

3) Um ſo mehr iſt die Summe des Größern zum Größern, größer, als die Summe des kleinern zum kleinern.

Zu No. 1.
$$\begin{array}{c} 6 = 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 6+4 = 6+4 \end{array} \qquad \text{allgemein:} \quad \begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ \hline a+b = a+b \end{array}$$

Zu No. 2.
$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ 6 = 6 \\ \hline 10+6 > 8+6 \end{array} \qquad \text{allgemein:} \quad \begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a+c > b+c \end{array}$$

Zu No. 3.
$$\begin{array}{c} 12 > 8 \\ 6 > 2 \\ \hline 12+6 > 8+2 \end{array} \qquad \text{allgemein:} \quad \begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array}$$

§. 32.

Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen, von welchen keine größer als 9 iſt, muß man durchs Zuſammenzählen in Gedanken finden, und durch die ihr zugehörigen Zahlzeichen ausdrücken können (§. 8.).

Anmerkung.

Auf dieſen erſten Forderungsſatz gründet ſich die ganze Ausübung der Addition. Anfangs zählt man Einheit zu Einheit, und bekommt dadurch die Summe. Nach und nach wird man geübter und merkt ſich Summen von größern Zahlen auswendig, bis man endlich im Stande iſt, eine große Anzahl von Zahlen in eine Summe zu bringen.

bringen. Dies Verfahren, beſonders wenn die gegebenen Zahlen nicht aufgeſchrieben werden, nennt man das Rechnen im Kopfe. Wer die Rechenkunſt in Geſchäften nöthig hat, thut wohl, wenn er von Jugend auf ſich gewöhnt, viele und große Summen durchs Rechnen im Köpfe zu finden.

§. 33.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere gegebene ganze Zahlen in eine Summe zu bringen.

Auflöſung.

A. in ungenannten Zahlen.

Die gegebenen Zahlen ſind: 5473 + 1245; desgleichen: 7469 + 364 + 789 + 1678.

Hierbei befolge man dieſe Regeln:

1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen von der Rechten gegen die Linke ſo unter einander, daß die einfachen Zahlzeichen, ſowohl die Einheiten als auch die übrigen, nach ihren Stellen und Ordnungen unter einander zu ſtehen kommen, d. i. man ſetze Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, Tauſende unter Tauſende u. ſ. w. Unter die ſo hingeſchriebenen Zahlen ziehe man einen Strich, und ſchreibe darunter die Summe.

2) Um dieſe Summe zu finden, addire man von der Rechten gegen die Linke zu, alle Einheiten der Zahlzeichen, die in einer Kolumne über einander ſtehen, alſo zu einerley Stelle und Ordnung gehören, und ſetze die Summen dieſer Theile der gegebenen Zahlen, oder dieſe Partialſummen unter den Strich ſo, daß auch die Zahlzeichen derſelben in diejenigen Stellen und Ordnungen zu ſtehen kommen, in welche ſie nach ihrem Werthe gehören.

3) Zu=

3) Zuletzt addire man auf eben die Art die Partialſummen und man erhält daraus die Totalſumme. Um die letztere in einer Zeile zu erhalten, merke man, ob die Zehner der Partialſummen unter 9 oder gerade 9, oder über 9 betragen; in den beiden erſten Fällen ſchreibe man das Zahlzeichen der Totalſumme unter die Einer der Partialſummen; im letzten Falle aber ſetze man nur die Einer unter, und behalte das übrige Zahlzeichen, oder alle, wenn es mehrere ſind, im Sinne, und addire das Zurückbehaltene zu den Zehnern der Partialſummen. So verfährt man auch bey den Zehnern, u. ſ. f. bey allen übrigen Stellen und Ordnungen.

```
5473 } Summirende Zahlen.
1245 }
----
   8 }
  11 } Partialſummen.
 66  }
----
6718 Totalſumme.
```

```
Ferner: 7469
         364
         789
        1678
        ----
          30
         27.
        20..
        8...
       -----
       10300
```

Abgekürzt: Zur Erſparung der Zeit kann man ſo verfahren. Man addirt, wie vorhin, alle Zahlzeichen der ſummirenden Zahlen in der erſten Stelle zur Rechten, und ſetzt, wenn die erhaltene Summe 9 übertrifft, nur die Einer derſelben in die Stelle der Einer in der Summe; was übrig bleibt, wird zur Kolumne der Zehner genom-

 men.

men. Verfährt man in allen Kolumnen der ſummirenden Zahlen auf dieſe Art, ſo erhält man die Totalſumme ſogleich in einer einzigen Zeile.

5473	7469
1245	364
6718	789
	1678
	10300

Die Zahl 6718 des erſten Beiſpiels, die durch das vorgeſchriebene Verfahren erhalten wird, iſt die Summe der gegebenen Zahlen; denn ſie enthält ihre Einer, Zehner, Hunderte und Tauſende, oder ſie iſt durch die Addition aus denſelben nach und nach zuſammengeſetzt worden (§. 21.).

Anmerkung.

Sollte man beim Rechnen ſelbſt das Zuſammenzählen der Einheiten mehrerer Zahlzeichen anfänglich zu ſchwer finden, ſo kann man von den ſummirenden Zahlen, wenn ihrer viele ſind, zwei oder drei nehmen, und ihre Summe ſuchen. Die ſo erhaltene Partialſumme bringt man alsdenn zuletzt in eine Summe. So könnte man mit dem vorigen Beiſpiele: 7469 + 364 + 789 + 1678 verfahren.

7469	789
364	1678
7833 Erſte Partialſumme	2467 zweite Partialſumme.

7833
2467
10300 Totalſumme.

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Man addire 23 Thlr. 7 gr. 6 pf. + 77 Thlr. 14 gr. 9 pf. + 96 Thlr. 4 gr. 8 pf. Wie groß iſt die Summe?

23 Thlr.

23 Thlr.	7 gr.	6 pf.
77 —	14 —	9 —
96 —	4 —	8 —
197 Thlr.	2 gr.	11 pf.

Hier zählt man

a) die Pfennige: 6 und 9 iſt 15, und 8 dazu giebt 23. Nun ſind 23 pf. gleich 1 gr. und 11 pf.; daher ſetzet man die 11 pf. unter die Pfennige, nimmt den 1 gr. zu den folgenden Groſchen, und zählt ferner:

b) 1 und 7 iſt 8, und 8 und 14 iſt 22, und 22 und 4 iſt 26. Da nun 26 Groſchen gleich 1 Thlr. 2 gr. ſind; ſo ſchreibt man die 2 übrigen Groſchen unter die Reihe der Groſchen, und den 1 Thlr. zu den folgenden Thalern, und zählt endlich

c) 1 und 3 iſt 4, und 7 darzu iſt 11 und 6 iſt 17. Von dieſer 17 ſetzt man die 7 unter die Einer, und nimmt die 1 zu den folgenden Zehnfachen und ſagt: 1 und 2 iſt 3, und 7 darzu giebt 10, und 10 und 9 giebt 19. Dieſe ſchreibt man unter die Reihe der Zehnfachen aus; ſo wird die ganze Summe

197 Thlr. 2 gr. 11 pf. ſeyn.

Und dieſe ſind eben ſo viel, als die drei vorigen Poſten zuſammen genommen.

Nun folgen einige Beiſpiele zur Uebung.

Ein Förſter hat bei der Frühlingsförſterei von Holz einzuberechnen 27 Thlr. 12 gr. 6 pf. + 14 Thlr. 19 gr. 8 pf. + 36 Thlr. 20 gr. 7 pf. + 19 Thlr. 8 gr. 4 pf. Was beträgt die ganze Summe?

98 Thlr. 13 gr. 1 pf.

Desgleichen: Ein andrer hat ſeinen Forſt in gewiſſe Diſtrikte eingetheilet und die Stämme nach den unterſchiedenen Holzarten ausgezählet. Nun befinden ſich auf A

 378

378 Stangen, 696 Schaalhölzer, 877 Saulbäume, 596 Bretbäume und 96 Wellbäume. In B ſtehen 68 Schaalhölzer, 167 Saulbäume, 977 Bretbäume und 213 Wellbäume. In C ſind vorhanden: 1726 Stangen, 54 Schaalhölzer, 1627 Saulbäume, 304 Bretbäume, und 226 Wellbäume. Und in D ſind noch 977 Stangen, 455 Schaalhölzer, 687 Saulbäume, 413 Bretbäume und 718 Wellbäume gezählet worden. Was beträgt jede Holzart insbeſondere und wie viel Stämme ſtehen überhaupt auf dieſem Forſte?

3081 Stangen, 1673 Schaalhölzer, 3358 Saulbäume, 2290 Bretbäume, und 1163 Wellbäume, und überhaupt in allen 11565 Stämme.

Ferner: ein Forſtbedienter hat ſein Revier nach und nach mit der Meßkette ummeſſen und gefunden, daß er

a) 242 Ruthen 12 Fuß.
b) 388 Ruthen 10 Fuß.
c 977 Ruthen 8 Fuß.
d) 298 Ruthen 7 Fuß, und endlich
e) 2688 Ruthen 9 Fuß aufgezeichnet. Wenn nun die Ruthe zu 15 Fuß gerechnet wird; wie groß wird der ganze Umfang ſeines Reviers ſeyn?

4596 Ruthen und 1 Fuß.

Ein Holzſchläger hat mit ſeinen Gehülfen bei der Herbſtförſterei an Klaſtern geſchlagen und aufgeſetzt: 27 + 18 + 30 + 12 + 16 + 48 + 28 + 9 Klf. Wie viel Klaſtern betragen dieſe überhaupt in einer Summe, um ſein Schlaglohn dafür fordern zu können?

188 Klaſtern.

Der Oberforſtmeiſter zu M — hat auf Verordnung der Kammer nachſtehendes Bauholz anzuweiſen, als:

1)

1) Für das Kammergut K. 272 Ziegellatten, 88 Saulbäume und 44 Bretbäume.

2) Für das dahin gehörige Vorwerk G. 388 Ziegellatten, 213 Saulbäume und 69 Bretbäume.

3) Für das abgebrannte Dorf W. 277 Saulbäume und 116 Bretbäume.

4) Für das Städtchen U. welches ebenfalls durch Feuer verunglückt, 429 Ziegellatten, 2788 Saulbäume und 827 Bretbäume.

Wenn nun dieſes Holz insgeſammt auf dem Revier zu A ſoll geſchlagen werden; wie viel von jeder Holzart und wie viel Stämme überhaupt, gehen genanntem Forſte ab?

1089 Ziegellatten, 3366 Saulbäume und 1056 Bretbäume, und überhaupt 5511 Stämme.

Endlich: Der Förſter zu X. bekommt an Neujahrsgetreide aus nachfolgenden Orten, als: aus X. 14 Schfl. 2 Viertel und 2 Metzen, aus Y. 14 Schfl. 3 Viertel 1 Metze, aus Z. 8 Schfl. 2 Viertel 1 Metze, aus A. 6 Schfl. 3 Viertel 3 Metzen und aus B. 7 Scheffel 1 Viertel und 2 Metzen. Was beträgt ſein Neuesjahr überhaupt an Getreide?

52 Schfl. 1 Viertel und 1 Metze.

Anmerkung.

Die Aufgaben in genannten und mehrerleinamigen Zahlen, ſetzen die Kenntniß der Eintheilungen derjenigen Dinge voraus, die man berechnet. Da dieſe nun an verſchiedenen Orten verſchieden ſind, ſo muß man ſich dieſelben an Ort und Stelle bekannt machen, oder Tabellen beſitzen, welche die Eintheilungszahlen enthalten. Dieſe Zahlen nennt man auch Reduktionszahlen, und das Verfahren, Zahlen mit Namen von geringerem Werthe auf ſolche zu bringen, die Namen von größern Werthen erhalten, ſo wie auch umgekehrt: Reduktion.

§. 34.

Eine andre Art, aus gegebenen Zahlen größere zu finden, als die gegebenen ſind, beſtehet darin, daß man die gegebenen Zahlen etlichemal zu ſich ſelber zählet, als z. B. drei, 3 mal zu ſich ſelbſt gezählet, giebt 9; vier, 4 mal zu ſich ſelbſt gezählt, giebt 16.

Damit aber dieſe Zahlen nicht ſo vielmal dürfen unter einander geſetzt und zuſammengezählet werden, welches oft ſehr weitläuftig ſeyn würde; ſo hat man durch die Addition eine Tafel erfunden, vermittelſt welcher alle Einheiten, bis auf neunmal zuſammen gezählet, in ihrer Summe können gefunden werden. Dieſe Tafel, welche dem Pythagoras, als Erfinder, zugeeignet wird, heißt daher auch nach ihm Tabula Pythagorica, oder insgemein das Einmal Eins.

§. 35.

Aufgabe.

Das Einmal Eins aufzuſetzen.

Aufloͤſung.

Man ſchreibet

1) die Zahlen nach der Ordnung von eins bis 9 hintereinander in einer Linie hin, und eben ſo auch wieder zur Linken in einer Reihe unterwärts.

2) Man addirt die in der oberſten Reihe auf einander folgenden Zahlen jede insbeſondere zu ſich ſelber, und ſetzt ihre Summen gleich darunter ſo, daß ſie mit der zur Linken ſtehenden 2 wieder in einer Linie zu ſtehen kommen. Man addirt hierauf

3) die oberſten Zahlen zu ihren darunter ſtehenden Summen, und ſchreibt dieſe neuen Summen unter die erſtern ſo, daß ſie mit der zur Seite ſtehenden 3 in einer Linie fortgehen. Und alsdenn addirt man ferner

4)

4) jedesmahl die obenſtehende Zahl zu der letztgefundenen Summe, bis man ſo viel Linien vollgefüllt, als an der Seite herunter Zahlen ſtehen. So hat man, was verlangt iſt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 36.

Der Gebrauch dieſer Tafel iſt folgender: Will man eine Zahl etlichemal zu ihr ſelber zählen, z. B. man wollte 6 ſiebenmal zuſammen nehmen; ſo wird die 6 in der oberſten Reihe der Zahlen geſucht, und die 7 in der Reihe der Zahlen, die zur Linken herunter gehet, oder man nimmt die 7 in der oberſten und die 6 in der zur Linken herunter gehenden Reihe. Geht man nun in den Zwiſchenräumen dieſer beiden Zahlen bis an das Fach, wo ſie beide zuſammen kommen; ſo findet man in demſelben in beiden Fällen die Zahl 42 eingezeichnet. Dieſes zeiget an, daß 6 ſiebenmal oder auch 7 ſechsmal zu ſich ſelber addiret in der Summe 42 giebt. Oder welches einerlei iſt: 6 mal 7 iſt 42, und 7 mal 6 iſt auch 42. Mithin findet man in dieſer Tafel alle Zahlen von 1 bis 9 mit einander vervielfältiget. Und daher macht man ſich dieſelbe vorzüglich zu Nutze.

Zweiter Abſchnitt.

Die Multiplikation.

§. 37.

Die Multiplikation iſt nach §. 17. (verglichen mit §. 32.) eine abgekürzte Addition für den Fall, wenn eine Zahl mehreremale zu ſich ſelbſt addirt werden ſoll, und lehrt aus zwei gegebenen (bekannten) Zahlen eine dritte finden, welche eine von den gegebenen ſo oft enthält, als die andere die Einheit. Man nennt die Zahl, welche man durch die Multiplikation erhält, das Produkt; die eine von den gegebenen Zahlen das Multiplikandum, die andere aber den Multiplikator. Demnach iſt das Multiplikandum im Produkte ſo vielmal enthalten, als der Multiplikator die Einheit enthält.

Auch können das Multiplikandum und der Multiplikator zuſammen, die Faktoren heißen, in welchem Falle alsdenn das Produkt, das Faktum heißt.

Das Zeichen, wodurch die Multiplikation angezeigt wird, iſt ein liegendes Kreuz (×) oder (.). Eins dieſer Zeichen ſetzt man zwiſchen die Faktoren. Z. B. $5 \times 8 = 40$; oder $5 . 8 = 40$ d. i. 5 multiplicirt mit 8. In dieſen Beiſpielen ſind 5 und 8 die Faktoren, und 40 das Faktum. Nennt man nun einen der Faktoren, etwa 8 das Multiplikandum, ſo iſt der andere 5, der Multiplikator, und das Produkt heißt das Faktum.

Iſt einer der Faktoren zuſammengeſetzt, oder ſind ſie vielleicht beide durch die geſammten Theile einer Summe ausgedrückt, ſo ſetzt man ſie in eine Parentheſe (), und folgende Ausdrücke bedeuten alsdenn einerlei: $(6+4) . 5$; $10 . 5$. Oder $6 . (4+2)$; $6 . 6$. Eben ſo: $(5+4) . (6+2)$; $9 . 8$. Desgleichen machen auch die Zeichen keinen Unterſchied. Der Ausdruck $6 . 5$ iſt ſo viel als 6×5.

Anmer-

Anmerkung.

In der Arithmetik ſowohl, als in der Geometrie, und überhaupt in der geſammten Mathematik, iſt der Gebrauch der Parentheſen von Wichtigkeit, und von nicht unbeträchtlichem Nutzen. So würde der Ausdruck $5+4.6+2$ heißen $9.6+2$ oder 56, da er ſo $(5+4).(6+2)$ das Faktum 72 giebt.

Manche Fälle machen die Parentheſen nothwendig, da andere, ſtatt des Gebrauchs derſelben zulaſſen, die Ausdrücke ſo einzurichten, daß ihr Werth ungeändert bleibt und dabei die Form leichter wird. Dieſe Aenderung könnte man eine Reduktion der Ausdrücke nennen. So iſt der Ausdruck $(6+4).5$ in den reducirt: 10.5.

§. 38.

1) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Produkte.

2) Sind aber bei gleichen Multiplikatoren die Multiplikanda ungleich, ſo giebt das größere auch das größere Produkt.

3) Um ſo mehr iſt das Produkt des Größern mit dem Größern, größer, als das Produkt des Kleinern mit dem Kleinern (§. 31.).

Zu N. 1. $$\begin{array}{c} 6 = 6 \\ 2 = 2 \\ \hline 6.2 = 6.2 \end{array}$$ allgemein $$\begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ \hline ab = ab \end{array}$$

Zu N. 2. $$\begin{array}{c} 10 > 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 10.4 > 6.4 \end{array}$$ allgemein $$\begin{array}{c} a > b \\ m = m \\ \hline am > bm \end{array}$$

Zu N. 3. $$\begin{array}{c} 8 > 5 \\ 4 > 3 \\ \hline 8.4 > 5.3 \end{array}$$ allgemein $$\begin{array}{c} a > b \\ m > n \\ \hline am > bn \end{array}$$ *)

Anmer-

Anmerkung *).

Wird die Multiplikation mit Buchſtaben verrichtet, ſo hat man zwiſchen die Faktoren das Multiplikationszeichen zu ſetzen nicht nöthig; denn man verſteht ab wie a.b oder a × b, und der Grund davon liegt darin, daß es keine Zweideutigkeit, oder kein Mißverſtändniß verurſacht, wenn auch das Zeichen weggelaſſen wird. So heißt abcd ein Faktum aus den vier Faktoren a, b, c und d zuſammengeſetzt. Ganz anders aber iſt es beim Gebrauch der Zahlen; denn ſchriebe man das Produkt 2.4 ohne dazwiſchen geſetztes Multiplikationszeichen 24: ſo würde man die Zahl für keine andere, als für vier und zwanzig halten.

§. 39.

Sind beide Faktoren ganze Zahlen (wie dies hier gegenwärtig der Fall iſt): ſo iſt das Produkt gleich, wenn man ſie auch verwechſelt, d.i. die erſte Zahl mit der zweiten, oder die zweite mit der erſten multiplicirt.

Iſt der eine Faktor 4, und der andere 3, ſo iſt das Produkt ſowohl 4.3 als auch 3.4, und beide ſind gleich. Denn man bezeichne einmal beide Zahlen mit Sternchen, und zwar ſo, daß jede ſo viele Sternchen erhalte, als ſie Einheiten ausdrückt, und ſetze das Multiplikandum in eine Zeile von a nach b, und ſo vielmal unter ſich, von a nach c, als der Multiplikator Eins enthält:

a * * * * b
  * * * *
c * * * *

So iſt die Summe aller Sternchen ſo groß, als das Produkt 4.3 oder es iſt 4 + 4 + 4; denn die Reihe ab wird ſo vielmal genommen, als die Reihe ac Sternchen, d.i. Eins enthält. Nimmt man aber die Reihe ac ſo vielmal, als die Reihe ab Eins enthält, ſo hat man dieſelbe Menge, nämlich 3 + 3 + 3 + 3 = 3.4. Heißt nun

nun allgemein die Reihe von a nach b, oder ab = M; ac aber m: ſo iſt M.m eben ſo wie m.M die Menge der Einheiten. Da nun M.m = m.M (§. 38.): ſo iſt auch 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4.3 = 3.4. Hierdurch wird auch zugleich der Begriff der Multiplikation §. 37. gerechtfertiget.

Hieraus folgt deutlich, daß man, wenn auch mehrere Faktoren mit einander multiplicirt werden, die Ordnung, in welcher ſie auf einander folgen, verändern kann, wie man will, ohne daß die Produkte geändert werden. Demnach iſt z. B. 4.5.6 = 5.6.4 = 6.4.5 u. ſ. w.

§. 40.

Produkte zweier Zahlen, von welchen keine größer als 9 iſt, kann man aus der Pythagoriſchen Tafel (§. 35.) nehmen.

Anmerkung.

Da man die Pythagoriſche Tafel oft nöthig hat, ſo iſt es unumgänglich nöthig, ſie auswendig zu lernen; und da ſie das iſt, was wir das Einmal Eins nennen, und dieſes eine Beſchäftigung in unſerer Kindheit iſt, ſo kann man mit Sicherheit die Kenntniß deſſelben vorausſetzen.

Die Nepperſchen Stäbchen und mehrere Arten von Rechenmaſchinen führen noch weiter, machen aber die Kenntniß des Einmal Eins in gemeinen Rechnungen nicht ganz entbehrlich. Man ſehe: Fortſetzung der Rechenkunſt, in Anwendungen auf mancherlei Geſchäfte. Von Abraham Gotthelf Käſtner. (Der mathematiſchen Anfangsgründe erſten Theils zweite Abtheilung). Göttingen 1786.

§. 41.

Vortheile beim Multipliciren gewähren die Fälle, wo der eine Faktor 10 oder 100, oder überhaupt 1 mit einer gewiſſen Anzahl Nullen iſt. Man multiplicirt dem-

demnach eine Zahl mit 10, wenn man ihr zur Rechten eine 0 beifügt (§. 9 und 10.). Aus eben dem Grunde multiplicirt man eine Zahl mit 100 oder 1000 u. ſ. w. wenn man ihr zwei oder drei Nullen beifügt. Denn man kann ſich vorſtellen, als ſei z. B. die Zahl 50 aus 5.10; 600 aus 6.100, und 6000 aus 6.1000 u. ſ. w. entſtanden; eben ſo die Zahlen 1260 aus 126.10; 14500 aus 145.100; 1264000 aus 1264.1000; mithin auch 45200.34000 aus 452.100.34.1000 = 452.34.100.1000 = 452.34.10000. Dies Verfahren enthält folgende Regel allgemein. Wenn die Faktoren Zahlen mit angehängten Nullen ſind: ſo multiplicirt man die Zahlen (nach §. 40.) und ſetzt an das Faktum ſo viele Nullen, als beiden Faktoren zuſammen genommen angehängt ſind.

§. 42.

Aufgabe.

Eine zuſammengeſetzte Zahl mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Man ſchreibe den Multiplikator unter die Einer des Multiplikandums, und ziehe unter beide, wie bei der Addition, einen Strich.

2) Multiplicire nun die Einer des Multiplikandums mit dem Multiplikator, und ſo fort die Zehner, Hunderte, Tauſende ꝛc. nach §. 36. Enthält das Produkt der Einer einen, oder mehrere Zehner, ſo ſetze man bloß die Einer in die Stelle des Produkts, nämlich unter die Einer des Multiplikandums, die Zehner aber behalte man im Sinne, und addire ſie, wenn man das Produkt der Zehner gemacht hat, zu den Zehnern. Auf eine ähnliche Art verfährt man mit allen Theilen des Multiplikandums.

Es ſei z. B. 23416 das Multiplikandum
2 der Multiplikator

ſo iſt 46832 das Produkt

desgleichen 45928 . 6
6

275568

Eigentlich ſollte man jeden Theil des Produkts, ſo wie man denſelben durch die Multiplikation erhält, unterſetzen, und zuletzt die Partialprodukte in eine Summe bringen, die zugleich das geſammte Produkt ausdrückte. Z. B.

```
45928
    6
-----
   48 ⎫
  12  ⎪
 54   ⎬ Partialprodukte
30    ⎪
24    ⎭
------
275568 die Summe oder das geſammte
              Produkt.
```

Das Verfahren im vorſtehenden Beiſpiele zeigt deutlich, daß alle Einer, Zehner, Hunderte u. ſ. w. alſo alle Theile des Multiplikandums, ſo vielmal genommen ſind, als der Multiplikator Einheiten enthält. Daher folgt, daß die gefundene Zahl das Multiplikandum ſo oft enthalte, als der Multiplikator die Einheit; mithin iſt dieſe Zahl das verlangte Produkt.

§. 43.

Aufgabe.

Zwei aus einfachen Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahlen zu multipliciren.

Auflö=

Aufloͤſung.

A. in ungenannten Zahlen.

1) Man ſchreibe die Faktoren ſo unter einander, daß die Einheiten des Multiplikators unter den Einheiten des Multiplikandums ſtehen, auch verfahre man ſo mit den Zehnern, Hunderten, Tauſenden u. ſ. w.

2) Nun multiplicire man das Multiplikandum mit den Einern des Multiplikators, und ſchreibe das Partialprodukt ſo unter, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern ſtehen ꝛc.

3) Das Produkt der Einer des Multiplikandums aber, mit den Zehnern des Multiplikators ſetze man ſo, daß das niedrigſte Zahlzeichen zur rechten, unter die Zehner des Multiplikandums komme. Auf eine aͤhnliche Art verfahre man mit allen Partialprodukten des Multiplikandums mit den Theilen des Multiplikators.

4) Kommen in der Mitte des Multiplikators Nullen vor, ſo uͤbergehe man ſie, weil ſie nicht multipliciren. Denn $4 . 0 = 0$ und $0 . 4 = 0$; ſetze aber das folgende Partialprodukt ſo viel Stellen weiter zur Linken, als Nullen hinter einander im Multiplikator vorkommen, damit ſie ihren Werth nicht verlieren.

5) Hat ein Faktor am Ende Nullen, ſo multiplicire man die geltenden Zahlzeichen, ſetze aber dem Produkte rechter Hand die Nullen des Multiplikators bei. Kommen Nullen am Ende beider Faktoren vor, ſo verfahre man wie vorhin, und gebe dem Produkte ſo viele Nullen, als beide Faktoren zuſammengenommen enthalten.

Beiſpiele:

Beiſpiele:

```
     674584              5432000
        243               120000
  ---------           ----------
    2023752               10864
   2698336               5432
  1349168              ------------
  ---------              651840000000
  163923912
```

```
     6405124   Anſtatt    6405124
       13002                13002
   ---------            ---------
    12810248             12810248
  19215372               0000000
  6405124               0000000
  -----------          19215372
  83279422248          6405124
                      -----------
                      83279422248
```

6) Man kann auch die Multiplikation dadurch abkürzen, oder erleichtern, daß man den Multiplikator, wenn es angeht, in ſeine Faktoren **zerfällt** und mit dieſen multiplicirt.

Da z. B. 24 = 4 . 6, ſo wird auch 362 . 4 . 6 = 362 . 24; denn

```
   362     und     362
    24               4   der erſte Faktor
  ----           -----
  1448            1448
  724                6   der zweite Faktor
  ----           -----
  8688            8688
```

Abgekürzt kann man die Auflöſung auch ſo vornehmen 362 . 24; 24 aber iſt $= \frac{4}{6}$. Demnach iſt

362 (4	Oder noch mehr abgekürzt	362	
1448 (6		1448	
8688		8688	

Das nämliche Produkt erhält man, wenn der Multiplikator 24 = 3 . 8; oder 24 = $\frac{3}{8}$ geſetzt wird. Denn es iſt

362 multiplicirt mit 24 oder 3 . 8 = $\frac{3}{8}$

3			
1086		362 (3	
8	abgekürzt	1086 (8	
8688		8688	

Noch abgekürzter: 362
1086
8688

Desgleichen multiplicirt man 699 mit 32, ſo kommt 22368 zum Produkt.

Man ſetzt alſo: 699	Oder	699 . 32 =	$\frac{4}{8}$
32		2796	
1398		22368 Produkt.	
2097			
22368 Produkt.			

Ferner: 6789 multiplicirt mit 21 = 142569.

48 . 6342 = 304416.

81 . 20978 = 1699218.

777 . 988 = 767676.

B. in benannten und mehrerleinamigen Zahlen. Man multiplicire 66 Thaler zu Groſchen.

Da

Da in einem Thaler 24 gr. ſind; ſo iſt dieſes eben ſo viel, als 66 multiplicirt mit 24. Man ſetzt daher

66 Thlr.	Oder 66 Thlr. 24 = 4. 6.
24	264
264	1584 gr.
132	
1584 gr.	

Desgleichen: 226 Thlr. 18 gr. 6 pf. Wenn ſolche unter einerlei Benennung gebracht, das iſt, zu Pfennigen gemacht werden; was wird das Produkt derſelben ſeyn?

Hier multiplicirt man die Thaler mit 24 zu Groſchen und nimmt die 18 gr. dazu. Das Produkt der Groſchen mit 12 zu Pfennigen multiplicirt und die 6 pf. darzu addirt, giebt die verlangte Zahl der Pfennige: z. E.

226 Thl. 18gr. 6pf.	Od. 226 Thlr. 18gr. 6pf.	3+18
24	678	8
904	5442 = gr.	12 = 2
452	10884	6+6
5424	Fac. 65310 pf.	
+18		
5442 = gr.		
12		
10884		
5442 +6		
Fac. 65310 Pfennige.		

Wie viel Fuße oder Schuhe geben 718 Ruthen und 8 Schuhe?

10778 Schuh, wenn die Ruthe zu 15 Schuh gerechnet wird.

```
718 Ruthen 8 Schuh.   Od. 718 R. 8 S. 15 = 3
 15                       ----------       5 + 8
----                       2154
3590                     -----------
718                      10778 Schuh.
----
10770
  + 8
-----
10778 Schuh.
```

Kommen ganze oder mehrerleinamige Zahlen mit einer andern gegebenen Zahl zu multipliciren vor, ſo bediene man ſich beſonders dieſes Vortheils der Zerfällung des Multiplikators, wenn er ſich nach dem Einmal Eins zerfällen läßt, weil dadurch oft viele Weitläuftigkeit im Rechnen kann vermieden werden. Z. B. ſoll man 24 Thlr. 16 gr. 6 pf. mit 36 multipliciren; ſo ſetzt man alſo:

```
   24 Thlr. 16 gr. 6 pf.   36 = 6 . 6.
  ----------------------
  148 Thlr.  3 gr.
  ----------------------
Das Produkt iſt 888 Thlr. 18 gr.
```

Dies verſteht man ſo: 36 läßt ſich in 6 . 6 zerfällen, denn 6 mal 6 iſt 36 nach dem Einmal Eins. Nun ſpricht man: 6 Sechspfenniger ſind gleich 3 gr. und da ferner 6 Sechzehngroſchenſtücke gleich 4 Thlr. ſind, ohne etliche Groſchen übrig zu laſſen; ſo ſchreibt man die aus den Pfennigen entſtandenen 3 gr. unter die Stelle der gleich überſtehenden Groſchen, und multipliciret ferner mit der 6 die folgenden 24 Thlr. ſo geben ſie 144 Thlr. welche mit den 4 Thlr. von den ſechs Sechzehngroſchenſtücken alsdann 148 Thlr. betragen. Mithin iſt das erſte Produkt:

148

148 Thlr. 3 gr. Dieſes Produkt multipliciret man mit der andern 6, wie das erſtere. So geben 6 mal 3 gr. gleich 18 gr. und 6 mal 148 Thlr. werden 888 Thlr. Und folglich iſt das ganze Produkt 888 Thlr. 18 gr.

Anmerkung.

Dieſe und andre dergleichen Beiſpiele werden ſonſt zu der Regel Detri gerechnet, wo der erſte Satz eigentlich nur 1 iſt. Als 1 Centner koſtet 24 Thlr. 16 Gr. 6 Pf. was koſten 36 Centner? 888 Thlr. 18 gr.

Nun folgen noch einige Beiſpiele zur Uebung außer der Ordnung. 478 multiplicirt mit 48. Was iſt das Produkt? 22924.

Desgleichen: 976 . 72 = 70272.
2769 . 81 = 224289.
3645 . 263 = 959635.
6924 mit 2367 =
70432 mit 63040 =
23456 mit 78901 =

Wie viel geben 263 Thlr. Pfennige?

Desgleichen: Wie viel machen 619 Mfl. 18 gr. 4 pf. an Pfennigen?

Bringet 8 Centner 24 Pfund 16 Loth unter eine Benennung; was thun ſie?

Wenn eine Klafter zweielliges Holz aufgeſpalten, 120 Cubikſchuh hält; wie viel Cubikſchuh gehören zu 99 Klaftern? 11880.

Ein Förſter bekommt in einem Jahre 24 Schfl. 3 Viertel 2 Metzen Neujahrsgetreide; was thut ſolches in 6 Jahren? 149 Scheſl. 1 Viertel.

Eine Klafter Holz gilt 1 Thlr. 12 gr. 6 pf. Was koſten 36 Klaftern? 54 Thlr. 18 gr.

Wenn eine Klafter hartes Holz 2 Thlr. 4 gr. koſtet; was werden 72 Klaftern koſten? 156 Thlr.

Wenn ein Holzſchläger täglich 6 gr. verdienet; was hat er in 6 Wochen zu fordern, die Woche zu 6 Tagen gerechnet? 9 Thlr.

Ein Sechziger hält 3600 Scheitchen. Wie viel Scheitchen müſſen zu 77 Sechzigern geſpalten werden? 277200 Scheitchen.

Auf einen Malter gehen 64 Cubikſchuh. Wie viel Cubikſchuh werden zu 2763 Maltern erfordert? 176832 Cubikſchuh.

Multiplicirt man 367 Mfl. 7 gr. 8 pf. mit 27. Was wird das Produkt ſeyn? 9918 Mfl. 18 gr.

Der Förſter zu N. hat einen Wellbaum für 6 Thlr. 12 gr. verkauft; Was werden 28 Stück um eben dieſen Preis gelten? 182 Thlr.

Wenn ein Schock Hopfenſtangen 1 Thlr. 16 gr. koſten; was wird man für 18 Schock zahlen müſſen? 30 Thlr.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion.

§. 44.

Die Subtraktion lehrt, aus zwei gegebenen Zahlen ein ſolche dritte finden, die anzeigt, um wieviel die eine von den gegebenen größer iſt, als die andere.

Man nennt die gegebenen Zahlen, das Minuendum und das Subtrahendum, da denn das Subtrahendum anzeigt, um wieviel das Minuendum vermindert werden ſoll. Die geſuchte Zahl heißt die Differenz (Reſt, Unterſchied, Ueberſchuß).

Das

Das Zeichen, wodurch die Subtraktion angezeigt wird, iſt (—), und wird durch minus oder weniger ausgeſprochen, und vor diejenige Zahl geſetzt, die ſubtrahirt werden ſoll. So iſt in dem Ausdrucke 8—6=2, die Zahl 8 das Minuendum, 6 das Subtrahendum; 2 aber die Differenz. Der Sinn des Ausdrucks iſt: 8 ſoll um 6 vermindert werden.

Iſt eine Zahl, welche ſubtrahirt werden ſoll, eine durch ihre Theile ausgedrückte Summe: ſo ſetze man ſie in eine Parentheſe ( ), und folgende Ausdrücke bedeuten alsdenn einerlei: 18 — (4 + 7); 18 — 11 d. i. die Summe von 4 + 7 oder 11 ſoll von 18 ſubtrahirt werden.

Anmerkung.

Ohne Parentheſe würde z. B. der gebrauchte Ausdruck 18 — 4 + 7 nichts anders heißen, als von 18 ſoll 4 ſubtrahirt und zur Differenz 7 addirt werden. Da nun 4 von 18, die Differenz 14 giebt, und 14 um 7 vermehrt, 21 macht; 18 — (4+7) oder 18 — 11 aber nur 7 giebt: ſo iſt die geſuchte Zahl der beiden Ausdrücke 8 — 4 + 7 nnd 18 — (4+7), um 14 von einander verſchieden.

Kommt eine von den gegebenen Zahlen als ein Produkt, durch die Faktoren ausgedrückt vor, ſo iſt der Ausdruck noch zuſammengeſetzter, der Gebrauch der Parentheſen dann um ſo nöthiger und die Parentheſe muß oft doppelt oder vielfach gebraucht werden, wie z. B. [(3.6.4) — (6+2).2], d. i. 3.6.4=72; (6+2).2 =12.2=24; alſo 72 — 24=48.

§. 45.

1) Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

2) Subtrahirt man gleiche Größen oder Zahlen von ungleichen, ſo erhält man ungleiche Differenzen, denn die größere Zahl giebt auch die größere Differenz.

3) Wenn man aber von gleichen Größen oder Zahlen ungleiche ſubtrahirt, ſo giebt die größere Größe oder Zahl die kleinere, und die kleinere Größe oder Zahl die größere Differenz.

Zu N. 1. $$\begin{array}{c} 8 = 8 \\ 6 = 6 \\ \hline 8 - 6 = 8 - 6 \end{array}$$ allgemein: $$\begin{array}{c} a = a \\ c = c \\ \hline a - c = a - c \end{array}$$

Zu N. 2. $$\begin{array}{c} 10 > 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 10 - 4 > 6 - 4 \end{array}$$ allgemein: $$\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a - c > b - c \end{array}$$

Zu N. 3. $$\begin{array}{c} 12 = 12 \\ 8 > 4 \\ \hline 12 - 8 < 12 - 4 \end{array}$$ allgemein: $$\begin{array}{c} a = a \\ c > d \\ \hline a - c < a - d \end{array}$$

§. 46.

Die Differenz zweier Zahlen, wenn keine von beiden größer als 9 oder 9 + 9, d. i. 18 iſt, kann man ſehr leicht in Gedanken, oder durch Hülfe des Zurückzählens finden.

Anmerkung.

Dieſer zweite Forderungsſatz enthält den Grund aller ausübenden Subtraktion. Für ihn gilt das, was §. 32. in der Anmerkung beigebracht worden iſt, dann, wenn man nur die Einſchränkung dabei macht, welche das der Addition entgegengeſetzte Verfahren erfordert. Je weiter man dieſe Forderung in Gedanken ausdehnt, und jemehr man ſie übt, deſtomehr gewinnt man für die Ausübung.

§. 47.

Aufgabe.

Jede kleinere Zahl von einer größern zu ſubtrahiren.

Auflö-

Auflöſung:

A. in ungenannten Zahlen.

1) Man ſchreibe das Subtrahendum unter das Minuendum ſo, wie es die Stellen und Ordnungen des Zahlenſyſtems verlangen, oder kürzer: man verfahre dabei, wie bei der Addition (§. 33.).

2) Subtrahire jedes Zahlzeichen von dem über ihm ſtehenden und ſchreibe die Differenz unter den Strich. Im Falle, daß beide Zahlzeichen gleich ſind, iſt die Differenz 0.

```
Z. B.   87459635
        36243231
        --------
        51216404
```

3) Iſt das Zahlzeichen des Minuendums kleiner als das Zahlzeichen des Subtrahendums, oder gar 0: ſo nimmt man von dem folgenden Zahlzeichen des Minuendums zur Linken Eins, oder eine Einheit weg, und ſetzt dieſe zu der zu kleinen Zahl. Die fehlende Einheit aber zeigt man durch einen Punkt an, der über oder neben die Zahl geſetzt wird, von welcher dieſe Einheit weggenommen worden iſt. Dies Verfahren nennt man das Borgen. Die geborgte Einheit gilt nun eine Stelle weiter zur Rechten geſetzt 10 oder zehn Einheiten der um eine Stelle niedrigern Kaſſe.

```
        8 10  1 10                .  .
Z. B.   5 9. 0 6 2. 5 7   abgekürzt:  5906257
        2 4 9 2 1 6 5                 2492165
        -------------                 -------
        3 4 1 4 0 9 2                 3414092
```

D. i. 5 von 7 bleibt 2; 6 von 5 borgt man Eins, und ſpricht nun 6 von 15 bleibt 9; 1 von 1 geht auf, oder bleibt 0; 2 von 6 bleibt 4; 9 von 0 borgt man Eins: 9 von 10 bleibt 1; 4 von 8 bleibt 4; 2 von 5 bleibt 3.

4) Iſt das Zahlzeichen, bei welchem man Eins borgen will, eine 0, ſo geht man dieſe 0 vorbei und borgt bei dem nächſtfolgenden Zahlzeichen. Die geborgte Einheit heißt in der Stelle der 0 zehn; von dieſer 10 nimmt man abermals Eins weg zu dem Zahlzeichen, für welches man geborgt hat, und dieſe Eins gilt alſo noch eine Stelle weiter gegen die Rechte abermals 10; folglich bleibt nur 9 für die 0.

```
           9          9
         4 1̸ 0̸ 10   6 1̸ 0̸ 10                      .  .   .  .
Z. B.  8̸. 0 3 5 6 7̸. 0 2       abgekürzt:  50356702
          3 2 5 4 3 6 1 5                    32543615
        ------------------                 ----------
          1 7 8 1 3 0 8 7                    17813087
```

5) Folgen mehr Nullen auf einander, bei welchen man borgen ſoll, ſo verfährt man wie vorhin, oder nach der Regel: Wenn man über mehrere Nullen wegborgt, ſo verwandelt man dadurch jede 0 in 9, weil die geborgte Einheit jeder 0 eine ſolche Eins abgiebt, die nun in der nächſtfolgenden Stelle zur Rechten 10 gilt weil die Einer jeder vorhergehenden Stelle zur Linken 10mal größer ſind, als die in der nächſtfolgenden Stelle zur Rechten.

```
             9  9  9  9  9
         8  1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 10                       . . . . .
Z. B.  6 9̸. 0  0  0  0  0  4  5   abgekürzt:  690000045
       1  2  4  5  7  8  9  5  3               124578953
      ---------------------------            -----------
       5  6  5  4  2  1  0  9  2               565421092
```

Nach den vorgeſchriebenen und befolgten Regeln der Auflöſung hat man die Einer, Zehner, Hunderte, Tauſende ꝛc. des Subtrahendums, von den Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. des Minuendums ſubtrahirt. Die durch dies Verfahren erhaltene Zahl zeigt demnach an, um wieviel die größere von den gegebnen Zahlen größer iſt,

iſt, als die kleinere, und iſt alſo die geſuchte Differenz (§. 45.).

B. in benannten und mehrerleinamigen Zahlen.

1) Auch hier ſetzt man Gleiches unter Gleiches, d. i. man ſchreibt Thaler unter Thaler, Groſchen unter Groſchen — Centner unter Centner — Ruthen unter Ruthen ꝛc.

2) Subtrahirt man wirklich das Kleinere vom Größern und es kommt hier der Fall vor, daß das Subtrahendum von irgend einem Namen größer iſt, als das Minuendum, ſo muß man auch borgen und zwar bei der nächſtfolgenden größern Sorte, ſie mag nun Maaß, Gewichte oder ſonſt irgend eine Eigenſchaft einer Größe bezeichnen. Die geborgte Einheit gilt nun in der Stelle, für welche man borgt, ſo viel, als die größere Sorte Einheiten der kleinern in ſich begreift. So iſt 1 Rthlr. = 24 gr.; 1 gr. = 12 Pf. ꝛc. Beim Subtrahiren der einzelnen Zahlzeichen verfährt man übrigens eben ſo, wie bei den ungenannten Zahlen gezeigt worden iſt.

Man ſubtrahire: 27 Thlr. 10 gr. und 9 pf. von 98 Thlr. 12 gr. 4 pf. Was bleibt Reſt? 71 Thlr. 1 gr. 7 pf.

Nämlich:	98 Thlr.	12 gr.	4 pf.	—
	27 —	10 —	9 —	—
	71 Thlr.	1 gr.	7 pf.	Reſt.

Hier ſagt man: 9 pf. von 4 pf. können nicht abgezogen werden; daher nimmt man von den folgenden Groſchen Einen hinweg. Dieſer gilt 12 pf. und da 12 pf. und 4 pf. gleich 16 Pfennige ſind; ſo heißt es nunmehr 9 pf. von 16 pf. bleiben 7 pf. Dieſe 7 kommt unter den Strich an die Stelle der Pfennige zu ſtehen, als Reſt.

Ferner ſagt man: 10 Groſchen von 11 Groſchen bleibt 1 Groſchen Reſt. Denn 0 von 1 bleibt 1, und 1 von 1

geht

geht auf. Dieſen Reſt von 1 Groſchen ſchreibt man unter die Linie an die Stelle, wo die Groſchen ſtehen.

Und endlich geht man auch zu den Thalern und ſagt: 7 von 8 bleibt 1, und 2 von 9 bleibt 7, welches zuſammengeſetzt 71 Thlr. Reſt betraͤgt, der unter die obern Thaler unter die Linie zu ſchreiben iſt.

Addirt man nun 71 Thlr. 1 gr. 7 pf. zu 27 Thlr. 10 gr. 9 pf. ſo geben dieſe zwei Poſten in einer Summe wieder 98 Thlr. 12 gr. 4 pf. d. i. das voͤllige Subtrahendum. Und man hat richtig ſubtrahiret.

Einige Beiſpiele zur Uebung:

63972 von 97845 ſubtrahirt; was bleibt Reſt? 33873.

Desgleichen: 16397 von 43678, was iſt uͤbrig? 27281.

Wenn von 123456 die Zahl 98765 abgezogen wird, was muß uͤbrig bleiben? 24689.

Ziehet 206907 von 980764 ab; ſo bleibt Reſt: 773857.

Ferner: Wenn von 478 Thlr. 23 gr. 8 pf. — 227 Thlr. 14 gr. und 4 pf. weggegeben werden; was wird uͤbrig ſeyn? 251 Thlr. 9 gr. 4 pf.

Ein Forſtſchreiber hat in Kaſſe 978 Thlr. 20 gr. 8 pf. und davon hat er an Ausgabe 297 Thlr. 12 gr. 6 pf. mit Belegen berechnet. Was hat er noch baar? 681 Thlr. 8 gr. 2 pf.

Ein Foͤrſter hat nach und nach 98 Thlr. 17 gr. 6 pf. an Forſtgeldern eingenommen. Er berechnet aber, daß er davon in ſeinem Forſtweſen wiederum ausgegeben:

a) 18 Thlr. 9 gr. 7 pf. fuͤr eingeſammlete fichtene Zapfen zu Saamen.

b)

b) 39 Thlr. 14 gr. 8 pf. um einen Hegefleck mit Stangen zu vermachen, Arbeiterlohn und endlich:

c) 27 Thlr. 18 gr. 4 pf. für 100 Schock junge Buchen, welche auf das herrſchaftliche Revier verſetzet worden. Was wird er noch baar einzurechnen haben? 12 Thlr. 22 gr. 11 pf.

Ein Holzſchläger hat an Schlagelohn 18 Thlr. 18 gr. zu fordern. Darauf hat er von dem Förſter zu N. 9 Thlr. 20 gr. 6 pf. und von deſſen Nachbar, dem Förſter zu O. 6 Thlr. 18 gr. erhalten. Was muß er noch auf ſeine Anforderung von dem Förſter zu P. erhalten? 2 Thlr. 3 gr. 6 pf.

Ein Forſtbedienter hat auf ſeinem Revier 2763 Stangen, 4796 Schaalhölzer, 3818 Bretbäume und 977 Wellbäume gezählet. Da nun in vorigem Monat 972 Stangen, 1200 Schaalhölzer, 299 Bretbäume und 189 Wellbäume ſind abgepaſſet worden. Wie viel von jeder Sorte hat er noch auf ſeinem Revier ſtehen? 1791 Stangen, 3596 Schaalhölzer, 3519 Bretbäume und 788 Wellbäume.

Anmerkung.

Auch bei der Subtraktion in genannten und mehrerleinamigen Zahlen hat man die Kenntniß der Reduktionszahlen nöthig.

§. 48.

Wenn man zu einer Größe oder Zahl eine andere addirt, und eben dieſelbe Zahl von der Summe wiederum ſubtrahirt; oder wenn man von einer Größe oder Zahl eine andere ſubtrahirt, und eben dieſelbe Zahl wiederum zu der Differenz addirt: ſo bleibt in beiden Fällen die erſte Größe oder Zahl ungeändert.

Beiſpiele.

Man drücke die Rechnungsarten durch Zeichen aus und bezeichne die Größen theils allgemein mit Buchſtaben, theils aber auch durch Zahlzeichen.

Erſter Fall: 6 + 4 — 4 = 6 Allgemein: a + b — b = a
Zweiter Fall: 6 — 4 + 4 = 6 a — b + b = a

Anmerkung.

Auf dieſen Satz gründet ſich die Probe für die Addition und Subtraktion.

1. Probe der Addition.

A. in ungenannten Zahlen.

Man ſubtrahirt von der, aus den gegebenen Zahlen erhaltenen Summe, die gegebenen Zahlen nach einander; ſo muß, wenn man richtig gerechnet hat, die letzte Differenz der, von der Subtraktion ausgenommenen Zahl, gleich ſeyn. Z. B.

6457	= c
3246	= b
1503	= a
11206	Summe = a + b + c
1503	= a wird ſubtrahirt
9703	Summe = b + c
3246	= b wird ſubtrahirt
6457	Gegebene Zahl = c

B. in

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	= c
77 —	14 —	9 —	= b
96 —	4 —	8 —	= a
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a + b + c
96 —	4 —	8 —	= a wird ſubtrahirt
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	Summe = b + c
77 —	14 —	9 —	= b wird ſubtrahirt.
23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	Gegebene Zahl = c.

2. Probe der Subtraktion.

A. in ungenannten Zahlen.

Man addirt die Differenz zur kleinern Zahl, d. i. zum Subtrahendum, und die Summe giebt das Minuendum oder die größere Zahl. Z. B.

690000045	= a
124578953	ſummirende Zahlen
565421092	ſummirende Zahlen
690000045	Summe = a

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	= a
96 —	4 —	8 —	ſummirende Zahlen.
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	ſummirende Zahlen.
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a

Mehrere Proben der Addition und Subtraktion hier aufzuführen, liegt nicht im Zwecke gegenwärtiger Anfangsgründe, ob es gleich mehrere Arten giebt. Ueberhaupt

haupt iſt es beſſer, ſich gleich anfangs zu gewöhnen, mit Aufmerkſamkeit ſicher zu rechnen, als ſich auf irgend eine Art von Probe zu verlaſſen.

Wenn man viele Poſten an Münzſorten ꝛc. zuſammen zu zählen hat, ſo kann man höchſtens, nachdem die Summe beſtimmt worden iſt, dieſe Poſten noch einmal in verkehrter Ordnung zuſammen zählen, weil alsdenn der gemachte Fehler leicht entdeckt wird, indem die einzelnen Zahlzeichen nicht mehr in der vorigen Ordnung auf einander folgen.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion.

§. 49.

Die Diviſion iſt nach §. 17. eine abgekürzte Subtraktion für den Fall, wenn eine Zahl um eine andere ſo vielmal vermindert werden ſoll, als die andere Einheiten enthält; daher lehrt die Diviſion eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft oder wie viel mal eine von zwei gegebenen Zahlen in der andern enthalten ſey.

Die Zahl, welche dividiret werden ſoll, nennt man das Dividendum, und die, womit man dividirt, den Diviſor; diejenige aber, welche man durch die Diviſion erhält, und die durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten iſt, wird der Quotient genannt.

Das Zeichen, wodurch die Diviſion angezeigt wird, iſt (:), und wird zwiſchen das Dividendum und den Diviſor ſo geſetzt, daß das Dividendum vor- der Diviſor aber nachgehet. Auch bedient man ſich eines Striches, wo alsdenn das Dividendum über- der Diviſor aber unter denſel-

ſelben geſetzt wird. Beide Ausdrücke ſind demnach einerlei, z. B. 12 : 4 oder $\frac{12}{4}$, d. i. das Dividendum 12 ſoll durch den Diviſor 4 dividirt werden.

Iſt eine von den gegebenen Zahlen ſchon für ſich eine Summe durch + verbunden, oder eine Differenz, durch — bezeichnet, oder findet eine ſolche Zuſammenſetzung in beiden ſtatt; ſo ſetzt man ſie in eine Parentheſe (), und folgende Ausdrücke ſind alsdenn einerlei: z. B. (14 + 4 + 6) : 8; 24 : 8, und (12 + 4) : (1 + 3); 16 : 4; und (16 — 3 + 8) : (2 + 5); 21 : 7.

§. 50.

Wird die Diviſion mit der Multiplikation (§. 37.) verglichen, ſo findet man, daß das Dividendum als das Produkt, der Diviſor als das Multiplikandum, und der Quotient als der Multiplikator angeſehen werden kann. Multiplicirt man demnach den Quotient mit dem Diviſor, ſo erhält man im Produkte das Dividendum.

Auch ergiebt ſich aus der Eigenſchaft des Produkts, daß der Quotient ſo oft im Dividend enthalten ſeyn muß, als 1 im Diviſor. Stellt man ſich nun vor, daß das Dividendum aus lauter ſolchen gleichen Theilen beſtehe, als der Quotient iſt, und daß der Diviſor die Menge dieſer Theile durch ſeine Einheiten anzeige, ſo heißt dividiren auch: Eine Zahl (das Dividendum) in ſo viele gleiche Theile theilen, als die andere (der Diviſor) Einheiten enthält, und einen dieſer Theile (den Quotienten) beſtimmt angeben. So den Begriff der Diviſion ausgedrückt, paßt derſelbe auch auf die Diviſion in genannten Zahlen, z. B. $\frac{15}{3}$ Thlr. = 5; oder 15 Thlr. : 3 Thlr. = 5 Thlr.

§. 51.

1) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten.

2) Sind bei gleichen Diviſoren die Dividenda ungleich, ſo giebt das größere Dividendum einen größern Quotienten als das kleinere.

3) Sind aber die Dividenda gleich, und die Diviſoren ungleich, ſo giebt der größere Diviſor den kleinern Quotienten.

Zu No. 1. $12 = 12$, $4 = 4$; $\overline{12:4 = 12:4}$ allgemein: $a = a$, $b = b$; $\overline{a:b = a:b}$

Zu No. 2. $12 > 8$, $4 = 4$; $\overline{12:4 > 8:4}$ allgemein: $a > b$, $c = c$; $\overline{a:c > b:c}$

Zu No. 3. $16 = 16$, $4 > 2$; $\overline{16:4 < 16:2}$ allgemein: $a = a$, $b > c$; $\overline{a:b < a:c}$

§. 52.

Wenn man irgend ein Dividendum nimmt und dividirt es nach einander ſo, daß das erſte Mal ein gewiſſer Diviſor, das zweite Mal dieſer doppelte Diviſor, und das dritte Mal der dreifache Diviſor genommen wird: ſo erhält man durch die zweite Diviſion einen halb ſo großen Quotienten als das erſte Mal; durch die dritte Diviſion aber einen dreimal ſo kleinen Diviſor; und ſo auch umgekehrt.

Iſt das Dividendum = 12 und der Diviſor = 2; ſo iſt der Quotient 12 : 2 halb ſo groß als der 12 :(2 . 2); 12 :(2 . 3) aber nur der dritte Theil von dem, 12 : 2. u. ſ. w. Hieraus ſieht man zugleich, daß der Satz auch umgekehrt wahr ſey.

§. 53.

§. 53.

Ein Dividendum, welches aus mehrern Theilen beſteht, wird mit einer andern Zahl dividirt, wenn man alle Theile des Dividendums nach einander mit dem gegebenen Diviſor dividirt, und zuletzt alle einzelne Quotienten in eine Summe bringt.

Beiſpiel.

Das Dividendum 639 ſey durch die Theile 600 + 30 + 9 ausgedrückt. Iſt nun 3 der Diviſor, ſo iſt (600 : 3) + (30 : 3) + (9 : 3) = (600 + 30 + 9) : 3 = 639 : 3.

§. 54.

Den Quotient zweier Zahlen findet man entweder durch Hülfe des Einmaleins oder durch die Subtraktion.

Beiſpiel durch die Subtraktion.

Wenn das Dividendum 24, der Diviſor aber 6 iſt; ſo iſt

$$\begin{array}{r} 24 \\ -6 \\ \hline 18 \\ -6 \\ \hline 12 \\ -6 \\ \hline 6 \\ -6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Da nun 6 viermal nach einander ſubtrahirt worden, ſo iſt 4 der geſuchte Quotient.

§. 55.

Aufgabe.

Man ſoll den Quotient durch die Diviſion finden, wenn das Dividendum aus zwei, der Diviſor aber nur aus einem Zahlzeichen beſtehet.

Auflöſung.

Erſter Fall. Wenn der Diviſor größer iſt als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, ſo kann der Quotient nicht größer als 9 ſeyn. Soll man z. B. 68 durch 9 dividiren, ſo iſt der Quotient 7, weil 9 . 7 = 63, und 9 . 8 = 72 macht. Da nun 72 ſchon größer als 68 iſt, ſo kann der Quotient nicht 8 ſeyn; demnach iſt 7 der zu 68 : 9 gehörige Quotient. Hieraus ſieht man zugleich, warum der Quotient noch weniger 9 oder wohl gar 10 ſeyn kann.

Nimmt man die in §. 35 befindliche Pythagoriſche Tafel zu Hülfe, ſo läßt ſich in allen dieſen Fällen der Quotient leicht finden. Denn da der Diviſor 9 iſt, ſo ſucht man ihn linker Hand auf, geht in dieſer Reihe querdurch ſo weit, bis man auf 68 oder die nächſt kleinere Zahl trifft, wie hier 63; da nun in der Reihe über 63 oben die Zahl 7 ſteht, ſo iſt 7 der Quotient.

Die Form der wirklichen Diviſion iſt verſchieden, daher kann man folgende wählen:

Diviſor 9) 68 | 7 Quotient.

Findet man ein Produkt, welches ſo groß iſt, als das gegebene Dividendum, ſo ſagt man: der Diviſor geht im Dividend auf, wie in folgendem Beiſpiel: 63 : 9.

9) 63 | 7

Iſt das Produkt des Diviſors mit dem Quotienten aber kleiner, als das Dividendum, doch nicht ſo viel kleiner, als der Diviſor beträgt, weil ſonſt der Quotient um Eins zu klein ſeyn würde; ſo ſetzt man das kleinere Produkt

dukt unter das Dividendum, ſubtrahirt und ſetzt den Reſt unter den Strich. Der Reſt zeigt allemal an, daß das Dividendum den Diviſor nicht nur etlichemal ganz, ſondern auch noch einen Theil deſſelben darüber enthalte. Z. B.

```
9) 68 | 7
   63 |
  --------
    5 Reſt.
```

Zweiter Fall. Wenn der Diviſor kleiner oder eben ſo groß, als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, und das niedrigſte des letztern 0 iſt; ſo ſuche man den Quotienten wie vorhin, aber nur für das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, und gebe dem Quotienten, eben ſo wie dem Produkte des Quotienten mit dem Diviſor, zur Rechten, eine 0 und ſubtrahire. Bleibt auch hier ein Reſt, ſo dividirt man dieſen abermals mit dem Diviſor, ſetzt den Quotienten unter die angehängte 0 und addirt beide gefundenen Theile deſſelben. Mit dem Produkte dieſes Theils des Quotienten und des Diviſors verfährt man wie vorhin. Z. B.

```
4) 80 | 20          3) 70 | 20
   80 |                60 |  3
  ---------           -------  ----
    0                  10     23
                    3)  9
                      -------
                        1 Reſt.
```

Dritter Fall. Wäre auch bei den Bedingungen des zweiten Falls, das niedrigſte Zahlzeichen nicht Null, ſo müßte man doch auf eine ähnliche Art verfahren; nämlich

```
6) 84 | 10          4) 47 | 10
   60 |  4             40 |  1
  ------ -----        ------ -----
6) 24   14 Q.       4)  7   11 Q.
   24                   4
  ------              ---------
    0                   3 R.
```

Nach der vorgeſchriebenen Auflöſung ſind die Einer im erſten Falle, und die Einer und Zehner im zweiten und dritten Falle der gefundenen Zahl oder der Diviſoren in der gehörigen Ordnung multiplicirt und die erhaltenen Produkte von den Dividenden ſubtrahirt. Dieſe einzelnen Produkte ſind zuſammen genommen den Dividenden (die Fälle ausgenommen, wo ein Reſt übrig geblieben) gleich. Da nun durch die Theile der Dividenden die Dividenda ſelbſt dividirt, und die Theile der gefundenen Zahlen oder der Quotienten ebenfalls nach einander mit den Diviſoren multiplicirt und den Dividenden (bis auf den Reſt) gleich ſind; ſo ſind die gefundenen Zahlen die verlangten Quotienten (§. 49.).

§. 56.

Das Verfahren in den beiden letzten Fällen (§. 55.) kann man auch ſo abkürzen: wenn auch das Dividendum mehr als zwei Zahlzeichen hat, ſo ſucht man für jedes (oder wenn das höchſte kleiner iſt als der Quotient, für beide) Zahlzeichen des Dividendums, die Theile des Quotienten einzeln, und ſetzt ſie in eine Zeile neben einander; den Diviſor ſchreibt man in jedem Falle vor das Dividendum. Das folgende Beiſpiel wird dies Verfahren erläutern.

Man dividire 96732 durch 4.

```
4) 96732 | 24183
   8....
   -----
   16...
   16...
   -----
    07..
     4..
   -----
     33.
     32
   -----
      12
      12
   -----
       0
```

d. i.

d. i. 4 in 9 iſt zweimal enthalten, denn 2.4 iſt 8, und 8 von 9 giebt 1 Reſt. Zu dieſem Reſte 1 ſchreibt man das folgende Zahlzeichen des Dividendums, nämlich 6 und ſagt: 4 in 16 iſt viermal enthalten; da nun 4.4=16, und 16 mit 16 aufgeht, ſo iſt hier kein Reſt, oder 0. Nun ſchreibt man das folgende Zahlzeichen des Dividendums, nämlich 7 hin, und dividirt abermals, nämlich 4 in 7 iſt 1 mal enthalten u. ſ. w.

Den Beweis für dieſen und alle ähnliche Fälle kann man auch ſo führen: Wenn man weiß, daß 4 in 96732 ſo viel mal als Eins in 24183 enthalten iſt; ſo folgt, es iſt 4.24183=96732. Demnach iſt 24183 der 24183ſte Theil von 96732, oder 24183 iſt der verlangte Quotient.

§. 57.

Die Diviſion läßt ſich auch auf folgende, noch etwas kürzere Art verrichten: Man nimmt z. B. das Dividendum 96732, den Diviſor 4, und ſchreibt den letztern vor das Dividendum und dividirt wie vorhin. Die Produkte des Quotienten mit dem Diviſor aber ſchreibt man nicht unter den zugehörigen Theil des Dividendums, ſondern behält ſie in Gedanken, ſubtrahirt, und ſchreibt die Differenz allein unter, indem man die Zahlzeichen des Dividendums durchſtreicht, von welchen man die erwähnten Produkte ſubtrahirt hat. Die Reſte können ſowohl über als auch unter das Dividendum geſchrieben werden, ſo wie man es am bequemſten findet. Durch Auseinanderſetzung des Beiſpiels wird dies Verfahren noch deutlicher werden:

4) ~~96732~~ | 24183 Quotient.
~~1~~ ~~31~~

Hier iſt 4 in 9, 2 mal; da nun 4.2=8, ſo ſtreicht man 9 durch und ſetzt den Reſt 1 unter 9, denn 8 von 9 bleibt 1. Ferner ſagt man: 4 in 16, 4 mal; da aber hier 4.4=16,

 ſo

ſo bleibt kein Reſt, ſondern 16 wird durchgeſtrichen. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit den übrigen Theilen des Dividendums.

Setzt man den Reſt über das Dividendum, ſo würde die Form ſo ausfallen:

```
    1 31
4) 96732 | 24183 Quotient.

         1 31 | 24183.
   oder: 96732|
         44444
```

§. 58.

Aufgabe.

Jede gegebene Zahl mit einer kleinern zu dividiren.

Aufløſung.

A. in ungenannten Zahlen.

Erſter Fall. Wenn das Dividendum gleich viel Zahlzeichen hat, ſo ſucht man den Quotienten eben ſo, als wenn alle Zahlzeichen, das höchſten ausgenommen, Nullen wären, multiplicirt den Quotienten mit dem Diviſor und ſubtrahirt. Bleibt ein Reſt, ſo muß er kleiner ſeyn als der Diviſor, weil ſonſt der Quotient zu klein wäre. Z. B.

```
245) 980 | 4          278) 981 | 3
     980                   834
    ----                  ----
       0                   147 < als der Diviſor 278.
```

Zweiter Fall. Wenn das Dividendum ein Zahlzeichen mehr hat, als der Diviſor, dieſer aber größer iſt, als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums; ſo nimmt man die zwei höchſten Zahlzeichen des Dividendums zuſammen, das höchſte des Diviſors aber allein, und ſucht den

den Quotienten ſo, als ob die übrigen Zahlzeichen alle Nullen wären. Den gefundenen Quotienten multiplicirt man nun mit dem ganzen Diviſor, ſetzt das Produkt unter das Dividendum und ſubtrahirt, ſo bekommt man entweder den Reſt, oder es geht alles auf. Z. B.

```
7425) 48251 | 6 Q.
      44550
      -----
       3701 Reſt.
```

Wäre aber das höchſte Zahlzeichen des Diviſors kleiner oder eben ſo groß, als das höchſte des Dividendums, und das Dividendum hätte mehr Zahlzeichen als der Diviſor, ſo läßt man die übrigen Zahlzeichen des Dividendums zur Rechten weg, und verfährt wie vorhin. Zum Reſte ſchreibt man alsdenn das folgende Zahlzeichen des Dividendums und ſucht ſo das zweite, und auf eine ähnliche Art auch alle übrige Zahlzeichen des Quotienten. Z. B.

```
4593) 8940573 | 1946
      4593...
      -------
      43475..
      41337..
      -------
       21387.
       18372.
       ------
        30153
        27558
        -----
         2595
```

Dritter Fall. Wenn bey fortgeſetzter Rechnung irgend einmal der Reſt mit dem beigeſchriebenen folgenden Zahlzeichen des Dividendums zuſammengenommen kleiner, als der Diviſor, ſo wird der Quotient Null. Da kein Produkt in Zahlenwerthen entſteht, wenn ein Faktor 0 iſt, ſo bleibt alles ungeändert, und man ſchreibt das folgende Zahlzeichen des Dividendums neben die vorigen, und ſucht abermals den Quotienten. Iſt er wieder 0, ſo ſetzt man

dieſes Verfahren ſo lange fort, bis der Quotient ein geltendes Zahlzeichen giebt, oder völlig gefunden iſt. Z. B.

```
359241) 4756908764 | 13099
        359241....
        ----------
        1113288...
        1077723...
        ----------
         3556576.
         3233169.
         --------
          3234074
          3233169
          -------
              905 < 359241.
```

Vierter Fall. Wenn der Diviſor 10 iſt, und das Dividendum enthält zur Rechten mehrere **Nullen**, ſo hat man wirklich dividirt, wenn man die niedrigſte Null des Dividendums wegſtreicht. Eben ſo, wenn der Diviſor 100 oder 1000 ꝛc. nimmt man ſo viel Nullen zur rechten Hand des Dividendums weg, als der Diviſor hat. Hiernach iſt (§. 42.) die Zahl $526000 : 10 = (52600 . 10) : 10 = 52600$.

Iſt der Diviſor 1 mit einer Menge von Nullen, und das Dividendum hat zur Rechten eine eben ſo große Menge Nullen, ſo iſt der Quotient die Zahl des Dividendums, die den Nullen vorangeht; z. B. $526000 : 1000 = 526$.

Enthält das Dividendum zur Rechten mehr Nullen als der Diviſor, ſo iſt der Quotient der Zahl des Dividendums gleich, weniger ſo viel Nullen, als der Diviſor hat: z. B. $74820000 : 100 = 748200$.

Wenn der Diviſor 10 oder 100 oder 1000 ꝛc. iſt, und das Dividendum hat zur Rechten keine Nullen, ſo ſchneidet man vom Dividend ſo viele Zahlzeichen ab, als der Diviſor Nullen hat. Dieſe abgeſchnittenen Zahlzeichen ſind der Reſt, und was zur Linken ſtehen bleibt, der Quotient. So iſt $45369 : 1000 = 45 + (369 : 1000)$.

Auf

Auf dieſelbige Art laſſen ſich auch folgende Fälle behandeln:

a) Wenn das Dividendum am Ende keine, der Diviſor aber mehrere Nullen hat, und ſein höchſt s Zahlzeichen nicht Eins iſt, ſo dividirt man wie gewöhnlich, nachdem man ſo viele Zahlzeichen vom Dividend abgeſchnitten, als der Diviſor Nullen hat; z. B.

```
24) 456|724 | 19   oder 12) 4283|51 | 356
    24.|000                 36..|00 |
    ---                     ----
    216                      68.
    216                      60.
    ---                      ---
     0                        83
                              72
                             ---
                              11 alſo 1151 Reſt.
```

b) Endigen ſich, das Dividendum ſowohl als der Diviſor, auf eine gleiche Anzahl Nullen, und der Diviſor hat vor den Nullen ein oder mehrere Zahlzeichen, ſo hebt man die Nullen gegen einander auf, und dividirt wie vorhin; z. B.

```
6) 354|00 | 59
   30.|00 |
   ---
    54
    54
   ---
     0
```

Bliebe aber in einem ſolchen Falle ein Reſt, ſo müßte man dieſem noch die vom Dividend weggeſtrichenen Nullen beifügen; z. B.

```
6) 357|00 | 59
   30.|00 |
   ---
    57 ..
    54 ..
   ------
   300 Reſt.
```

c) Hat unter den vorigen Bedingungen das Dividendum am Ende mehr Nullen als der Diviſor, ſo ſchneide man nur ſo viele ab, als der Diviſor hat, und dividire; z. B.

```
15) 43780|00 | 2918
     30..|00 |
    ——————
     137....
     135....
    ——————
       28...
       15...
    ——————
       130..
       120..
    ——————
        10 00 Reſt.
```

d) Hat aber das Dividendum zur Rechten weniger Nullen als der Diviſor, ſo ſchneide man ſo viele Nullen und andere Zahlzeichen zuſammen genommen ab, als der Diviſor hat und dividire; z. B.

```
2) 125|600 | 62
    12.|000 |
   ——————
     5...
     4...
   ——————
     1 600 Reſt.
```

B. In benannten und mehrerleinamigen Zahlen. Z. B. man theile 145 Thlr. 12 gr. in 6 Theile. Was kommt auf einen Theil? 24 Thlr. 6 gr.

```
Man ſetze: 6: 145 Thlr. 12 gr.
               21
           ——————————————
               24 Thlr.  6 gr.
```

Das heißt: 6 in 14 iſt 2 mal enthalten, denn 2 mal 6 iſt 12, und 12 von 14 bleibt 2, und mit der folgenden 5 = 25. Nun ſagt ferner: 6 in 25 iſt 4 mal enthalten. Und 4 mal 6 iſt

6 iſt 24, und 24 von 25 läßt 1 Reſt. Mithin iſt der Quotient 24 Thaler, welche unter die Stelle der obern Thaler geſetzet werden. Nun bleibt aber aus 145 Thlr. noch Ein Thaler Reſt. Zu dieſem nimmt man die folgenden 12 gr. = 1 Thlr. + 12 gr. = 36 gr. In dieſe 36 gr. dividirt man wiederum mit dem Diviſor der 6, und ſagt: 6 in 36 iſt 6 mal enthalten. Denn 6 mal 6 iſt 36, und 36 — 36 = 0. Schreibt man dieſe 6 gr. noch zum Quotienten neben die Thaler; ſo iſt der ganze Quotient 24 Thlr. 6 gr. Und 24 Thlr. 6 gr. 6 mal genommen, oder mit der 6 multipliciret, geben wiederum das Dividendum 145 Thlr. 12 gr. Folglich iſt richtig dividiret worden.

Nun folgen noch einige Aufgaben zur Uebung:

Man dividire 8436 mit 6. Was kommt? 1406.

24: 8688 = 362.

362: 8688 = 24.

32: 22368 = 699.

699: 22368 = 32.

21: 142569 = 6789.

Endlich 6789: 142569 = 21.

Anmerkung. I.

Sollen die Größen der kleinern Sorten in Größen von größern Sorten verwandelt werden; ſo wird mit der Anzahl der kleinern, die in den größern enthalten iſt, die gegebene Zahl der kleinern Sorten dividiret. Z. B.

Wie viel machen 1584 Groſchen an Thalern aus? 66 Thaler.

24: 1584 | 66 Thaler.
144

Ferner:

Ferner: Was betragen 65310 Pfennige in Thalern ꝛc.? 226 Thlr. 18 gr. 6 pf.

24
12: 65310 | 5442 | 226 Thlr. 18 gr. 6 pf..
536 pf. 668
11 = gr.

Wie viel geben 10778 Schuh, funfzehnſchuhigte Ruthen? 718 Ruthen 8 Schuh.

Anmerkung 2.

Kann der Diviſor nach dem Einmal Eins in gleiche Theile getheilt werden; ſo kann man mit ſolchen durch die Zerfällung eben auf die Weiſe dividiren, als in der Multiplikation multipliciret worden. Z. B.

76 Thaler in 24 Theile getheilt. Was kommt auf Einen dergleichen Theil? 3 Thlr. 4 gr.

Denn es iſt: 24 = 4.6: 76 Thlr.
19
1 = 24 gr.
3 Thl. 4 gr.

Hier heißt es: 4 in 76 iſt 19 mal enthalten; denn 4 mal 19 = 76. Ferner: 6 in 19 iſt 3 mal enthalten; das ſind 3 Thaler, denn 3.6 = 18, und 18 von 19 läßt noch 1 Thlr. übrig. Da nun 1 Thlr. = 24 Groſchen, ſo ſagt man endlich: 6 in 24 gr. iſt 4 mal enthalten; denn 4.6 = 24, und 24 — 24 = 0. Daher ſetzt man den Quotienten der 4 gr. auch neben den Quotienten der Thaler und die verlangte Zahl iſt 3 Thlr. 4 gr.

§. 59.

Wenn man vorhergehende Aufgaben in genannten und mehrerleinamigen Zahlen nur einigermaßen genau betrachtet; ſo kommen ſie mit denjenigen vollkommen überein, welche ſonſt von den Rechnungslehrer in die Regel De-

tri

tri pflegen geſetzt zu werden. Denn wenn man ſagt: 76 Thlr. in 24 Theile getheilt; ſo iſt es eben ſo viel, als wenn man ſagt:

Wenn 24 Stück 76 Thlr. gelten, was kommt 1 Stück? 3 Thlr. 4 gr.

Mithin rechnet man zu dieſem Abſchnitte auch zugleich alle Aufgaben, die, wenn ſie in drey Sätzen gegeben werden, zum letzten Satze eine 1 haben. Denn ſie ſind nichts anders, als Aufgaben, die durch die Diviſion aufgelöſet werden. Hiervon folgen noch einige:

1) Auf 99 Klaftern aufgeſpalten zweielliges Holz werden 11880 Cubikſchuh gerechnet. Wie viel kommt auf eine Klafter? 120 Cubikſchuh.

2) Wenn ein Förſter in 6 Jahren 149 Scheffel 1 Viertel Neujahrsgetreide bekommt. Wie viel kann er auf ein Jahr rechnen? 24 Schffl. 3 Vrtl. 2 Metzen.

3) Wenn man für 36 Klaftern 54 Thlr. 18 gr. zahlen muß; was gilt Eine Klafter insbeſondere? 1 Thlr. 12 gr. 6 pf.

4) 72 Klaftern hartes Holz ſind mit 156 Thlr. bezahlet worden; wie theuer hat der Verkäufer 1 Klafter gerechnet? 2 Thlr. 4 gr.

5) Wenn ein Holzſchläger in 6 Wochen 9 Thaler verdient. Was iſt ſein Tagelohn excl. der Sonntage? 6 gr.

6) In 77 Sechzigern ſind 277200 Scheitchen enthalten; wie viel Scheitchen werden wohl auf Einen einzigen Sechziger gerechnet? 3600 Scheitchen.

7) Wenn auf 2763 Malter 176832 Cubikſchuh gerechnet werden; wie viel kommen auf Einen Malter? 64 Cubikſchuh.

8) Wenn

8) Wenn 27 Centner 9918 Mfl. 18 gr. gelten; was kommt auf Einen? 367 Mfl. 7 gr. 8 pf.

9) Der Förſter zu N. hat letzthin 28 Stück Wellen verkauft, und dafür 182 Thaler einberechnet; wie theuer hat er Ein Stück verhandelt? 6 Thlr. 12 gr.

10) Es ſind für 18 Schock Hopfenſtangen 30 Thaler erlegt worden; wie theuer iſt ein Schock bezahlt worden? 1 Thlr. 16 gr.

Anmerkung.

Auf den Satz §. 50. gründet ſich die Probe der Multiplikation und Diviſion.

1. Probe der Multiplikation.

A. in ungenannten Zahlen.

Man dividirt das Produkt durch den einen Faktor, ſo erhält man den andern als Quotient. Es ſey 48 das Multiplikandum, 6 der Multiplikator, und das Produkt 288. Denn es iſt

```
6) 288 | 48 Quotient = Multiplik.
   24
  ----
    48
    48
```

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Hätte man 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. mit 6 multiplicirt, und 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. erhalten, ſo wäre das Multiplikandum 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. der Multiplikator 6; das Produkt aber 171 Thlr. 20 gr. 6 pf.

Nun

Nun ſey 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. das Dividendum,

der Diviſor 6) 12
51 | 28 Thl.
48
3
34
72 } gr.
+ 20
6) 92 | 15 gr.
6
32
30
2
12
24
+ 6
6) 30 | 5 Pf.
30

alſo 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. das Multiplikandum = dem Quotienten.

2. Probe der Diviſion.

A. in ungenannten Zahlen.

Man multiplicire den Quotienten mit dem Diviſor, und addire den etwa gebliebenen Reſt dazu, ſo hat man das Dividendum. Es ſey das Dividendum 980, der Diviſor 245, und der Quotient 4. Nun multiplicire man, ſo iſt

245
4
980 das Produkt = dem Dividendum.

Bayerische Staatsbibliothek München

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Iſt 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. der Quotient, 6 der Diviſor und 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. das Dividendum, ſo multiplicire man und es iſt.

```
 28 Thlr.      15 gr.       5 pf.
  6             6           6
 ---           ---         ---
 168            90     12) 30 | 2 gr.
   3          + 2          24
 ---          ----         ---
 171 thl.  24) 92 | 3 thl.  6 Pf.
               72
              ----
               20 gr.
```

alſo 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. der Quotient = dem Multiplikandum.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit Brüchen und gemiſchten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Brůchen überhaupt.

§. 60.

Da Brüche nichts anders ſind als Theile des Ganzen (§. 5.) oder der Einheit, ſo kommen ſie mit den mehrerleinamigen Zahlen in ſofern überein, als die Theile des Ganzen bei den letztern Zahlen durch Wörter, bei den erſtern aber durch Zahlzeichen oder Ziffern ausgedrückt werden. So iſt z. B. Thaler das Ganze, Groſchen und Pfennige aber ſind Theile; auf eine ähnliche Art iſt Eins das Ganze, die Hälfte aber, oder das Drittel (der dritte Theil), Viertel (der vierte Theil) ſind Theile. Hieraus ergiebt ſich die Art, wie man die Brüche auszudrücken pflegt. Man hat nämlich zwei Zahlen nöthig, wovon die eine anzeigt, in wieviel gleiche Theile Eins, die Einheit oder das Ganze getheilt iſt, die andere aber den Theil der Einheit oder die Menge der Theile angiebt, die der Bruch enthält; die erſtere heißt der Nenner, und die letztere der Zähler. Das Zeichen der Brüche iſt das Zeichen der Diviſion oder der Strich, weil ein Bruch auch als ein Quotient angeſehen werden kann, der entſteht,

wenn man ein kleineres Dividendum durch einen größern Diviſor dividiren ſoll. Der Zähler kommt über und der Nenner unter den Strich, weil jener das Dividendum, dieſer aber den Diviſor vorſtellt. So iſt, wenn 1 z. B. in 4 gleiche Theile getheilt wird, und man nimmt 1 oder 2 oder 3 ſolcher gleiche Theile, der Bruch $\frac{1}{4}$ oder $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{4}$, wo denn 1 und 2 ſo wie 3 die Zähler ausdrücken, 4 aber den Nenner anzeigt. Demnach wäre jeder Bruch ein Quotient, den man findet, wenn man den Zähler zum Dividendum und den Nenner zum Diviſor macht; ſo auch umgekehrt (§. 50.). Folglich iſt der Theil eines Quotienten, in den Fällen, wo zuletzt ein Reſt bleibt (§. 55—58.), der in weiter keine Betrachtung kam, ein Bruch, deſſen Zähler der gebliebene Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt. Z. B. $27:5=5+\frac{2}{5}$.

Wird ein Bruch blos allein durch ſeinen Zähler und Nenner ausgedrückt, ſo heißt er ein ungenannter; wird aber auch zugleich der Name der Einheit angezeigt, ein genannter Bruch. So ſind $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ungenannte; $\frac{3}{4}$ Rthlr., $\frac{5}{8}$ Pfund aber genannte Brüche (§. 6.).

§. 61.

Wenn Brüche einerlei Namen oder gleich große Nenner haben, ſo ſind ihre einzelnen Theile gleich groß; folglich kann man die Größe des einen Bruchs, gegen die Größe des andern, aus der Vergleichung der Zähler finden.

Iſt der Zähler des einen Bruches Eins, und der Zähler der andern jede andere beliebige Zahl, ſo iſt der erſtere gleichſam die Einheit, wornach die Größe der andern geſchätzt wird. So vielmal als alſo dieſe Eins im Zähler des andern Bruchs enthalten iſt, ſo vielmal enthält überhaupt der letztere den erſtern. Z. B. es ſei $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wo $\frac{1}{4}$ die Einheit und $\frac{3}{4}$ das Ganze iſt. Da nun die

die Nenner gleich ſind, und 1 in 3 dreimal enthalten, ſo ſieht man, daß auch $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$, 3mal enthalten iſt. Auch kann man 3 als die Zahl ſelbſt, $\frac{1}{4}$ aber als den Namen derſelben betrachten, denn es iſt $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$.

Der obige Satz aber gilt auch für die Nenner. Wenn daher zwei Brüche einerlei Zähler haben, ſo hängt ihre Größe gegen einander, von der Größe ihrer Nenner ab. So iſt $\frac{3}{4}$ zweimal ſo groß als $\frac{3}{8}$, weil $3 = 3$, 4 aber in 8 zweimal enthalten iſt. Demnach iſt überhaupt ein Bruch in dem andern zwei- drei- oder viermal enthalten, wenn der Nenner des einen im Nenner des andern ſo vielmal enthalten iſt, vorausgeſetzt, daß die Zähler gleich ſind.

Alſo beruhet die Größe der Brüche bei einerlei Nenner, auf der Größe der Zähler; bei einerlei Zähler aber auf der Größe der Nenner.

§. 62.

Man kann einen von den gleichen Theilen eines Bruches ſo vielmal nehmen, daß man eine Größe erhält, welche alle Theile zuſammen begreift, die entweder dem Ganzen gleich, oder noch größer iſt, als das Ganze, und in beiden Fällen die Größe doch noch wie einen Bruch ſchreiben. So iſt z. B. $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ u. ſ. w. eben ſo groß, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ u. ſ. w. aber größer als das Ganze. Ausdrücke dieſer Art pflegt man unächte Brüche zu nennen (§. 5.).

Die ächten Brüche erkennt man daran, daß der Zähler kleiner als der Nenner iſt; die unächten Brüche aber daran, daß der Zähler entweder eben ſo groß, oder größer iſt, als der Nenner. So iſt z. B. $\frac{3}{4}$ ein ächter Bruch, weil ſein Zähler kleiner als ſein Nenner iſt, denn es iſt offenbar $3 < 4$; $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$ aber ſind unächte Brüche, weil $3 = 3$, $4 = 4$ iſt, und um ſo mehr

auch $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, denn hier iſt $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, ſo auch $\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$.

Unächte Brüche, welche die Einheit ein- oder mehreremale und noch etwas darüber enthalten, nennt man, wenn ſie ſo geſchrieben werden, anſtatt $\frac{4}{3}$, $1 + \frac{1}{3}$; anſtatt $\frac{5}{4}$, $1 + \frac{1}{4}$; anſtatt $\frac{19}{5}$, $3 + \frac{4}{5}$, gemiſchte Zahlen, und drückt ſie gewöhnlich ſo aus: Man ſchreibt nämlich anſtatt $1 + \frac{1}{3}$ kurz $1\frac{1}{3}$, anſtatt $1 + \frac{1}{4}$ kurz $1\frac{1}{4}$, anſtatt $3 + \frac{4}{5}$ kurz $3\frac{4}{5}$.

§. 63.

Aus §. 62. folgt: Man kann jede ganze Zahl (wenn es nöthig oder vortheilhaft iſt) in einen unächten Bruch von einem vorgeſchriebenen Nenner verwandeln, wenn man nämlich die ganze Zahl mit dem vorgeſchriebenen Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Produkt zum Zähler, den Multiplikator aber zum Nenner macht. So wird 6 in einen Bruch, deſſen Zähler 7 iſt, verwandelt, wenn man 6 durch 7 multiplicirt und das Produkt ebenfalls durch 7 dividirt, oder $\frac{6 \cdot 7}{7} = \frac{42}{7}$; denn es iſt $\frac{42}{7} = 6$, oder $(6 \,.\, 7) : 7 = 6$, weil eine Zahl durch eine andere multiplicirt, und durch eben dieſelbe zu gleicher Zeit dividirt, ihren Werth nicht ändern kann.

§. 64.

Will man die Größe eines Bruchs gegen Eins, die Einheit, oder das Ganze d. i. ſeinen Werth beurtheilen, ſo muß man nicht nur die Mengen ſeiner Theile, folglich die Größe des Zählers, ſondern auch die Größe dieſer Theile, in welche das Ganze getheilt iſt, das iſt, ſeinen Nenner in Betrachtung ziehen.

Auch können Brüche eben ſo wie ganze Zahlen durch andere vorgeſchriebene Zahlen vermehrt und vermindert werden, und zwar kann beides auf eine doppelte Art,

nämlich

nämlich durch Multiplikation und Diviſion geſchehen, nämlich:

Wenn man den Zähler eines Bruches mit einer vorgeſchriebenen ganzen Zahl multiplicirt, und den Nenner ungeändert läßt, oder den Nenner mit dieſer Zahl dividirt, und den Zähler nicht ändert, ſo wird in beiden Fällen der Bruch ſo vielmal größer, als der Multiplikator oder der Diviſor Einheiten hat. Dividirt man hingegen blos den Zähler des Bruchs, oder multiplicirt man blos den Nenner deſſelben, ſo wird der Bruch ſo vielmal kleiner, als der Diviſor oder Multiplikator Einheiten enthält.

Denn es ſei z. B.

1) $\frac{6}{8}$ gegeben, und 2 ſei die vorgeſchriebene Zahl, ſo iſt $\frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{12}{8} = 2 \cdot \frac{6}{8}$, und $\frac{6}{8:2} = \frac{6}{4} = 2 \cdot \frac{6}{8}$. Da nun $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$ (§. 61.), ſo iſt auch $\frac{6}{8}$ die Hälfte von $\frac{6}{4}$.

2) wie vorhin $\frac{6}{8}$ gegeben, und 2 ſei auch hier die vorgeſchriebene Zahl, ſo iſt $\frac{6:2}{8} = \frac{3}{8} = \frac{6}{8} : 2$, und $\frac{6}{8 \cdot 2} = \frac{6}{16} = \frac{6}{8} : 2$. Da nun auch in dieſem Falle $\frac{1}{16}$ die Hälfte von $\frac{1}{8}$ (§. 61.), ſo iſt auch $\frac{6}{16}$ die Hälfte von $\frac{6}{8}$.

Hieraus ergiebt ſich: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder ſeinen Zähler mit ihr multiplicirt, oder ſeinen Nenner damit dividirt; ein Bruch aber wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder ſeinen Zähler mit ihr dividirt, oder ſeinen Nenner damit multiplicirt.

Anmerkung.

Im allgemeinen kann man ſich merken, daß die Multiplikation und Diviſion der Zähler der Brüche, eben die Wirkung hat, wie bei ganzen Zahlen, d. i. die Multiplikation der Zähler vermehrt und die Diviſion der

Zähler vermindert die Brüche; die Multiplikation und Diviſion der Nenner hingegen hat eine der vorigen gerade entgegengeſetzte Wirkung, d. i. die Multiplikation der Nenner vermindert, und die Diviſion der Nenner vermehrt den Werth der Brüche.

§. 65.

Aus §. 63 und 64. folgt auch, daß wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruches ungeändert bleibt. Multiplicirt man z. B. $\frac{3}{4}$ mit 6 im Zähler und Nenner, ſo erhält man $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$, denn durch die Multiplikation des Zählers mit 6, wird der Bruch 6mal größer, und es iſt $\frac{3 \cdot 6}{4} = \frac{18}{4}$; durch die Multiplikation mit 6 im Nenner aber wird der Bruch 6mal kleiner, und es iſt $\frac{3}{4 \cdot 6} = \frac{3}{24}$, folglich heben beide Veränderungen an einerlei Bruch einander auf, und es iſt $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

Dividirt man hingegen z. B. $\frac{18}{24}$ durch 6 im Zähler und Nenner, ſo erhält man $\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$, denn durch die Diviſion des Zählers mit 6, wird der Bruch 6mal kleiner, und es iſt $\frac{18:6}{24} = \frac{3}{24}$; durch die Diviſion mit 6 im Nenner aber, wird der Bruch 6mal größer, und es iſt $\frac{18}{24:6} = \frac{18}{4}$, folglich heben auch dieſe beiden Veränderungen an einerlei Bruch einander auf, und es iſt $\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$.

§. 66.

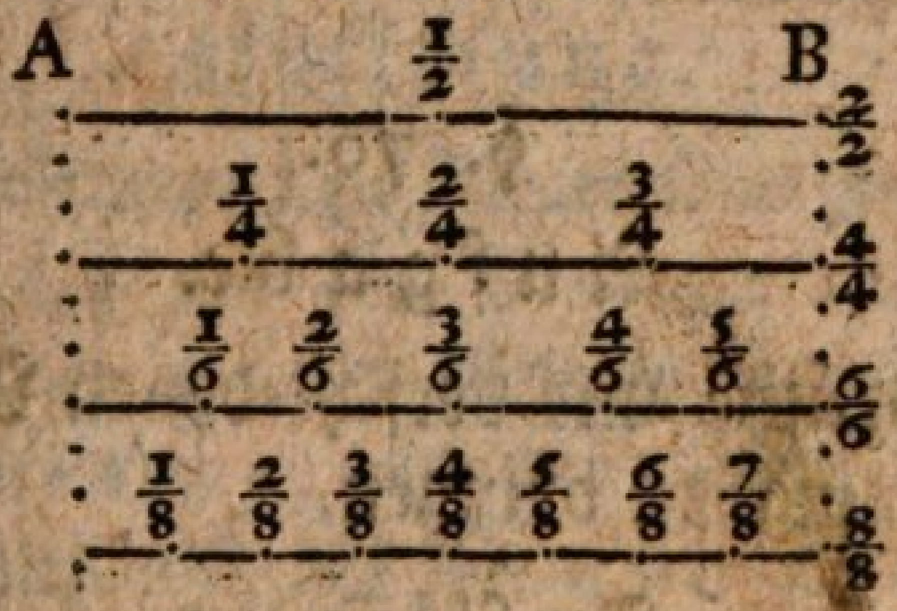
Hieraus ergiebt ſich, daß Brüche einerlei Größe, oder einen gleichen Werth haben können, wenn ſie auch durch verſchiedene Zahlzeichen ausgedrückt, oder mit verſchiedenen Ziffern geſchrieben ſind; denn, wenn die Zähler verſchiedener Brüche in ihrem Nenner gleich vielmal enthalten ſind, ſo müſſen auch die Werthe, folglich die Brüche ſelbſt gleichgroß ſeyn (§. 63.).

§. 67.

§. 67.

Von dieſen Sätzen kann man ſich auch durch Hülfe einer oder mehrerer Linien überzeugen:

Es ſei z. B. AB das Ganze, $AC = BC = \frac{1}{2} AB$, alſo die Hälfte von AB. Wird nun die Linie AB in 4 gleiche Theile getheilt, ſo iſt $\frac{1}{4}$ von dieſer Linie auch nur halb ſo groß als $\frac{1}{2}$; nimmt man aber $\frac{2}{4}$ ſo hat man eben ſo viel als vorhin an AC, alſo iſt $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Theilt man ferner AB in 6 gleiche Theile, ſo iſt $\frac{1}{6}$ von AB 3mal kleiner, als $\frac{1}{2}$; nimmt man aber 3 ſolcher Theile, ſo hat man $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Demnach iſt auch, wenn AB in 8 gleiche Theile getheilt wird, $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



§. 68.

Dieſes leitet zugleich darauf, Brüche unter vielerlei Formen auszudrücken, ohne daß ihr Werth geändert wird. So iſt nicht nur, wie vorhin $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ſondern auch $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} = \frac{12}{24}$ u. ſ. w. Auch kann man hiernach ganze Zahlen in der Form eines unächten Bruchs ausdrücken, z. B. $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ u. ſ. w. ſo auch $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5}$ u. ſ. w.

Anmerkung.

Das letzte Verfahren, ganze Zahlen wie Brüche zu ſchreiben, ſcheint unnöthig zu ſeyn, iſt es aber nicht. Kommt man in Fälle, wo ganze Zahlen und Brüche mit einander vermehrt oder vermindert werden ſollen, ſo kann man alle gegebenen Zahlen als Brüche ausdrücken, und ganz allein nach Bruchregeln rechnen, da man ſonſt genöthiget wäre, Regeln für ganze Zahlen

und Brüche zuſammen zu ſetzen. So hat jede Form ihren Nutzen, wenn auch in manchen Fällen einen etwas entfernten.

§. 69.

Auf den erwähnten Lehren beruht eine doppelte Veränderung der Brüche, nämlich Brüche mit verſchiedenen Nennern auf gleich große Brüche von einerlei Nenner, und durch große Zahlen ausgedrückte Brüche auf ſolche zu bringen, die kleinere Zahlen, und doch den vorigen Werth haben. Die erſte Veränderung nennt man: Brüche unter einerlei Nenner oder auf gleiche Benennung bringen; die letzte aber: Brüche aufheben.

§. 70.

Aufgabe.

Zwei Brüche mit verſchiedenen Nennern auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire beide Nenner in einander, ſo giebt das Produkt den gemeinſchaftlichen oder Generalnenner; jeden Zähler aber multiplicire man mit dem Nenner des andern Bruches, ſo erhält man die zu dem Generalnenner gehörigen Zähler beider Brüche. Z. B. ſoll man $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ auf einerlei Benennung bringen, ſo iſt $3 . 4 = 12$ der Generalnenner, und $2 . 4 = 8$, ſo wie $3 . 3 = 9$ ſind die dazu gehörigen Zähler, und es iſt

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \text{ denn } \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3} \text{ (§. 65.);}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \text{ denn } \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4} \text{ (§. 65.).}$$

§. 71.

Geht der Nenner des einen Bruchs im Nenner des andern auf, ſo braucht man nur einen Bruch zu verwandeln,

deln, und das Verfahren wird hierdurch etwas abgekürzt z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{12}$. Da der Nenner 4 im Nenner 12 aufgeht, und 3 zum Quotienten giebt, ſo multiplicire man blos allein Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$, mit dem erhaltenen Quotienten, nämlich $\frac{3.3}{4.3} = \frac{9}{12}$, und es iſt $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, weil $\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$ giebt (§. 65.) und dennoch haben beide Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{12}$ einerlei Benennung.

§. 72.

Aufgabe.

Jede gegebene Anzahl von Brüchen mit verſchiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire den Zähler ſowohl als den Nenner eines jeden Bruchs mit dem Produkte aller übrigen Nenner, ſo erhält man einerlei Nenner für alle Brüche oder den Generalnenner, und die dieſem Nenner zugehörigen Zähler, daß alſo die Form der Brüche, aber nicht ihr Werth geändert iſt (§. 65.). Sollen z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ unter einerlei Benennung gebracht werden, ſo iſt $4.8.6.3.7 = 4032$ der Generalnenner;

denn $$\frac{3 \times 8.6.3.7}{4 \times 8.6.3.7} = \frac{3024}{4032} = \frac{3}{4} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{7 \times 6.3.7.4}{8 \times 6.3.7.4} = \frac{3528}{4032} = \frac{7}{8} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{5 \times 3.7.4.8}{6 \times 3.7.4.8} = \frac{3360}{4032} = \frac{5}{6} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{1 \times 7.4.8.6}{3 \times 7.4.8.6} = \frac{1344}{4032} = \frac{1}{3} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{4 \times 4.8.6.3}{7 \times 4.8.6.3} = \frac{2304}{4032} = \frac{4}{7} \text{ (§. 65.)}$$

§. 73.

Aus dieſem Verfahren ſieht man deutlich, daß man das Produkt der übrigen Nenner erhalten muß, wenn man mit dem Nenner eines jeden in den Generalnenner dividirt. Hierdurch erhält man ein etwas abgekürzteres Verfahren, *jede Anzahl von Brüchen von verſchiedenen Nennern unter einerlei Benennung, oder unter einen Generalnenner zu bringen.* Man darf nämlich nur mit dem Nenner eines jeden Bruchs in den Generalnenner dividiren, und den erhaltenen Quotienten, welcher jedesmal das Produkt der übrigen Nenner enthält, mit jedem Zähler multipliciren, und man erhält den Zähler, der zum Generalnenner gehört; denn auch hierdurch wird der Werth der Brüche nicht geändert, weil man Nenner und Zähler mit einerlei Zahl multiplicirt. So iſt z. B.

	4032		
$\frac{3}{4}$	1008	4024,	alſo iſt $\frac{4024}{4032} = \frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	504	3528,	— $\frac{3528}{4032} = \frac{7}{8}$
$\frac{5}{6}$	672	3360,	— $\frac{3360}{4032} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	1344	1344,	— $\frac{1344}{4032} = \frac{1}{3}$
$\frac{4}{7}$	576	2304,	— $\frac{2304}{4032} = \frac{4}{7}$

§. 74.

Den Hauptnenner kann man auch auf folgende Art ſuchen: Man dividirt die Nenner der gegebenen Brüche in einander, und ſieht, ob einer in mehrern andern oder in

in allen aufgeht; in beiden Fällen dividirt man mit dieſem Nenner, den man das gemeine Maß nennt, in diejenigen Nenner, in welchen er aufgehet, merkt die Quotienten, und läßt die Nenner bei welchen die Diviſion nicht aufgeht, ungeändert. Oft findet man unter den, durch die Diviſion erhaltenen Quotienten und den übrigen Nennern noch einen ſolchen Diviſor, der ein gemeines Maß für alle, oder doch für einige iſt, und dividirt abermals. Die zuletzt erhaltenen Quotienten nebſt den ungeänderten Nennern und gebrauchten Diviſoren als gemeine Maße, bringt man in ein Produkt, welches der Generalnenner iſt. Ein ſolcher Generalnenner iſt unter allen der kleinſte, und die Brüche erhalten durch die Verwandelung in ſolche, die einerlei Benennung haben, ihre kleinſten Formen, d. i. ſie werden durch die kleinſten Zahlen ausgedrückt. So haben z. B. unter den Nennern (§. 72.), 4, 8, 6, 3, 7, die Nenner 4 und 8 das gemeine Maß 4, welches der Diviſor von 4 und 8 iſt. Dividirt man alſo

$$4)\,\frac{4,\ 8,\ 6\ \ 3\ \ 7}{1,\ 2,\ 6,\ 3,\ 7}$$

ſo hat man, ſtatt 4 und 8 die Zahlen 1 und 2 erhalten. Da nun 2 in 2, und auch in 6 aufgeht, ſo erhält man

$$2)\,\frac{1,\ 2,\ 6,\ 3\ \ 7}{1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 7};$$

Nun geht auch 3 in 3 auf, alſo hat man, wenn man mit 3 dividirt, und die Zahlen die nicht mit 3 aufgehen, wie vorhin ungeändert läßt,

$$3)\,\frac{1,\ 1,\ 3,\ 3\ \ 7}{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 7}$$

Werden nun die Diviſoren oder die gebrauchten gemeinen Maße und die zuletzt erhaltenen Quotienten multiplicirt, ſo bekommt man den Generalnenner, nämlich $4.2.3.1.1.1.1.7 = 4.2.3.7$ (weil 1 weder multiplicirt

tiplicirt noch dividirt = 168. Der Grund des Verfahrens beruht auf dem Satze: **Jede Zahl, die in einer andern aufgeht, geht auch im 2, 3, 4 und mehrfachen Produkte dieſer Zahl auf.** Die Verwandelung der Brüche geſchieht übrigens wie vorhin:

168

$\frac{3}{4}$	42	126, alſo iſt $\frac{126}{168} = \frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	21	147, — $\frac{147}{168} = \frac{7}{8}$
$\frac{5}{6}$	28	140, — $\frac{140}{168} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	56	56, = $\frac{56}{168} = \frac{1}{3}$
$\frac{4}{7}$	24	96, = $\frac{96}{168} = \frac{4}{7}$

Vergleicht man dieſe Brüche, die zum Generalnenner 168 haben, mit denen in §. 72, die 4032 zum Generalnenner haben, ſo ſieht man, daß die gegenwärtigen bequemer ausgedrückt ſind, als die vorigen.

Anmerkung.

Das Verfahren in §. 74, welches ſich auf die **Lehre vom gemeinen Maße** gründet, kann hier der Kürze wegen nicht vollſtändiger entwickelt werden. Wer weitern Unterricht verlangt, findet dieſen in den vollſtändigern Lehrbüchern der Mathematik von **Käſtner** und **Karſten**, ſo wie im **erſten** Theile des **Lehrbuches der Mathematik**, von **F. Meinert** (Halle 1789 bei Hemmerde und Schwetſchke). In allen Fällen aber enthält §. 72 die **Hauptregel** zur Verwandelung mehrerer Brüche in ſolche, die einerlei Nenner haben, weil die Nenner der Brüche nicht in allen Fällen gemeinſchaftliche Diviſoren, oder gemeine Maße haben.

§. 75.

Soll man einen Bruch in einen andern, wovon der Nenner vorgeſchrieben iſt, verwandeln, und der Nenner des gegebenen Bruchs geht im vorgeſchriebenen Nenner auf, ſo darf man nur beide Nenner durch einander dividiren, und mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler des gegebenen Bruchs multipliciren (§. 65.). Es ſei z. B. $\frac{2}{3}$ gegeben, und der vorgeſchriebene Nenner ſei 12; da nun 3 in 12, 4mal enthalten iſt, ſo giebt der Nenner 2 mit 4 multiplicirt, den neuen Zähler 8, und es iſt $\frac{8}{12}$ der verlangte Bruch $= \frac{2}{3}$, weil $\frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$ iſt.

§. 76.

Aufgabe.

Brüche aufzuheben, oder durch die kleinſten Zahlen doch ſo auszudrücken, daß ihr Werth nicht verändert werde.

Auflöſung.

Man ſucht eine oder mehrere Zahlen, die im Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aufgehen, und dividirt damit Zähler und Nenner.

Es ſei z. B. $\frac{48}{72} \overset{8}{\Big|} \frac{6}{9} \overset{3}{\Big|} \frac{2}{3}$; oder $\frac{48}{72} \overset{24}{\Big|} \frac{2}{3}$, denn es iſt $\frac{(48:8):3}{(72:9):3} = \frac{2}{3}$, und $\frac{2.8.3}{3.8.3} = \frac{48}{72}$ (§. 65.).

Anmerkung.

Das Aufſuchen ſolcher Zahlen, die im Zähler und Nenner eines Bruches aufgehen, beruht auf Uebung und Probiren, wozu man Multiplikation und Diviſion oder das Einmal Eins nöthig hat. Folgende Regeln ſind im Einmal Eins gegründet, und erleichtern das Aufheben der Brüche:

1) Endigen ſich Zähler und Nenner eines Bruchs auf eins dieſer geraden Zahlzeichen 2, 4, 6, 8, 0, ſo kann man ſie ohne Reſt mit 2 dividiren.

$$\text{z. B. } \frac{24}{26}\overset{2}{\Big|}\frac{12}{13}$$

2) Geben die Zahlzeichen einer Zahl, alſo auch des Zählers und Nenners eines Bruchs, zuſammen addirt 3 oder ein Vielfaches von 3, alſo 3.2, 3.3, 3.4 u. ſ. w., ſo kann eine ſolche Zahl durch 3 dividirt werden.

$$\text{z. B. } \frac{12}{96}\overset{3}{\Big|}\frac{4}{32}, \text{ folglich auch nach n. 1. } \frac{4}{32}\overset{2}{\Big|}\frac{2}{16}\overset{2}{\Big|}\frac{1}{8} \text{ oder}$$

$$\text{weil } 2.2 = 4, \ \frac{4}{32}\overset{4}{\Big|}\frac{1}{8}; \text{ alſo auch, da}$$

$$3.2.2 = 12, \ \frac{12}{96}\overset{12}{\Big|}\frac{1}{8}.$$

3) Geben die Zahlzeichen einer Zahl, alſo auch des Zählers und Nenners eines Bruchs, zuſammen addirt 9 oder ein Vielfaches von 9, alſo 9.2, 9.3, 9.4 u. ſ. w. ſo kann eine ſolche Zahl durch 9 dividirt werden.

$$\text{z. B. } \frac{126}{135}\overset{9}{\Big|}\frac{14}{15}$$

4) Alle Zahlen, die aus zwei gleichen Zahlzeichen beſtehen, alſo auch Zähler und Nenner eines Bruchs können mit 11 dividirt werden.

$$\text{z. B. } \frac{22}{66}\overset{11}{\Big|}\frac{2}{6}, \text{ und nach n. 1. } \frac{2}{6}\overset{2}{\Big|}\frac{1}{3}, \text{ alſo}$$

$$\text{auch da } 11.2 = 22, \ \frac{22}{66}\overset{22}{\Big|}\frac{1}{3}.$$

5)

5) Alle Zahlen, die aus **drei gleichen** Zahlzeichen beſtehen, mithin auch Zähler und Nenner eines Bruchs können mit 37 dividirt werden.

$$\text{Z.B. } \frac{222}{666}\overset{37}{\Big|}\frac{6}{18}, \text{ und nach n. 3. } \frac{6}{18}\overset{3}{\Big|}\frac{2}{6} \text{ folglich}$$

$$\text{auch nach n. 1. } \frac{2}{6}\overset{2}{\Big|}\frac{1}{3}, \text{ alſo } \frac{222}{666} = \frac{1}{3}.$$

6) Endiget ſich eine Zahl auf 5, ſo kann ſie, durch 5 dividirt werden. Auch dieſe Regel läßt ſich auf die Diviſion eines ſolchen Zählers und Nenners eines Bruchs anwenden.

$$\text{Z.B. } \frac{45}{95}\overset{5}{\Big|}\frac{9}{19}$$

7) Endigen ſich Zähler und Nenner mit Nullen, ſo kann man gleich viele im Zähler und Nenner gegen einander wegſtreichen, denn man dividirt alsdenn mit 10, 100, 1000 u.ſ.w. (§. 55 — 58.).

$$\text{Z.B. } \frac{6500}{12900}\overset{100}{\Big|}\frac{65}{129}$$

§. 77.

Weis man auf irgend eine Art die Faktoren des Zählers und Nenners eines Bruchs zu finden, die aber **einfach**, d.i. ſo beſchaffen ſeyn müſſen, daß ſie durch keine Zahl ohne Reſt dividirt werden können (**Primzahlen**), ſo kann, man gleiche einfache Faktoren im Zähler und Nenner wegſtreichen oder weglaſſen und der Bruch erhält dadurch die kleinſte Form oder wird durch die kleinſten Zahlen ausgedrückt.

$$\text{Z. B. } \frac{2310}{9350} = \frac{2.\,7.\,11.\,5.\,3}{5.\,11.\,17.\,2.\,5} = \frac{7.\,3}{17.\,5} = \frac{21}{85}$$

Auf eine ähnliche Art kann man auch, wenn Faktoren, oder ganze Zähler in Faktoren oder ganzen Nennern aufgehen, die Faktoren gegen einander weglaſſen, und man läßt nur die Quotienten, die man durch ſolche Diviſion erhält, ſtehen;

z. B. $\frac{4.6.8}{12.9.16} = \frac{1.6.1}{3.9.2} = \frac{1.2.1}{9.2} = \frac{1.1}{9} = \frac{1}{9}$;

Denn $4.6.8 = 192$, und $12.9.16 = 1728$,

und $\frac{192}{1728} = \frac{192:192}{1728:192} = \frac{1}{9}$.

Anmerkung.

Da das Aufſuchen der einfachen Faktoren großer Zahlen mühſam, und die Regeln dazu verwickelt ſind, ſo bedient man ſich in der Ausübung ſchon berechneter Tabellen, wohin folgende gehören:

Tabellen der Primzahlen und der Faktoren der Zahlen, welche unter 100100, und durch 2, 3, und 5 nicht theilbar ſind. Herausgegeben durch Johann Neumann. Deſſau 1785.

Auch findet man hierher gehörige Tabellen in vollſtändigen Sammlungen mathematiſcher und trigonometriſcher Tafeln; wovon in der Folge.

§. 78.

Eine gemiſchte Zahl richtet man ein, reducirt oder bringt ſie unter einerlei Benennung, wenn man die ganze Zahl in einen unächten Bruch von dem Nenner verwandelt, der dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs gleich iſt, welches geſchieht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs multiplicirt, den Zähler dazu addirt, und den Nenner überdies unter die erhaltene Summe ſetzt.

z. B. $9\frac{4}{5} = \frac{\overset{9\frac{4}{5}}{45 + 4}}{5} = \frac{49}{5}$

Iſt

Iſt die Zahl nicht nur gemiſcht, ſondern auch mehrerleinamig, ſo multiplicirt man ſie mit der Zahl, welche anzeigt, wieviel von der Zahl des kleinern Werthes Eins der größern ausmacht, oder mit der Reduktionszahl, multiplicirt überdies das Produkt mit dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs und addirt dazu den Zähler. Dieſe Summe dividirt durch den Nenner, giebt den unächten Bruch von einem kleinern Namen.

Z. B. Wie viel Viertel eines Groſchen geben 8 Rthlr. $6\frac{3}{4}$ gr.?

Man ſetze: 8 Rthlr.
24 = 1 Rthlr.
———
192
6 gr.
———
198
4 Nenner
———
792
3 Zähler
———
795, alſo $\frac{795}{4}$ gr.

§. 79.

Aufgabe.

Einen Bruch in genannten Zahlen, alſo in Zahl, Maß, Gewicht u. ſ. w in der darauf folgenden kleinern Größe auszudrücken, oder welches einerlei iſt, einen Bruch zu reſolviren.

Auflöſung.

Man nimmt die bekannten Theile der Größe in Zahlen, deren Werth die kleinern Größen in den Größen im Ganzen ausmachen, theilt ſolche durch den Nenner des Bruches, und multiplicirt den Quotienten mit dem Zähler; ſo giebt das Produkt den Werth des Bruchs in ſeinen kleinern Benennungen.

Kann aber die Diviſion nicht ohne Reſt geſchehen, ſo multiplicirt man die Theile des Ganzen mit dem Zähler, und dividirt mit dem Nenner. Das, was übrig bleibt, multiplicirt man ferner mit den Theilen der darauf folgenden noch kleinern Größen, und dividirt das Produkt wieder mit dem Nenner des Bruches, und was endlich bei den allerkleineſten Größen in bekannten und mehrerleinamigen Zahlen übrig bleibt, ſetzt man mit dem Diviſor im Bruche darneben, und man hat den ganzen Werth des Bruchs in bekannten Zahlen. Z. B.

Wie viel ſind $\frac{3}{4}$ Thlr. in Groſchen? 18 gr.

$\frac{3}{4}$: 24 | 6
3
18 gr.

Denn weil 24 gr. der Werth eines Thalers ſind, ſo theilt man mit dem Nenner des Bruchs, 4, und 4 : 24 = 6. Dieſe 6, als den Quotienten, multiplicirt man mit 3, als dem Zähler des Bruchs, und man erhält 3 . 6 = 18 gr.

Ferner: Wieviel ſind $\frac{5}{6}$ Thaler in Groſchen? 20 gr.

$\frac{5}{6}$: 24 | 4 oder $\frac{5}{6}$: 24 | 4 . 5 = 20.
5
20 gr.

Desgleichen: $\frac{5}{7}$ Thaler; was geben ſie in ihren bekannten kleinern Benennungen? 17 gr. 1$\frac{5}{7}$ pf.

$\frac{5}{7}$ Thlr. = 24
5
7 : 120 | 17 gr.
81
12
7 : 12 | 1$\frac{5}{7}$ pf.
5

Weil

Weil hier der Nenner 7 ſich nicht ohne Reſt in 24 dividiren läßt, ſo multiplicirt man 24 . 5 = 120 = dem Zähler des Bruchs, und dividiret alsdenn mit dem Nenner 7 : 120 = 17 gr. + 1. Da hier 1 übrig bleibt, ſo iſt ſolche 1 = 1 gr. Dieſer hat 12 pf. und 7 : 12 giebt 1 pf. + 5. Da nun aber die Pfennige bereits die kleinſten Benennungen des Geldes in unſern Gegenden ſind; ſo werden die 5 überbliebenen Pfennige, die ſich nicht ferner durch 7 theilen laſſen, durch 7 als Bruch ausgedrückt. Daher kommt $1\frac{5}{7}$ pf.

Was geben $\frac{8}{9}$ einer 15 ſchuhigen Ruthe an Schuhen, Zollen und Linien? 13 Schuh, 3 Zoll und $3\frac{1}{3}$ Linien.

$\frac{8}{9}$ Ruth. = 15 Schuh.
8
9 : 120 | 13 Schuh
33
10 = Zoll
9 : 30 | 3 Zoll
3
10 = Linie
9 : 30 | 3 $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{3}$ Linie.
3

Was geben $\frac{5}{8}$ eines Mfl. in kleinern Benennungen? 13 gr. $1\frac{1}{2}$ pf.

$\frac{5}{8}$ Mfl. 21 gr. = 1 Mfl.
5
8 : 105 | 13 gr.
21
12
8 : 12 | $1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$ pf.
4

§. 80.

Aufgabe.

Den gegebenen Werth in Maß, Münze, Gewichte u. ſ. w. in bekannten und mehrerleinamigen Zahlen der kleinern Größen in einen Bruch der größern Größen zu bringen, oder einen Bruch zu reduciren.

Auflöſung.

Man hält den gegebenen Werth der kleinern Größen gegen den Werth der größern Größen, ſo giebt die gegebene Zahl der kleinern den Zähler, und der ganze Werth der kleinern im Ganzen des Größern, den Nenner.

Sind aber zugleich mehrerleinamige Zahlen vorhanden, ſo bringt man ſolche erſt unter einerlei Benennung, und alsdenn ſetzt man ſie in den Bruch. Den Bruch aber hebt man auf (§. 75. 76.).

Was ſind 18 gr. für ein Thalerbruch? $\frac{3}{4}$ Thaler.

$\frac{18}{24}$ Thlr. oder mit 6 dividirt: $\frac{3}{4}$ Thaler.

Weil 1 Thlr. aus 24 gr. beſteht; ſo giebt dieſe 24 den Nenner, und die gegebenen 18 gr. ſind der Zähler.

Was geben 12 gr. 6 pf. für einen Thalerbruch? $\frac{25}{48}$ Thaler.

Hier ſetzt man: 24 = 1 Thlr. — 12 gr. 6 pf. = 2.6 = 12

(2/8   48   24

288 pf. = 1 Thlr.   150 pf. einerlei Benennung.

$$\frac{150}{288} \Big| \overset{6}{\frac{25}{48}} \text{ Thlr.}$$

Was

Was geben 20 gr. für einen Thalerbruch? $\frac{5}{6}$ Thlr. denn $\frac{20}{24}$ durch 4 dividirt iſt = $\frac{5}{6}$.

Endlich 17 gr. $1\frac{5}{7}$ pf. Was ſind ſolche für ein Bruch aus einem Thaler? $\frac{5}{7}$ Thlr.

24 = 1 Thlr. — 17 gr. $1\frac{5}{7}$ pf. . . 2 . 6 = 12

$\frac{2}{6}$	
48	34
288	205
7	7 + 5
2016	1440

288

$\frac{1440}{2016} \Big| \frac{5}{7}$ Rthlr.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition in Brüchen mit ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

§. 81.

Die Summe zweier oder mehrerer Brüche, die gleiche Nenner haben oder auf einerlei Benennung ſind gebracht worden, iſt ein Bruch, deſſen Nenner der Generalnenner der Brüche, der Zähler aber der Summe der gegebenen Zähler gleich iſt. Demnach iſt die Addition der Brüche von der Addition der ganzen Zahlen nur in ſo fern verſchieden als Brüche und ganze Zahlen von einander verſchieden ſind.

§. 82.

Aufgabe.

Brüche zu addiren oder in eine Summe zu bringen.

Auflöſung.

1) Wenn die gegebenen Brüche nicht einerlei Nenner haben; ſo bringt man ſie erſt unter einerlei Benennung (§. 69 — 73.).

2) Man addirt alsdenn ihre Zähler, und in die Summe derſelben dividirt man mit dem Nenner, ſo giebt der Quotient die Ganzen, welche in den Brüchen enthalten; der Reſt aber, wenn einer vorhanden, wird darneben in Bruchform mit dem Nenner geſetzt, und wo möglich nach §. 75 und 76 aufgehoben. Sind

3) zugleich auch Ganze und mehrerleinamige Zahlen zu addiren; ſo zählt man die aus den Brüchen entſtandenen Ganzen zu den dabei ſtehenden Ganzen, und verfährt mit denſelben wie mit ganzen Zahlen.

Z. B. Man ſoll $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{7}$ in eine Summe bringen; und dieſe iſt $2\frac{57}{140}$.

Weil hier keiner von den Nennern in den andern aufgeht, ſo müſſen ſie mit einander multipliciret und unter einen Hauptnenner gebracht werden; dieſer iſt 140, nach welchem ſie unter einerlei Benennung gebracht werden, nämlich:

$$\frac{105 + 112 + 120}{140} = \frac{337}{140} = 2\,\frac{57}{140}$$

Oder man verfährt auf dieſe Art:

```
140
 ⌣
3/4 | 35 | 105
4/5 | 28 | 112
5/7 | 20 | 120
    |    | ―――――――――――――――
    |    | 337 : 140 = 2 57/140.
```

Ferner: Nach den letztern Forſtrechnungen iſt in dem Quartal Crucis, wie folget, berechnet worden, als: $233\frac{7}{8}$ Thlr. + $716\frac{2}{3}$ Thlr. + $897\frac{3}{4}$ Thlr. + $397\frac{5}{8}$ Thlr. + $96\frac{1}{3}$

$+ 96\frac{1}{3}$ Thlr. $+ 88\frac{3}{8}$ Thlr. Was macht die ganze Summe davon? $2430\frac{5}{8}$ Thlr.

Auf folgende Art:

			24
$233\frac{7}{8}$	Thlr.	=	21
$716\frac{2}{3}$	—	=	16
$897\frac{3}{4}$	—	=	18
$397\frac{5}{8}$	—	=	15
$96\frac{1}{3}$	—	=	8
$88\frac{3}{8}$	—	=	9

$2430\frac{5}{8}$ Thl. $87 : 24 = 3 + \frac{15}{24}$; $\frac{15}{24}$ aber $= \frac{5}{8}$ thl.

Einige Aufgaben zur Uebung:

Man addire $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 2\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} = 3\frac{7}{36}$.

$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 2$. Ganze.

Der Förſter zu N. hat in ſeinem Tagebuche folgende Geldeinnahmen für Bau- und Klafterholz, als $13\frac{3}{8}$ Thlr. $+ 29\frac{5}{8}$ Thlr. $+ 9\frac{1}{3}$ Thlr. $+ 33\frac{1}{4}$ Thlr. $+ 16\frac{19}{36}$ Thlr. $+ 20\frac{5}{6}$ Thlr aufgezeichnet. Was beträgt die Summe?

Desgleichen: Man addire 7 Ellen und anderthalb Viertel; 19 Ellen und drittehalb Viertel; 13 Ellen und vierthalb Viertel, uud 10 Ellen und drey Viertel. Was beträgt dieſe Summe? $51\frac{5}{8}$ Ellen.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche mit Brüchen, mit ganzen und mehrerleinamigen Zahlen.

§. 83.

Das Produkt eines Bruches mit einem Bruche iſt wieder ein Bruch, deſſen Zähler das Produkt der

Zähler und deſſen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren iſt.

Werden aber ganze Zahlen mit Brüchen, oder ganze mit gemiſchten Zahlen multiplicirt, und umgekehrt, ſo kann man dieſe in unächte Brüche verwandeln, und man erhält in jedem Falle alsdenn ein Produkt von den erwähnten Eigenſchaften.

Bei der Multiplikation eines Bruches mit einem Bruche kommt indeſſen der Fall vor, daß das Produkt kleiner iſt, als einer der Faktoren, und es ſcheint in dieſem Falle, als wenn die Multiplikation keine wirkliche Multiplikation ſey; auf eine ähnliche Art iſt das Produkt eines Bruchs mit einer ganzen oder gemiſchten Zahl ebenfalls kleiner als die ganze oder gemiſchte Zahl, aber doch größer als der Bruch, der das Multiplikandum ausdrückt. Dieſem ungeachtet bleibt dennoch die Multiplikation in Brüchen auch eine wirkliche Vermehrung. Denn z. B. einen Bruch etwa $\frac{1}{4}$mal nehmen heißt den Bruch nicht ganz, ſondern nur den vierten Theil davon nehmen. So iſt $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$mal genommen, nicht $\frac{1}{4}$, ſondern $\frac{1}{16}$, weil der vierte Theil von $\frac{1}{4}$ wirklich nur $\frac{1}{16}$ iſt; denn theilt man eine gerade Linie in 4 gleiche Theile ein, ſo hat man Viertel der ganzen Linie: ſoll man nun von einem Viertel abermal den vierten Theil, d. i. $\frac{1}{4}$ nehmen, ſo muß man jedes Viertel aufs neue in vier gleiche Theile theilen, ſo daß die ganze Linie nun 16 gleiche Theile hat, und $\frac{1}{4}$ von einem Viertel genommen, iſt daher nichts anders, als $\frac{1}{16}$ von der ganzen Linie. Und ſo muß man auch die Multiplikation in Brüchen verſtehen. Hiernach laſſen ſich auch die Fälle begreifen, wenn ein Bruch mit einer ganzen oder gemiſchten Zahl, oder umgekehrt, multiplicirt werden ſoll.

Anmerkung.

Wer in dieſen Begriffen Schwierigkeit findet, bedenke zur Erläuterung noch folgendes: Wenn man z. B. 4 mit

2 mul=

2 multiplicirt, ſo wird das Produkt 8. Multiplicirt man aber 4 mit 1, ſo iſt das Produkt 4, folglich nur halb ſo groß, als im erſten Fall. Um ſo mehr muß $4 \cdot \frac{1}{2}$ ein kleineres Produkt geben, als $4 . 2$, weil $\frac{1}{2}$ nur halb ſo groß als eins iſt, und das Produkt $4 . 1$ nur halb ſo groß war, als $4 . 2$; demnach muß das Produkt $4 \cdot \frac{1}{2}$ nur 2 ſeyn, weil man 4 wirklich nur ein halbmal, d. i. die Hälfte nehmen ſoll und das iſt keine andere Zahl als 2. Setzt man nun $4 = \frac{4}{1}$, ſo iſt $\frac{4}{1} . \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Daher kann man 1 als die Gränze der Multiplikatoren anſehen. Jeder Multiplikator größer als 1, giebt ein Produkt größer, als das Multiplikandum, und jeder Multiplikator kleiner als 1, alſo jeder ächte Bruch, ein Produkt kleiner als das Multiplikandum, wenn dies, wie hier vorausgeſetzt wird, eine ganze Zahl iſt. Um ſo mehr muß nun das Produkt kleiner ſeyn als einer der Faktoren, wenn beide Zahlen Brüche ſind.

Setzt man dieſe Betrachtung fort, oder ſtellt ſie bei allen vorkommenden Fällen an, ſo muß man richtige Begriffe von dieſer Art von Multiplikation erhalten.

§. 84.

Aufgabe.

Brüche mit Brüchen, oder auch Brüche mit ganzen, vermiſchten und mehrerleinamigen Zahlen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Sind Brüche mit Brüchen zu multipliciren; ſo multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Dieſe beiden Produkte geben die verlangte Zahl, welche oft noch abgekürzt ausgedrückt werden kann.

2) Sind Brüche mit Ganzen zu multipliciren, ſo multiplicire man mit dem Zähler des Bruchs die Ganzen, und ſetze unter das Produkt den Nenner. Iſt der Nenner kleiner als der Zähler, ſo dividirt man ſolchen zu Ganzen und ſchreibt den Reſt, wenn einer übrig bleibt, in Form eines Bruchs mit ſeinem Nenner neben die Ganzen.

3) Sind

3) Sind vermiſchte Zahlen mit vermiſchten Zahlen zu multipliciren, ſo bringt man ſie erſt unter die Theile ihrer Brüche, oder reducirt ſie, und multiplicirt alsdann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und dividirt das Produkt der Zähler mit dem Produkte der Nenner. Der Quotient iſt die verlangte Zahl.

Anmerkung.

Um Zeit beim Rechnen zu erſparen, bringt man vor der Multiplikation alle mögliche Vortheile an, durch die ein Bruch abgekürzt wird, ohne daß man ſeinen Werth ändert, d. i. man hebt die Brüche auf, nach §. 75 u. 76 und nach den Regeln in der dazu gehörigen Anmerkung.

Beiſpiele.

1) Brüche mit Brüchen zu multipliciren.

Man multiplicire $\frac{2}{3}$ mit $\frac{1}{4}$, ſo kommt $\frac{1}{6}$. Denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (§. 75.).

Ferner: $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$. Denn $3 \cdot 7 = 21$ und $5 \cdot 8 = 40$.

Auch kann man Zähler gegen Nenner in beiden Brüchen wegſtreichen, wenn ſie einerlei Größe haben, oder durch einander dividirt werden können (§. 76. Anmerkung); z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{12}$, denn $3 : 3 = 1$, und $2 : 2 = 1$, aber $24 : 2 = 12$. Demnach würde man die Brüche in dieſer Form haben $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$; demnach kann man die Zahlen, die ſich gegen einander aufheben, ausſtreichen, und nur die ſtehen laſſen, die noch multiplicirt werden müſſen. Demnach iſt das vorige Beiſpiel

$$\frac{\not{2}\,1}{\not{3}} \cdot \frac{\not{3}\,1}{\not{2}\not{4}\,12} = \frac{1}{12}.$$

2) Ganze Zahlen mit Brüchen und Brüche mit ganzen Zahlen.

Man multiplicire $\frac{11}{30} \cdot 7 = \frac{77}{30} = 2\frac{17}{30}$.

Fer-

Ferner: Eine Wieſe auf dem Rammelburgiſchen Forſtrevier bringt jährlich 16 Thlr. ein; wie viel kommt auf $\frac{3}{4}$ derſelben Wieſe? 12 Thlr.

Eine andere ohnweit dem rechten Flügel bringt 13 Thaler. Nun verlangt das Dorf N. $\frac{2}{3}$ davon für ſich allein zu nutzen; was muß es geben? $8\frac{2}{3}$ Thlr.

S. verkauft einen Forſt, der mit Birken bewachſen iſt, für 25 Thlr., davon will T. der Käufer, dem C. in eben dem Preiſe, den er gehabt, wieder $\frac{1}{3}$ ablaſſen. Was hat dieſer dafür zu bezahlen? $8\frac{1}{3}$ Thlr.

3) Vermiſchte Zahlen mit ganzen, oder ganze Zahlen mit vermiſchten, oder auch vermiſchte Zahlen mit einem Bruche zu multipliciren. Z. B. Man multiplicire $13\frac{5}{8}$ Thlr. mit 7, ſo iſt

$$13\frac{5}{8}\cdot 7$$

109
7
8: 763 | $95\frac{3}{8}$ Thlr.
4

Oder man multiplicire auf eine kürzere Art die ganze Zahl mit dem Bruche, als: hier ſind $\frac{5}{8}\cdot 7$, ſo kommen $\frac{35}{8}$ oder $4\frac{3}{8}$, welches alsbald in Gedanken geſchehen kann. Und dann multiplicire man die ganzen Zahlen mit den Ganzen und addire das Produkt des Bruches dazu, ſo hat man gleich die verlangte Zahl. Z. B. $13\frac{5}{8}\cdot 7$

$$95\frac{3}{8}$$

Ferner: $12\frac{2}{3}$ Thlr. mit 18, beträgt 228 Thlr.

Ferner: C. hat auf ſeinem Revier 100 Stämme ſchlagen laſſen, um ſolche zu verſilbern. Nachdem dieſes geſchehen, findet er, daß er deren noch $194\frac{3}{4}$ mal ſo viel nöthig habe, um ſeine Schulden zu tilgen. Daher wird gefragt: Wie viel Stämme dergleichen Art ſein Holzförſter

noch

noch zu ſchlagen anweiſen müſſe, um ſeinem Herrn ein Genüge zu leiſten? 19475 Stämme, denn $\frac{194\frac{3}{4} \cdot 100}{19475}$.

Ferner: 100 mal $2\frac{2}{3}$ Thlr., wie viel beträgt das Produkt? $266\frac{2}{3}$ Thlr. Denn

$2\frac{2}{3}$ Thlr. . 100
8
100
3 : 800 | $266\frac{2}{3}$ Thlr.
222

Oder kurz: $\frac{2\frac{2}{3} \cdot 100}{266\frac{2}{3}}$, denn $\frac{2}{3} \cdot 100 = 66\frac{2}{3}$

Auf dem herrſchaftlichen Revier zu B ſind $1\frac{3}{4}$ mal 566 Thaler eingekommen, wie groß iſt das Produkt? $990\frac{1}{2}$ Thlr. Denn

566 . $1\frac{3}{4}$
7 . 7
4 : 3962 | $990\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Thlr.
3

4) Eine gemiſchte Zahl mit einem Bruche oder einen Bruch mit einer gemiſchten Zahl zu multipliciren. Z. B.

Man multiplicire: $13\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$, ſo kommt $9\frac{1}{2}$.

Nämlich: $13\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$
109
2 (2)
24 : 218 | $9\frac{2}{24}$ | $\frac{1}{12}$
2

Oder kürzer: $13\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$
3 : $27\frac{1}{4}$
$9\frac{1}{12}$

Wie groß iſt das Produkt von $23\frac{11}{30}$ mal $\frac{7}{30}$ Thlr.? $5\frac{407}{900}$ Thlr.

Was

Was betragen $24\frac{3}{4}$ mal $\frac{3}{4}$ Thaler? $18\frac{9}{16}$ Thaler. Denn

$24\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ Oder $24\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

99   4 : 72

3      $18\frac{9}{16}$

16 : 297 | $18\frac{9}{16}$

139

5) Gemiſchte Zahlen mit gemiſchten Zahlen zu multipliciren. Z. E. $6\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3} = 30\frac{1}{3}$.

Setzet $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3}$ Oder: $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3}$

13   14 $\frac{13}{2} \cdot \frac{14}{3} \cdot 7 = \frac{91}{3} = 30\frac{1}{3}$.

14

52

13

6 : 182 | $30\frac{1}{3}$.

Oder: $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{13}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{182}{6} = 30\frac{2}{6} = 30\frac{1}{3}$.

$13\frac{5}{8}$ mal $7\frac{2}{3}$ Thlr., wie viel betragen dieſe? $104\frac{11}{24}$ Thlr. Denn

$13\frac{5}{8} \cdot 7\frac{2}{3}$ Oder: $13\frac{5}{8} \cdot 7\frac{2}{3}$

109   23   3 : $27\frac{1}{4}$

23      $9\frac{1}{12}$

327   + $95\frac{3}{8}$

218      $104\frac{11}{24}$

24 : 2507 | $104\frac{11}{24}$ Thlr.

1 . 11

Eben alſo verhält es ſich auch, wenn mehrerleinamige Zahlen mit Brüchen zu multipliciren ſind. Z. B.

8 Thlr. 16 gr. $4\frac{3}{4}$ pf. 6 mal genommen, wie groß iſt das Produkt? 52 Thlr. 2 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

Dieſe

BHS II K 30 1 fl.

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek
Gruppe II K
Nr. 30

Johann Ehrenfried Vierenklee's

Anfangsgründe

der

theoretiſch = praktiſchen

Arithmetik und Geometrie

für diejenigen,

welche ſich dem Forſtweſen widmen.

Nach den gegenwärtigen Bedürfniſſen

verbeſſert und vermehrt

von

Friedrich Meinert,

Profeſſor in Halle.

Mit Kupfern und einem illuminirten Plane.

Leipzig,

in der Weidmanniſchen Buchhandlung

1797.

BIBLIOTHEK DER K.B.GENERAL BERGWERKS U. SALINEN ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Die 1767 in der Weidmanniſchen Buchhandlung erſchienenen Mathematiſchen Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie ꝛc. Vom Herrn Prediger Johann Ehrenfried Vierenklee, haben ſich nun ſeit 30 Jahren in dem Rufe einer guten und zweckmäßigen Anweiſung für ſolche Forſtbediente erhalten, die ihrer andern Geſchäfte wegen nicht Zeit genug entbehren können, ſich mit der Mathematik ſo zu beſchäftigen, daß ſie ohne weitere Anleitung im Stande ſind, Anwendungen auf alle forſtlichen Gegenſtände zu machen, die eine mathematiſche Behandlung entweder nur zulaſſen, oder nothwendig erfordern. —

Herr Bergrath Gatterer, im Allgemeinen Repertorio der Forſtwiſſenſchaftlichen Litteratur (Band. I. Ulm 1796.) S. 15 nennt die Vierenkleeſchen Anfangsgründe, ein deutliches und ſehr gründliches Werk.

Dieſe allgemein günſtigen Urtheile und das Verlangen des Publikums, nachdem die erſte Auflage ſchon mehrere Jahre vergriffen war, beſtimmten die Verlagshandlung, davon eine neue Auflage zu veranſtalten.

Mir wurde die Durchſicht übertragen und der Antrag gemacht, Veränderungen und Verbeſſerungen da anzubringen, wo Theorie und Ausübung ſie nothwendig machten, doch mit der Bitte, Vierenklee's Unterricht nicht ganz zu vernichten.

Nach einer genauen Prüfung der gegenwärtigen Behandlung der Wälder und Forſten fand ich, daß man unter den Offizianten einen dreifachen Unterſchied machen müſſe; ich fand nämlich Unterbediente, die bloß empiriſch in Form und Materie verfahren, und Oberoffizianten, deren Kenntniſſe weit über dieſe Anfangsgründe reichen; eine gewiſſe Mittelklaſſe von Offiziatten aber ſucht ſich vom empiriſchen Verfahren immer mehr zu entfernen, und doch mangelt es dieſen an gehörigen Vorkenntniſſen, ſich deutliche Einſichten in die Mathematik zu verſchaffen, um das gehörig benutzen zu können, was das forſtliche Rechnungsweſen der Allgemeinen Arithmetik und einer gründlichen Anwendung der gemeinen und zum Theil höhern Geometrie verdankt; dieſe Klaſſe ſchien mir das Publikum zu ſeyn, für welches ſich der Vierenkleeſche Unterricht, auch in etwas geänderter Geſtalt immer

mer noch paſſen würde. Nach dieſem Zwecke unternahm ich die gegenwärtige Bearbeitung.

Die größte Erweiterung hat die Arithmetik erhalten, und vorzüglich die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen, die, wenn ſie auch nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung in dem gegenwärtigen Unterrichte angewandt worden iſt, dennoch dazu dienen kann, nach vorkommenden Fällen Erweiterungen zu veranlaſſen, und eine gründlichere Einſicht ins Rechnungsweſen ſo wohl, als in die Geometrie zu befördern. So können z. B. die quadratiſchen und kubiſchen oder überhaupt die zuſammengeſetzten Verhältniſſe und Proportionen unter andern auch auf die Vergleichung der verſchiedenen Flächen und Körper führen, die, wie bekannt, vorzügliche Gegenſtände der Forſtwirthſchaft ſind, und wodurch die Geometrie auch für dieſen Zweck eine wiſſenſchaftlichere Geſtalt erhält.

In der Geometrie iſt die Lehre von Vermeſſung der Gränzen und Aufnahme der Wälder theils erweitert, theils dadurch anwendbarer geworden, daß das Verfahren mehr anſchaulich durch die Beſchreibung derjenigen Inſtrumente geworden iſt, die man als die zweckmäßigſten und bequemſten zu dergleichen Vermeſſung anerkennt. Zu dieſem Zwecke wurde die neue Kupfertafel mit Tab. II.* bezeichnet nöthig, wofür ich die bei der erſten Auflage befindliche und mit Tab. VI. bezeichnete, weggelaſſen habe,

 weil

weil ſie Chartencharaktere enthielt, die theils nicht mehr gebräuchlich, theils aber auch auf dem neu hinzugekommenen illuminirten Plane ergänzt worden ſind. Dieſer Plan, welcher größtentheils nach den Vorſchriften des Preußiſchen Forſtvermeſſungsweſens eingerichtet iſt, ſoll denjenigen Forſtoffiziánten nützen, die in der Jugend weder Zeit noch Gelegenheit gehabt haben, ſich mit der geometriſchen Zeichenkunſt zu beſchäftigen. Durch eigene Uebung, wenn nur eine mäßig gute Anweiſung vorgelegt wird, iſt man alles zu erlernen im Stande.

Theorien, die in neuern Zeiten erſt ausgemittelt worden ſind, und welche höhere forſtwiſſenſchaftliche Kenntniſſe betreffen, habe ich ſo weit in den gegenwärtigen Unterricht aufgenommen, als es die Vorbereitungskenntniſſe verſtatteten, und da, wo ich nicht ausführlich ſeyn konnte, wenn ich auch wünſchte, es ſeyn zu können, iſt die Litteratur beigefügt worden, um jeden wißbegierigen Anfänger zu veranlaſſen, in Kenntniſſen fortzurücken.

Wer ohne zweckmäßige Bildung in forſtwiſſenſchaftlichen Inſtituten, oder ohne höhern Unterricht auf Schulen und Univerſitäten, ſich durch eignen Fleiß zu irgend einer Forſtbedienung herauf gearbeitet hat, und gegenwärtigen Unterricht verſteht, kann es alsdann wagen, in eigentlich mathematiſchen Lehrbüchern, ſichere und gründlichere Kenntniſſe der Arithmetik und Geometrie zu

erler-

erlernen; und wer mit den Elementen der Mathematik einmal vertraut geworden iſt, wird es nicht dabei bewenden laſſen, ſondern auch Unterricht in der allgemeinen Arithmetik ſuchen, um dadurch eine vollſtändige Einſicht in diejenigen mathematiſchen Kenntniſſe zu erhalten, welche für die zweckmäßig zu treibende Forſtwirthſchaft unentbehrlich ſind.

Die allgemeine Arithmetik und Algebra, wenigſtens bis zu den Gleichungen vom 4ten Grade hätte ich noch gern dieſen Anfangsgründen beigefügt, wenn ich nicht beſorgt hätte, dieſe Schrift zu ſehr zu erweitern.

Vielleicht erlauben es meine anderweitigen Geſchäfte, in der Zukunft für diejenigen eine Anleitung zur allgemeinen Arithmetik auszuarbeiten, die keinen Unterricht in dieſer beinah unentbehrlichen Kenntniß erhalten haben, und doch gern Anwendung davon im Forſtweſen machen möchten.

Daß ich keine Mühe geſpart habe, den Vortrag der Vierenkleeſchen Anfangsgründe ganz ſo umzuarbeiten, daß das Buch wieder ein gleichförmiges Ganzes geworden iſt, wird man finden, wenn man die gegenwärtige Auflage mit der erſten vergleicht.

Hat dies nützliche Buch unter meiner Feder auch nur etwas gewonnen, und findet es in dieſer

Geſtalt den vorigen Beifall, ſo wird dies ein Theil der Belohnung für meine Sorgfalt ſeyn, die ich auf die Bearbeitung verwandte.

Kenntniſſe des Forſtweſens verbreiten; und noch mehr, Kenntniſſe dieſes Fachs ausüben, heißt, dem Menſchengeſchlechte auf Jahrhunderte zum voraus ein Mittel zur Befriedigung eines Bedürfniſſes ſchaffen, welches kein kultivirtes Volk mehr entbehren kann.

Halle, den 14ten Sept. 1797.

Friedrich Meinert.

Inhalt.

Allgemeine Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik. §. 1 — 28.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen, dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I. Erklärung und Bezeichnung der Zahlen. §. 1 — 8.

II. Vom Zahlenſyſteme. §. 9 — 14.

III. Allgemeine Begriffe vom Rechnen. §. 15 — 22.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Rechenkunſt. §. 23 — 29.

Drittes Kapitel.

Die vier Rechnungsarten in ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Die Addition. §. 30 — 36.

Zweiter Abſchnitt.

Die Multiplikation. §. 37 — 43.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion. §. 44 — 48.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion. §. 49. — 59.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit denſelben.

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Lehren von den Brüchen. §. 60 — 80.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition der Brüche. §. 81 — 82.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche. §. 83 — 84.

Vierter Abſchnitt.

Die Subtraktion der Brüche. §. 85 — 86.

Fünfter Abſchnitt.

Die Diviſion der Brüche. §. 87 — 88.

Von den gebrochenen Brüchen. §. 89 — 91.

Fünftes Kapitel.

Von den Decimaleintheilungen überhaupt und den Decimalbrüchen insbeſondre.

Erſter Abſchnitt.

Die Decimaleintheilungen. §. 92 — 97.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche. §. 98 — 102.

I. Die Addition. §. 103.

II. Die Multiplikation. §. 104.

III. Die Subtraktion. §. 105.

IV. Die Diviſion. §. 106 — 109.

V. Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. §. 110 — 111.

Sechstes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt. §. 112 — 118.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I. Die Ausziehung der Quadratwurzeln. §. 119 — 134.

II. Die Ausziehung der Kubikwurzeln. §. 135 — 150.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen. §. 151 — 152.

I. Arithmetiſche Verhältniſſe. §. 153 — 155.

II. Geometriſche Verhältniſſe. §. 156 — 161.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen. §. 162 — 164.

I. Arithmetiſche Proportionen. §. 165 — 169.

II. Geometriſche Proportionen. §. 170 — 179.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen und Proportionen. §. 180 — 189.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion. §. 49. — 59.

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit denſelben.

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Lehren von den Brüchen. §. 60 — 80.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition der Brüche. §. 81 — 82.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche. §. 83 — 84.

Vierter Abſchnitt.

Die Subtraktion der Brüche. §. 85 — 86.

Fünfter Abſchnitt.

Die Diviſion der Brüche. §. 87 — 88.

Von den gebrochenen Brüchen. §. 89 — 91.

Fünftes Kapitel.

Von den Decimaleintheilungen überhaupt und den Decimalbrüchen insbeſondre.

Erſter Abſchnitt.

Die Decimaleintheilungen. §. 92 — 97.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche. §. 98 — 102.

I. Die Addition. §. 103.

II. Die Multiplikation. §. 104.

III. Die Subtraktion. §. 105.

IV. Die Diviſion. §. 106 — 109.

V. Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. §. 110 — 111.

Sechstes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt. §. 112 — 118.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I. Die Ausziehung der Quadratwurzeln. §. 119 — 134.

II. Die Ausziehung der Kubikwurzeln. §. 135 — 150.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen. §. 151 — 152.

I. Arithmetiſche Verhältniſſe. §. 153 — 155.

II. Geometriſche Verhältniſſe. §. 156 — 161.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen. §. 162 — 164.

I. Arithmetiſche Proportionen. §. 165 — 169.

II. Geometriſche Proportionen. §. 170 — 179.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen und Proportionen. §. 180 — 189.

Achtes Kapitel.

Anwendung der theoretiſchen Arithmetik, beſonders aber der Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen auf die im Forſtweſen und im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle.

Erſter Abſchnitt.

Anwendung der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 190 — 192.

Zweiter Abſchnitt.

Anwendung der geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen. §. 193.

I. Die einfache Regel Detri.

A. Die gerade oder gemeine einfache Regel Detri. §. 194 — 207.

B. Die umgekehrte einfache Regel Detri. §. 208 — 209.

II. Die zuſammengeſetzte Regel Detri. §. 210 — 211.

A. Die zuſammengeſetzte gerade Regel Detri. §. 212.

B. Die zuſammengeſetzte umgekehrte Regel Detri. §. 213 — 215.

Anwendungen der Regel Detri auf Decimalzahlen. §. 216.

III. Die Regel Multiplex oder die Kettenregel. §. 217.

IV. Die Reeſiſche Regel. §. 218.

V. Die Verbindung der Kettenregel mit der Reeſiſchen. §. 219.

VI. Die Geſellſchafts- und Vermiſchungsregel. §. 220 — 221.

Schlußanmerkung zur Arithmetik. §. 222.

Anfangs-

Anfangsgründe der Geometrie.

Erſter Theil.

Die theoretiſche Geometrie.

Einleitung,

welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 40.

Erſte Abtheilung.

Die Längenmeſſung oder die Euthymetrie. §. 41 — 69.

Zweite Abtheilung.

Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie. §. 70.

I. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Dreiecke. §. 71 — 95.

II. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vierecke. §. 96 — 114.

III. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vielecke. §. 115 — 128.

IV. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Kreiſe und anderer krummliniger Figuren. §. 129 — 145.

V. Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der gemiſchtlinigten Figuren. §. 146 — 148.

Dritte Abtheilung.

Die Körpermeſſung oder die Stereometrie. §. 149 — 168.

Zweiter Theil.
Die praktiſche Geometrie.

Einleitung,
welche Begriffe und Erklärungen enthält. §. 1 — 5.

Erſte Abtheilung.
Angewandte Längenmeſſung oder Euthymetrie im Forſtweſen.

I. Von der Meſſung der Weiten oder Entfernungen. §. 6—11.

II. Vom Höhenmeſſen. §. 12 — 17.

III. Von Durchſchlägen durch Gehölze. §. 18 — 19.

IV. Von Vermeſſung der Gränzen eines Reviers. §. 20—26.

V. Von den Blößen, Wieſen ꝛc. eines Reviers. §. 27 — 28.

VI. Prüfung, ob eine Figur, oder ein Revier richtig aufgenommen worden. §. 29 — 30.

VII. Von der Beſtimmung der Lage eines Reviers nach den Himmelsgegenden und von der Mittagslinie. §. 31 — 32.

VIII. Vom Umfange und dem Durchmeſſer eines Baums. §. 33 — 38.

Allgemeine Anmerkung über Waldvermeſſungen überhaupt.

Zweite Abtheilung.
Die angewandte Flächenmeſſung oder die Epipedometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe ꝛc. §. 39.

I. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſenkrecht aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 40 — 42.

II.

II. Von dem Inhalte der Seitenflächen ſchief aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmalter. §. 43 — 44.

III. Von den Grundflächen der Bäume. §. 45 — 46.

IV. Von der Berechnung des Inhalts eines ganzen Reviers. §. 47 — 48.

V. Von der Eintheilung eines Reviers in Gehaue oder Schläge nach dem Flächeninhalte. §. 49 — 54.

Allgemeine Anmerkung über Schläge und Gehaue.

Dritte Abtheilung.

Die angewandte Körpermeſſung oder die Stereometrie im Forſtweſen.

Vorläufige Begriffe. §. 55.

I. Vom körperlichen Inhalte einer Holzklafter, eines Malters und Sechszigers. §. 56 — 59.

II. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Bäume. §. 60 — 61.

III. Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc. §. 62 — 63.

IV. Von dem Werthe eines jeden Holzſtückes. §. 64 — 65.

V. Von der Taxirung eines jeden Baumes nach dem Holzpreiſe. §. 66 — 67.

VI. Von der Berechnung eines Baumſtammes nach Klafterholz. §. 68 — 69.

VII. Von der Berechnung einzelner Holzſtücke, deren Inhalt einer Klafter gleich iſt. §. 70.

VIII.

VIII. Von der Berechnung der Säulen und Schwellen. §. 71 — 74.

IX. Von der Berechnung der Breter und Latten aus einem Klotze. §. 75 — 77.

X. Von der Zählung der Bäume eines ganzen Reviers nach ihrer verſchiedenen Größe. §. 78 — 79.

XI. Von der Berechnung des Holzbeſtandes auf einem Reviere, deſſen Bäume gezählt worden ſind. §. 80 — 81.

XII. Von dem jährlichen Zuwachſe des Holzes. §. 82 — 85.

XIII. Von den Gehauen, nach welchen man jährlich eine gewiſſe Anzahl Klaftern und Malter, ohne Rückſicht auf den Flächeninhalt ſchlagen kann. §. 86.

Erſter Anhang.

Tafeln und Gebrauchsanweiſung.

Zweiter Anhang.

Beſchreibung der illuminirten Forſt-Charte.

Allgemeine Einleitung

in die

Forſt-Mathematik.

Einleitung.

Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen der Mathematik.

§. 1.

Jedem Gegenſtande, der einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt, legt man eine **Größe** bei, und verſteht daher unter Größe die Eigenſchaft eines Dinges oder Gegenſtandes, nach welcher es einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. So kann z. B. eine **Linie** vermehrt und vermindert werden, desgleichen eine **Zahl**: daher haben Linien und Zahlen, Größe, und werden alſo als **Größen** betrachtet und behandelt. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit andern Gegenſtänden. Demnach nennt man überhaupt dasjenige, was ſich vermehren oder vermindern läßt, und an welchem außer der erwähnten, keine andere Eigenſchaft in Betrachtung kommt, ſelbſt eine **Größe**.

§. 2.

Man erhält Begriffe von einer Größe entweder durch **unmittelbare Betrachtung und Vorſtellung**, oder durch **Vergleichung** mit einer andern **bekannten** Größe, welches letztere wiederum entweder durch unmittelbare Vergleichung oder durch das unſerer Vernunft eigene Geſchäft, durch **Schlüſſe** geſchehen kann. So erhält man z. B. die Größe irgend eines **Fußes** oder ſeine Länge durch unmittelbare Betrachtung; die Größe oder

Länge aber der Entfernung irgend eines Gegenſtandes von einem andern, durch unmittelbare Vergleichung mit der nun ſchon bekannten Länge eines Fußes, das heißt, durch unmittelbare Meſſung; oder man erhält den Begriff von der Länge oder Größe einer Entfernung durch Schlüſſe, die aber eine künſtlichere Operation veranlaſſen.

§. 3.

Durch dieſe Betrachtungen wird man auf den Begriff der Mathematik oder Größenlehre geleitet, welche die Wiſſenſchaft Größen durch Schlüſſe zu finden ausmacht.

§. 4.

Der geſammte Anfang aller Lehren von den Größen, die man ganz allein als Größen, abgeſondert von allen übrigen Eigenſchaften, betrachtet, macht die reine Mathematik aus. So iſt z. B. die Ausmittelung der Größe einer Kugel, deren Durchmeſſer 2 Fuß beträgt, eben ſo ein Gegenſtand der reinen Mathematik, ſo wie die Summirung der Zahlen 5 und 8.

§. 5.

Denkt man ſich eine Größe als eine Menge von Dingen, auf deren Zuſammenhang und Ordnung keine Rückſicht genommen wird, ſo hat man einen Gegenſtand der Arithmetik oder Rechenkunſt. Demnach ſind die Zahlen 4 oder 5 oder 7 ſolche Gegenſtände.

Größen dieſer Art nennt man auch unſtäte oder diskrete Größen; folglich wäre die Arithmetik im allgemeinen Sinne die Wiſſenſchaft der diskreten Größen.

§. 6.

Man kann ſich auch eine Größe als etwas ausgedehntes denken, wobei man auf Zuſammenhang und Ordnung

Ordnung der Theile ſehen muß. Solche Größen nennt man ſtäte Größen und ſie ſind der Gegenſtand der Geometrie; daher iſt auch die Geometrie die Wiſſenſchaft der ſtäten Größen.

Da nun aber die Ausdehnung nur im Raume möglich iſt, und die Stätigkeit der Größen keine andere Eigenſchaft ausdrückt, als ununterbrochen, dem Raume nach fortdauernd, ſo iſt die Geometrie im allgemeinſten Sinne die Wiſſenſchaft des Raums.

§. 7.

Wendet man die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenſtände der Natur und des bürgerlichen Lebens, die entweder als Größen betrachtet werden können, oder wirkliche Größe ſind, an, ſo hat man angewandte Mathematik.

§. 8.

Hiernach wäre die ganze Körperwelt ein Gegenſtand der angewandten Mathematik, und dieſe Wiſſenſchaft würde daher ſo viel Theile erhalten, als es Arten von Gegenſtänden in der Natur giebt, deren Größe ſich beſtimmen läßt. Indeß hat man nur die Hauptarten derſelben ausgehoben, indem ſich die reine Mathematik auf alle anwenden läßt, durch deren Hülfe daher die Größe aller übrigen beſtimmt werden kann.

Dieſe Gegenſtände der Natur, worauf die reine Mathematik hauptſächlich angewendet wird, ſind folgende: die Kräfte der Körper, das Licht und die Himmelskörper oder das Weltgebäude. Daraus ſind alſo drei Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik, nämlich Dynamik, Optik und Aſtronomie entſtanden. Jede dieſer Hauptabtheilungen hat mehrere Unterabtheilungen unter eigenen Namen und von nicht geringem Umfange.

§. 9.

Die Dynamik, Optik und Aſtronomie werden auch phyſiſche Mathematik genannt. Da aber auch andere und der Naturlehre im beſondern Sinne eigene Gegenſtände und Lehren eine mathematiſche Behandlung zulaſſen, wie z. B. die Lehre von dem Schalle, vom Feuer, von der Elektricität u. dergl. ſo nennt man dieſe im beſondern Sinne die phyſiſche Mathematik.

§. 10.

Den Theil der angewandten Mathematik, der die reine Mathematik auf die Gegenſtände des bürgerlichen Lebens enthält, nennt man die bürgerliche oder politiſche Mathematik. Da nun bei der Bearbeitung dieſer Gegenſtände bloß mathematiſche Kenntniſſe nicht zureichen, ſondern mit Kenntniſſen aus verſchiedenen mechaniſchen Künſten verbunden werden müſſen, wenn die bearbeiteten Gegenſtände mit der Ausübung harmoniren ſollen, ſo hat man dieſen Theil der Mathematik die techniſche Mathematik genannt. Hierzu gehören die praktiſche Rechenkunſt, die Land- und Feldmeßkunſt, die Markſcheidekunſt, die praktiſche Maſchinenlehre, die architektoniſchen Wiſſenſchaften, die Schiffkunſt.

§. 11.

Jede Wiſſenſchaft der geſammten Mathematik hat zwei Theile, den gemeinen und höhern. Jenen nennt man die Elementarmathematik, dieſen die höhere Mathematik. Der Unterſchied dieſer beiden Theile ergiebt ſich theils aus dem Umfange und Inhalte, theils aber und zwar beſtimmter aus der Lehrart, die man bei der Behandlung dieſer Wiſſenſchaften anwendet.

§. 12.

Da der letzte Zweck aller Bemühungen unſers Verſtandes darin beſteht, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen mit der wirklichen Beſchaffenheit der Dinge zu erforſchen oder Wahrheit zu finden, ſo muß man ſich bemühen, die Wahrheit zu erkennen. Das ſicherſte Kennzeichen der Wahrheit aber iſt, die Uebereinſtimmung unſerer Vorſtellungen. Jeder Widerſpruch unter denſelben zeigt Irrthum oder Unrichtigkeit. Aus der Vergleichung und Verbindung unſerer Vorſtellungen ſetzen wir Kenntniſſe und Wiſſenſchaften zuſammen.

Den Zuſtand, wenn wir Vorſtellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennt man überhaupt Empfindung. Hieraus begreift man leicht, was die Empfindungskraft ſei. Die Empfindungen ſind äuſſere, wenn ſich die Gegenſtände, welche von uns empfunden werden, außerhalb unſerer Seele befinden; innere hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unſerer Seele vorgehet. Die Kraft Begriffe von Gegenſtänden fortzuſetzen, heißt das Gedächtniß, welches in dem Falle Erinnerungskraft genannt wird, wenn wir erkennen, daß wir den nämlichen Begriff ſchon zu einer andern Zeit gehabt haben. Die Kraft, abweſende Dinge ſich ſo vorzuſtellen, als wenn ſie gegenwärtig wären, wird die Einbildungskraft, und die Kraft Begriffe zu vergleichen und zuſammenzuſetzen, die Beurtheilungskraft genannt. Die letztere Kraft heißt auch der Verſtand oder die Vernunft.

Die vorzüglichſten Wirkungen des menſchlichen Verſtandes ſind: Begriffe, Urtheile oder Sätze und Schlüſſe zu machen. Begriffe oder Ideen entſtehen durch die bloßen Vorſtellungen in unſerer Seele; Urtheile oder Sätze aber, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und endlich Schlüſſe, wenn wir aus zwei oder mehrern Sätzen einen dritten herleiten. Man

nennt daher auch das Vermögen der Begriffe, Verſtand; das Vermögen der Urtheile oder Sätze, die Urtheilskraft; das Vermögen der Schlüſſe aber, die Vernunft.

§ 13.

Dieſe Wirkungen unſers Verſtandes müſſen ſich bei der Erlernung aller Kenntniſſe, vorzüglich aber beim Studium der mathematiſchen Wiſſenſchaften äußern. Um in der Mathematik ſicher zur Erkenntniß der Wahrheit zu gelangen, beobachtet man folgenden Gang oder folgende Lehrart (Methode):

Man ſchickt Erklärungen voraus, in welchen man theils die Bedeutung der Wörter, theils die Kenntniß des Gegenſtandes beſtimmt. Eine Erklärung (Definition) muß den zu erklärenden Gegenſtand ſo beſtimmen, daß ein jeder ihn unter dem gegebenen Begriffe denkt. Der Begriff vom Gegenſtande ſelbſt muß theils ausführlich ſein, d. i. er muß die weſentlichen Merkmale des Gegenſtandes völlig enthalten; theils genau, d. i. er muß nicht zu viele Merkmale enthalten, ſondern zwiſchen ſeinen wahren Gränzen ſein; theils urſprünglich, d. i. die Beſtimmung des Begriffs muß nicht erſt einer Ableitung (Deduktion) bedürfen, ſondern ſchlechthin (abſolut) geſetzt werden. Z. B. der Kreis iſt eine ebene Figur, umgränzt von einer Linie, die von einem Punkte innerhalb der Figur (Mittelpunkt) gleichweit abſteht.

Betrift die Erklärung bloß die Feſtſtellung der Wörter, ſo heißt ſie eine Worterklärung (Nominaldefinition); betrift ſie aber die Beſtimmung einer Sache, ſo wird ſie Sacherklärung (Realdefinition) genannt. Zeigt die Erklärung zugleich die Möglichkeit oder die Entſtehung einer Sache, ſo heißt ſie eine genetiſche Erklärung. Von den letztern beiden Erklärungen kann man auch die erſte eine theoretiſche, die andere aber eine

eine praktiſche Erklärung nennen. So wäre die vom Kreiſe gegebene eine theoretiſche, dieſe aber: Ein Kreis entſteht, wenn eine gerade Linie auf einer Ebene um einen feſten Punkt ſich ſo bewegt, daß die Stelle des Anfangs zugleich die Stelle des Endes der Bewegung wird, eine praktiſche Erklärung. In der Elementargeometrie kann man beide Arten der Erklärung anwenden. Da die praktiſche aber ſchon den der reinen Geometrie fremden Begriff der Bewegung enthält, und da überdies die genetiſchen Erklärungen ſich nur bei den krummlinigen Figuren anbringen laſſen, indem die geradlinigen auf mehr als eine Art beſchrieben (gezeichnet) werden können, ſo zieht man, der Einheit der Lehrart wegen, die theoretiſchen den praktiſchen Erklärungen vor.

Die Bedeutung gewiſſer Zeichen und gewiſſe Annahmen ohne nothwendige Gründe, beſtimmt man ebenfalls im voraus in willkürlichen Sätzen.

§. 14.

Nach den Erklärungen folgen die Sätze. Ein Satz (Propoſition) heißt die Beſtimmung des Verhältniſſes zwiſchen zwei Erkenntniſſen. Diejenige Erkenntniß, von welcher die andere bejaht oder verneint wird, heißt das Subjekt, und die bejahende oder verneinende das Prädikat. Jedes von dieſen iſt entweder ein bloßer Begriff, oder es kann ſelbſt ein Satz ſein. So enthält der Satz: Ein Kreis iſt rund, zwei Begriffe, wovon der Begriff Kreis das Subjekt, der Begriff rund aber, das Prädikat iſt. Bedingungsſätze (hypothetiſche Sätze) enthalten in dem Satze, der das Subjekt vorſtellt, die Bedingung (Annahme, Vorausſetzung, Hypotheſis); in dem Satze aber, der das Prädikat ausdrückt, die Folge (Theſis). Z. B. der Kreis iſt einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie ſo groß iſt, wie die Peripherie des Kreiſes, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer gleich.

Anmerkung.

Eine Erklärung enthält allemal einen allgemeinen Satz, der auch umgekehrt allgemein gültig iſt; z. B. ein Dreieck iſt eine dreiſeitige Figur. Umgekehrt: Eine von drei Seiten völlig begränzte Figur iſt ein Dreieck. Ein allgemeiner Satz hingegen, der keine Erklärung iſt, z. B. alle Menſchen ſind ſterblich, läßt ſich zwar allemal partikulär umkehren — einige Sterbliche ſind Menſchen — aber nicht immer allgemein — alle Sterbliche ſind Menſchen —, ſondern wenn das letztere ſtatt finden ſoll, muß es erſt bewieſen werden.

§. 15.

Ein Satz heißt analytiſch, wenn das Prädikat ſchon im Begriffe des Subjekts enthalten iſt: z. B. jeder Körper iſt ausgedehnt; ſynthetiſch, wenn jenes nicht in dieſem enthalten iſt: z. B. 3 und 4 iſt gleich 7.

Beruht die Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte auf Wahrnehmung: ſo heißt der Satz empiriſch z. B. ein Stein iſt ſchwer. Ein ſolcher Satz heißt auch ein Satz a poſteriori. Läßt ſich hingegen dieſe Verknüpfung des Prädikats mit dem Subjekte unabhängig von aller Wahrnehmung einſehen: ſo heißt er ein reiner Satz, oder ein Satz a priori z. B. ein Dreieck iſt eine Figur. Da nun die Wahrnehmung bloß lehrt, daß etwas ſo und nicht anders iſt, nicht aber, daß es ſchlechterdings ſo ſein müſſe: ſo führen empiriſche Sätze, oder Sätze a poſteriori niemals abſolute Nothwendigkeit und ſtrenge Allgemeinheit mit ſich, ſondern dieſe iſt bloß den Sätzen a priori eigen.

Alle Sätze der reinen Mathematik ſind ſynthetiſche Sätze a priori. Jeder Satz heißt theoretiſch, wenn er bloß beſtimmt, daß etwas ſo und ſo iſt — oder nicht, z. B. in jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten Winkeln gleich; praktiſch hingegen, wenn

er

er beſtimmt, daß und wie es möglich ſei, z. B. eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Ein ſynthetiſcher Satz, deſſen Richtigkeit oder Möglichkeit unmittelbar einleuchtend und gewiß iſt, ohne daß ſie bewieſen werden darf, heißt, wenn er theoretiſch iſt, ein Grundſatz (Axiom), z. B. von einem Punkte zum andern iſt nur eine gerade Linie möglich — und wenn er praktiſch iſt, ein Forderungsſatz (Poſtulat), z. B. von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

Iſt dagegen die Richtigkeit oder Möglichkeit eines Satzes nicht unmittelbar einleuchtend, ſo heißt er, wenn er theoretiſch iſt, ein Lehrſatz (Theorem), z. B. an jedem geradelinigen Dreiecke iſt die Summe aller Winkel zwei rechten gleich — und wenn er praktiſch iſt, eine Aufgabe (Problem) z. B. aus einem Winkel und zwei anliegenden Seiten ein Dreieck zu zeichnen. Jede Aufgabe ſetzt gewiſſe Regeln voraus, durch deren Anwendung das, was ſie enthält, möglich wird. Die Beſtimmung dieſer Regeln und die Art der Anwendung um das zu Stande zu bringen, was die Aufgabe fordert, heißt ihre Auflöſung (Solution). Die zur Auflöſung nöthigen Stücke werden die Data genannt, und die Zuſammenſetzung der Theile des Begriffs zu einem Ganzen, heißt die Konſtruktion.

Sätze, die aus den vorhin genannten entweder unmittelbar gefolgert, oder durch einen leichten Schluß daraus hergeleitet werden, nennt man Zuſätze (Corollaria, Folgerungen).

Anmerkungen (Scholien) enthalten nichts weſentliches oder zum Syſtem nothwendig gehöriges, ſondern ſpecielle Erläuterungen und Anwendungen, ſo wie auch hiſtoriſche, litterariſche und artiſtiſche Nachrichten.

Lehrſätze oder Aufgaben, die nicht in die Wiſſenſchaft weſentlich gehören, aber doch mit Nutzen angewandt werden können, werden Lehnſätze (Lemmata) genannt.

In der angewandten Mathematik treten oft an die Stelle der Grundſätze Erfahrungen, Beobachtungen und Verſuche. Auch ſetzt man in dieſem Theile der Mathematik oft voraus, daß es ſich mit einer Erſcheinung ſo und ſo verhalte, und überzeugt ſich nachher durch die Uebereinſtimmung der Folge mit der Vorausſetzung von der Richtigkeit oder Wahrſcheinlichkeit der Hypotheſe; vorzüglich iſt dies der Fall in der Aſtronomie.

§. 16.

Ein mathematiſcher Beweis (Demonſtration) iſt die ſinnliche (intuitive) Darſtellung der nothwendigen Verknüpfung zwiſchen dem Subjekte und Prädikate. Oft kann man einen Satz durch einen einzigen Schluß beweiſen; in andern Fällen wird dazu auch wohl eine ganze Reihe erfordert. Weniggeübten machen zuſammengeſetzte Beweiſe die meiſten Schwierigkeiten. Um einen Satz zu beweiſen, muß man Schritt vor Schritt gehen, jeden einzelnen Satz, woraus die ganze Schlußkette beſteht, als wahr erkennen, auch muß man den Zuſammenhang aller deutlich einſehen, und den Einfluß auf den Schlußſatz gleichſam fühlen können. Iſt der Beweis ſo beſchaffen, daß ſich das Gegentheil von dem bewieſenen Satze unmöglich denken läßt, ſo wird er apodiktiſch oder eine Demonſtration genannt, von welcher Beſchaffenheit alle mathematiſchen Beweiſe ſein müſſen.

Iſt der Beweis aus Erklärungen und allgemeinen Begriffen zuſammengeſetzt, ſo heißt er ein Beweis a priori; nimmt man hingegen die Erfahrung zu Hülfe, ſo beweiſet man a poſteriori. So iſt z. B. der Beweis des Satzes: Alle rechte Winkel ſind einander gleich, ein Beweis a priori; der vom Daſein Gottes aus der

Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, ein Beweis a poſteriori. Die Beweiſe ſind entweder direkte oder indirekte Beweiſe. Ein direkter Beweis zeigt die Richtigkeit des Satzes geradezu; ein indirekter aber die Unmöglichkeit des Gegentheils. Alle direkten Beweiſe werden daher aus Einſicht der Gründe; alle indirekten aber nur aus den falſchen Folgen des Gegentheils geführt. Beide Beweisarten haben in der Mathematik gleiche Würde, und man wählt daher jedesmal die, welche die Wahrheit des Satzes am bequemſten und deutlichſten darſtellt.

Lehrſätze und Aufgaben bedürfen eines Beweiſes. — Grund- und Forderungsſätze aber können vermöge ihrer Einfachheit nicht bewieſen werden.

§. 17.

Der Mathematiker beſtimmt alſo alle Begriffe deutlich und thut nicht nur die Möglichkeit der Sätze dar, ſondern beſtimmt auch die zuſammengeſetzten Sätze aus unleugbaren Grundſätzen. Auch wählt der Mathematiker in ſeiner Wiſſenſchaft gute techniſche Ausdrücke, deren Bedeutung unabänderlich bleibt, und verbindet damit eine kurze Zeichenſprache da, wo es nur angehet.

Hierdurch aber unterſcheidet ſich die mathematiſche Methode noch nicht von jeder andern wiſſenſchaftlichen Lehrart, ſondern dadurch, daß der Mathematiker intuitiv verfährt, d. i. daß er nicht aus Begriffen ſchließt, ſondern ſeine Begriffe konſtruirt; das heißt, ſie in der Anſchauung darſtellt, und zwar in einer nicht empiriſchen, ſondern in einer von aller Erfahrung unabhängigen Anſchauung a priori. Da nun jede Anſchauung eine einzelne Vorſtellung iſt, jeder Begriff aber mehr einzelne Dinge unter ſich begreift: ſo ſtellt ſich der Mathematiker in ſeinen Beweiſen oder Demonſtrationen jedesmal

mal das Allgemeine im Einzelnen vor. Aus dieſem Grunde ſind die Erklärungen, Grundſätze, Forderungsſätze und Beweiſe in der Art, wie ſie der Mathematiker hat, der Mathematik ausſchließend eigen.

Da die reine Mathematik von allen wirklichen Gegenſtänden abſtrahirt, ſo muß ſich der Mathematiker ſeinen Gegenſtand, z. B. Summe, Proportion, Potenz, Kreis, Dreieck, Kugel, Kegel ꝛc. jedesmal erſt durch die Definition ſelber machen, und daher nicht nur die weſentlichen Merkmale, die der Begriff deſſelben enthalten ſoll, ſelbſt wählen, ſondern ihn auch aus demſelben zuſammenſetzen, folglich kann ſeinem Gegenſtande weſentlich niemals mehr oder weniger, ſondern nur gerade ſo viel und das zukommen, was ſein Begriff anzeigt, mithin iſt er ſicher, daß dieſer durch die Erklärung ausführlich genau und urſprünglich beſtimmt, und daher nichts weiter nöthig iſt, als ihn zu konſtruiren, um alle ſynthetiſchen Sätze, die von ihm ſtatt finden, auszumitteln, und ſo alle ſeine Arten und Eigenſchaften beſtimmen.

§. 18.

Bei der Bearbeitung und dem Vortrage der Mathematik kann man auf zweierlei Art verfahren. Entweder man geht von den erſten Gründen, von dem was ausgemacht gewiß iſt, aus, auf neue Wahrheiten fort, welche aus den vorigen folgen, und ſo geht man immer weiter, bis man auf etwas Unbekanntes oder bisher Unbewieſenes kömmt, welches man finden oder beweiſen wollte, und nennt dies Verfahren Synthesis (ſynthetiſche Methode); oder man geht von dem Unbekannten oder Unbewieſenen aus und auf die Gründe zurück, woraus es folgen müßte, bis man auf einen anerkannten oder ausgemachten Grund oder Ungrund kömmt, und nennt dies die Analyſis (analytiſche Methode).

§. 19.

Durch den Gebrauch der analytiſchen Methode behandelt man das Unbekannte ſo, als ob es ſchon bekannt wäre, und unterſucht, wie es zu finden ſei, und ob das Erwieſene auf wahren und zulänglichen Gründen beruhe.

Die Erfinder dieſer Methode ſind die Alten. Plato ſoll ſie zuerſt in der Geometrie gebraucht haben. In neuern Zeiten iſt ſie vervollkommnet und erweitert worden, indem man die Größen allgemein durch Buchſtaben bezeichnete und ſie arithmetiſch behandelte. Die geometriſche Analyſis der Alten iſt durch die neuere algebraiſche Analyſis faſt zu ſehr verdrängt worden.

§. 20.

So wie man eine ganze Wiſſenſchaft der Mathematik bald nach der ſynthetiſchen, bald nach der analytiſchen Methode behandeln kann, ſo hat man auch zweierlei Beweisarten angenommen, die in den verſchiedenen Methoden oder Lehrarten ihren Grund haben. Sind nämlich die Schlüſſe eines Beweiſes ſo mit einander verbunden, daß immer der folgende den Grund des vorhergehenden enthält, ſo iſt die Beweisart analytiſch; enthält aber der vorhergehende den Grund des folgenden, ſo iſt es die ſynthetiſche Beweisart. Die ſynthetiſche Beweisart kommt in der Elementar-Geometrie, die analytiſche aber in der Algebra oder Analyſis vor.

§. 21.

Alle Größen- folglich auch alle Zahlenbeſtimmungen in der Mathematik beruhen auf Gleichungen (Aequationen). Eine Gleichung aber heißt die Darſtellung ebenderſelben Größe, entweder durch zwei identiſche (einerlei) oder zwei verſchiedene Begriffe. So ſind die Ausdrücke z. B. zwei iſt gleich zwei, oder 2 = 2; 12 mal 13 iſt 200 weniger 44, oder

12.

12. 12 = 200 — 44 Gleichungen, wovon die erſte durch zwei identiſche, und die zweite durch zwei verſchiedene Begriffe ausgedrückt iſt. Die Gleichungen erhalten ihren Namen von den verſchiedenen Graden, in denen ſich die unbekannte Größe (die man ſucht) befindet. Alle Zahlen ſtehen für ſich im erſten Grade; alle Multipla einer Zahl mit ſich ſelbſt im zweiten; alle Multipla des zweiten Grades mit der urſprünglichen Zahl aber im dritten Grade u. ſ. f. Die geſuchte Zahl in einer Gleichung durch lauter bekannte (gegebene) beſtimmen, heißt die Gleichung auflöſen.

§. 22.

Man theilt die Arithmetik in die gemeine und höhere ein; die gemeine lehrt die Auflöſung der Gleichungen von der leichtern Art durch Zahlzeichen; die höhere hingegen unterſucht die Natur und Auflöſung aller möglichen Gleichungen in ihrer größten Allgemeinheit durch allgemeinere Zeichen, nämlich durch Buchſtaben und enthält die Algebra und die Infiniteſimalrechnung.

Ungeachtet man auch die gemeinen Rechnungsformen durch Buchſtaben ausdrücken, und mit dieſen die gemeinen Rechnungsoperationen vornehmen kann, ſo iſt dies dennoch keine Algebra, ſondern Buchſtabenrechnung, die nur einen Theil der allgemeinen Arithmetik ausmacht.

§. 23.

Auch die Geometrie wird in die gemeine und höhere eingetheilt. Die gemeine oder Elementargeometrie ſchränkt ſich nämlich unter den Linien bloß auf die gerade und die Kreislinie ein, und unter den Flächen und Körpern bloß auf diejenigen, die ſich durch gerade und Kreislinien konſtruiren laſſen. Für die höhere Geometrie gehören demnach alle übrigen krummen Linien, Flächen und Körper.

§. 24.

Sucht man aus ſolchen drei gegebenen Stücken eines Dreiecks, die daſſelbe völlig beſtimmen, die übrigen Stücke durch Rechnung, ſo hat man die Trigonometrie. Auch dieſe Wiſſenſchaft hat ihren gemeinen und höhern Theil.

Zu der gemeinen Trigonometrie gehört alles, was ſich durch gemeine Arithmetik und Elementargeometrie herleiten läßt, zum höhern Theile aber alles übrige.

Anmerkung.

Eine ähnliche Bewandniß hat es auch mit allen Theilen der angewandten Mathematik.

§. 25.

Durch die verſchiedenen Lehrarten werden die Gränzen der gemeinen und höhern Mathematik überhaupt genauer (wie oben §. 11.) beſtimmt.

Den Theil der reinen Mathematik, den man vermittelſt der analytiſchen Methode behandelt, und der die allgemeinen Grundſätze der mathematiſchen Erfindungskunſt enthält, nennt man überhaupt die Analyſis und beſteht in der höhern Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie. Die Analyſis enthält ebenfalls zwei Haupttheile, nämlich die Analyſis des Endlichen und die Analyſis des Unendlichen, wofür man aber ſchicklicher gemeine und höhere Analyſis ſetzen könnte. Zur gemeinen Analyſis gehört die Algebra und dasjenige von der höhern Geometrie und Trigonometrie, was aus der Algebra hergeleitet wird; zur höhern Analyſis aber die Infiniteſimalrechnung nebſt allem aus der höhern Geometrie und Trigonometrie, was durch Hülfe derſelben gefunden wird.

§. 26.

Beide Methoden, ſowohl die ſynthetiſche, als auch die analytiſche, verſchaffen eine vortrefliche Uebung des Verſtandes, und dieſe, nämlich die Schärfung unſerer edelſten Seelenkräfte iſt ein Hauptvortheil, den die Mathematik gewähret. Die Mathematik iſt jeder kultivirten Nation nothwendig und achtungswerth geworden, weil ihr Einfluß auf die Befriedigung unſerer wichtigſten Bedürfniſſe und auf die Annehmlichkeit und Bequemlichkeit des menſchlichen Lebens unverkennbar iſt.

§. 27.

Was den Nutzen der Mathematik für Forſtbediente insbeſondere betrift, ſo lehrt die Erfahrung, daß ein Förſter ohne gründliche Kenntniß der Arithmetik, ohne Anfangsgründe der Geometrie, und ohne einige Kenntniſſe der praktiſchen Maſchinenlehre, und der Civilbaukunſt, ſeinem Poſten weder gehörig vorſtehen, vielweniger das Intereſſe des Staates, dem er dient, gehörig befördern kann.

Da nun heut zu Tage die Forſtwirthſchaft zu den ſtaatswirthſchaftlichen Zweigen gehört, die eine beſondere Aufmerkſamkeit erfordern, ſo iſt es den Forſtbedienten um ſo mehr Pflicht, ſich mit den Kenntniſſen bekannt zu machen, welche entweder unmittelbar oder mittelbar dieſen Zweig der Staatswirthſchaft nicht nur erhalten, ſondern auch verbeſſern und erhöhen helfen.

Die Menge aller forſtwiſſenſchaftlichen Kenntniſſe ſo wohl als die der mathematiſchen, die ein Förſter haben muß, läßt ſich im allgemeinen nicht beſtimmen; indeß iſt ſo viel gewiß, daß je höher der Poſten iſt, den ein Förſter bekleidet, deſto größer ſind ſeine Pflichten, folglich deſtomehr muß er Haupt- und Hülfskenntniſſe beſitzen.

Wer ſich der Forſtwirthſchaft widmet, hat immer den Vorſatz, ſich von den niedern Stufen des Dienſtes auf

die höhern hinaufzuarbeiten, und daher muß der angehende Förſter ſeinen Plan bei Erlernung der nöthigen Kenntniſſe ſo entwerfen und ausführen, daß es ihm bei vorkommender Gelegenheit, einen wichtigern Poſten zu erhalten, nicht an Kenntniſſen fehle. Demjenigen, der von Jugend auf eine fürs Forſtweſen ſchickliche, wiſſenſchaftliche Bildung erhält, wird es nicht an Gelegenheit mangeln, ſich auch die dazu gehörigen mathematiſchen Hülfskenntniſſe zu erwerben; wer aber entweder ganz unvorbereitet oder wenigſtens nicht vollkommen dazu geſchickt in die Forſtwirthſchaft kommt, muß ſich nach ſeinen Kräften bemühen, das nachzuholen, was ihm an einer zweckmäßigen Bildung mangelt.

§. 28.

Ob es gleich nicht abſolut nothwendig iſt, daß jeder, der ſich dem Forſtweſen widmet, vollſtändige Kenntniſſe der theoretiſchen und praktiſchen Mathematik beſitze, ſo iſt es denn doch der Natur der Sache angemeſſen, die Anfangsgründe der reinen Mathematik zu kennen und einige Kenntniſſe ſolcher Theile der angewandten Mathematik zu wiſſen, ohne welche keine gute Forſtwirthſchaft beſtehen kann. Größtentheils erfordern die Geſchäfte eines Förſters nur praktiſch-mathematiſche Kenntniſſe; da aber keine brauchbare Praktik ohne Theorie möglich iſt, ſo ſetzt jene die Elemente dieſer voraus. Um die Wahl derjenigen mathematiſchen Kenntniſſe dem Förſter zu erleichtern, die er als Hülfskenntniſſe mit den Hauptkenntniſſen ſeines Faches verbinden muß, theile ich hier folgende Anzeige der erforderlichen praktiſchen Kenntniſſe aus der Mathematik mit, ſo wie ſie der Königl. Preuß. Geh. Rath und Oberforſtmeiſter der Churmark-Brandenburg, F. A. L. von Burgsdorf (in ſ. Forſthandbuche; zweite Auflage, Berlin 1790 in der Einleitung S. 22. §. 19.) angiebt, um nicht den Vorwurf zu erregen, daß der im Forſtweſen nicht wirklich arbei-

tende Schriftſteller mehr verlange, als irgend ein Förſter in der Ausübung anwenden könne.

Jedes dem Forſtweſen ſich widmende oder ſchon in demſelben arbeitende Subjekt muß folgende mathematiſche Kenntniſſe entweder wirklich beſitzen, oder ſich zu erwerben ſuchen:

1) Kenntniſſe im Rechnen. Da das Rechnen ſchon zu den Geſchäften im gemeinen Leben nothwendig, um ſo mehr begreift man, daß es im Forſtdienſte unentbehrlich iſt, indem ausgemacht die Forſtwirthſchaft ohne eine gut angelegte Rechnung oder ein nach Grundſätzen eingerichtetes Rechnungsweſen unmöglich beſtehen kann, und jeder Förſter, in welchem Verhältniſſe er auch immer mit dem Ganzen ſtehen mag, irgend eine Art Rechnung über einen größern oder kleinern Theil der Forſtausgaben oder Einkünfte führen muß. Und geſetzt, man könnte auch durch Hülfe der Rechenkunſt des gemeinen Lebens mit dem Forſtrechnungsweſen, in ſofern es Einnahme und Ausgabe betrift, fertig werden, ſo wird man doch ſeine Rechnungskenntniſſe ſobald über die gemeinen erhöhen müſſen, als man nöthig hat, Rechenkunſt auf Geometrie und andere Theile der Mathematik anzuwenden. Da nun dies der Fall bei jeder nur mäßigen Forſtbedienung iſt, ſo iſt es keinem Zweifel unterworfen, daß der Förſter ſeine Aufmerkſamkeit auf die Erlernung gründlicher Kenntniſſe der Rechenkunſt wenden müſſe; und da keine gründlichen Einſichten in dieſer Kenntniß ohne Beihülfe der Mathematik möglich ſind, und gründliche Arithmetik ſchon ſelbſt ein Theil dieſer Wiſſenſchaft iſt; ſo gehört die Arithmetik zu den einem Förſter nöthigen Hülfskenntniſſen aus der Mathematik.

2) Kenntniſſe der praktiſchen Geometrie Unter den gewöhnlichen Umſtänden und bei gut eingerichteten

Forſten

Forſten wird zwar von einem Förſter nicht die geſammte Kenntniß der praktiſchen Geometrie erfordert, weil die Vermeſſung, Berechnung, Zeichnung und Eintheilung ganzer Forſten eine Sache iſt, die in jedem wohlregierten Lande nur anfänglich bei der Einführung der auf gründliche Kenntniß eingerichteten Forſtwirthſchaft nöthig war, und in den meiſten Forſten auch jetzt noch von eigen dazu beſtimmten Forſtvermeſſern vorgenommen wird; demungeachtet kommen immer noch Arbeiten vor, wozu geometriſche Kenntniſſe unentbehrlich ſind. Selbſt dem eigentlichen Forſtvermeſſer oder den Feldmeſſern, die bei manchen Kammern neben ihrer Hauptfunktion auch zu den Vermeſſungsgeſchäften der Forſten angewieſen werden, kann es nicht gleichgültig ſeyn, die praktiſchen Kenntniſſe der Geometrie ſo angewandt zu finden, wie ſie bei Forſtvermeſſungen wirklich vorkommen. Um aber den Förſter auf die Nothwendigkeit praktiſchgeometriſcher Kenntniſſe aufmerkſam zu machen, ſo werden hier diejenigen Arbeiten namhaft gemacht, die ſeine Beſtimmung faſt täglich darbietet, und dieſe beſtehen darin:

a) Schläge oder Gehaue, Oerter und Schonungen oder Gehäge regulär und beſtimmt abzuſtecken;

b) den Flächeninhalt eines Stückes zur Anfertigung der nöthigen Kulturkoſten- und Nutzungsanſchläge zu berechnen;

c) den körperlichen Inhalt und den daraus zu beſtimmenden Werth unterſchiedener Holzſortimenter auszumitteln; und

d) überhaupt, wo es auf ein Maß, die Menge und den Werth eines Gegenſtandes der Forſtwirthſchaft ankömmt, in allen Fällen nach ſiche-

ren und unwiderſprechlichen Gründen zu verfahren.

Eine auch nur oberflächliche Ueberſicht dieſer, dem Förſter eigenen Geſchäfte, zeigt, daß ſie ohne gründliche Kenntniſſe aus der Arithmetik und praktiſchen Geometrie nicht unternommen werden können. Da aber gründliche Einſichten und Kenntniſſe der praktiſchen, ohne das Studium der theoretiſchen Geometrie zu erwerben unmöglich ſind, und einzelne Lehren außer dem Zuſammenhange nichts nützen, ſo iſt die Erlernung der Geometrie ein Haupttheil derjenigen Kenntniſſe, welche die Mathematik dem Forſtweſen darbietet. Die ausübende Geometrie aber zählt unter ihre Hülfskenntniſſe die Zeichenkunſt, und da dieſe auch den Förſter in den Stand ſetzt, ſeinen Arbeiten mehr Deutlichkeit zu geben, und überhaupt in forſtwirthſchaftlichen Unternehmungen eine leichtere Ueberſicht gewährt, ſo wird es nicht ohne Vortheil ſeyn, wenn auch wenigſtens etwas Zeichnen mit zu den Kenntniſſen gezählt wird, die einen Förſter zieren und ehren. Demnach wäre die reine Elementarmathematik nach ihrem theoretiſchen und praktiſchen Theile verbunden mit der Zeichenkunſt erſte nothwendige mathematiſche Hülfskenntniß.

3) Kenntniſſe aus der angewandten Mathematik. Die aus der angewandten Mathematik dem Förſter nöthigen Kenntniſſe betreffen die Mechanik, die Civilbaukunſt, die Waſſerbaukunſt und die Sandbaukunſt. Das Mehr oder Weniger dieſer Kenntniſſe ergiebt ſich aus den Gegenſtänden, die der Förſter pflichtmäßig kennen und zu bearbeiten wiſſen muß, ſo wie aus der Stufe des Dienſtes, worauf er ſtehet.

Die Pflichten eines Förſters, die er nur durch Kenntniſſe der Mechanik gehörig erfüllen kann, beſtehen

darin,

darin, daß er die Werkzeuge und Maſchinen, deren man ſich bei den Forſtgeſchäften und Waldhandthierungen überhaupt bedient, nach Theorie und Praktik, nach Vortheilen und Mängeln zu beurtheilen, die Vorurtheile der Arbeiter, die ſo oft zum Schaden der Forſtwirthſchaft befolgt werden, zu beſiegen, und dagegen die beſten und zweckmäßigſten Mittel in Ausübung zu bringen weiß.

Hierzu dienen

a) die erſten Kenntniſſe der ſtatiſchen Wiſſenſchaften, und

b) das dem Zwecke nach Unentbehrliche aus der praktiſchen Maſchinenlehre.

Die gemeinen Hebezeuge und die brauchbarſten Maſchinen erfordern zwar keine weitläuftige und ſchwere Theorien; aber ſie ohne alle theoretiſche Kenntniſſe gebrauchen iſt nichts anders, als nach dem Herkommen verfahren, das oft nur auf Vorurtheil gebaut und ohne Hinſicht auf wahre Vortheile beibehalten wird.

Da der Förſter doch billig die Anwendung der verſchiedenen Holzarten im Civilbaue, ihre zu irgend einer ſolchen Bauunternehmung erforderliche Menge, Eigenſchaften und darnach zu richtende Auswahl, verſtehen ſoll, um den Nachtheil zu verhüten, welcher dem Staate theils dadurch erwächſt, daß Bau- und Werkhölzer oft auf eine ungeſchickte Weiſe in Brennholz verwandelt werden, theils daß das, den Unterthanen frei verabreichte Bau- und Ausbeſſerungsholz unzweckmäßig verwendet, und daß endlich durch Unkunde untaugliches Holz zum Bauen angewieſen wird; ſo folgt von ſelbſt die Pflicht für den Förſter, ſich mit Kenntniſſen der Art bekannt zu machen, die gegen die erwähnten Nachtheile ſichern. Hierzu gehört

die Kenntniß der Civilbaukunſt, wenigſtens nach ihrem praktiſchen Theile.

Hat der Förſter es in dieſem Theile der angewandten oder praktiſchen Mathematik ſoweit gebracht, daß er außer der Kenntniß und Beurtheilung der Art und Menge der Bauhölzer, auch die Conſtruktion der Gebäude kennt, ſo wird er dadurch dem Staate um ſo mehr nützen, daß er im Stande iſt, die Gebäude und Anlagen, welche der Forſthaushalt nöthig macht, ſelbſt zu entwerfen und zu veranſchlagen, und daß er ſie unter ſeiner Aufſicht entweder neu aufbauen, oder die ſchadhaft gewordenen wieder herſtellen laſſen kann.

Die unentbehrlichſten Kenntniſſe des Waſſerbaues oder der Hydrotechnik beziehen ſich auf folgende Geſchäfte des Förſters:

a) Er muß die Mittel ausfündig zu machen ſuchen, wodurch der Gewalt des Waſſers nach Beſchaffenheit der Beuferung am ſicherſten, und in Nothfällen am ſchnellſten vorzubeugen ſei. Hierdurch werden öfters große Koſten und weitläuftige Baue, durch kleine, in Zeiten eingeſehene und gehörig getroffene Anſtalten und Gegenmittel oder durch Berichtserſtattung erſparet; auch werden dadurch nicht ſelten dem Staate beträchtliche Strecken an den Gränzen der Flüſſe, Ströme, Seen ꝛc. erhalten, die forſtmäßig bebaut und benutzt werden können.

b) Er muß die Forſtkultur ſo viel wie möglich auch in moraſtigen oder ſumpfigen Gegenden auszubreiten und auf überſchwemmten Forſtörtern zu gründen ſuchen.

Hierzu dient

die Lehre von den Waſſerableitungen.

Dieſer Theil der Waſſerbaukunſt gründet ſich zunächſt auf die Grundſätze und daraus gefolgerten Lehren der Hydroſtatik und Hydromechanik, und macht einen wichtigen Theil der Hydraulik. Verbindet der Förſter mit den theoreti-

theoretiſchen Kenntniſſen dieſer Wiſſenſchaft nun noch die Revierkenntniß und die der Beſchaffenheit des Grundes und Bodens, ſo kann er auch zugleich dadurch den anzubauenden Holzarten außerordentlich zu Hülfe kommen.

Endlich erfordert die Beſtimmung eines Förſters

die Wiſſenſchaft des Sandbaues. Sie beſtehet in der Kunſt, Sandſchollen in einerlei Lage, unbehindert ihrer Größe und Flüchtigkeit,

a) zu binden oder ſtehend zu machen, um ſie demnächſt

b) in Holzanwuchs zu ſetzen, und

c) andere daran liegende Grundſtücke vor Ueberſchwemmung mit Sand in Sicherheit zu bringen.

Dieſe geſammten hier angezeigten Kenntniſſe gehören bald im geringeren bald im weitern Umfange für das Forſtweſen, und jedes, auf den Namen eines geſchickten und brauchbaren Förſters Anſpruch machende Subjekt muß dieſe Kenntniſſe ſich nach und nach zu eigen zu machen ſuchen.

Der letzte angeführte Zweig der Forſtwirthſchaft, nämlich der Sandbau, iſt bisher noch ganz unbearbeitet geweſen; daher muß man ihn in den gegenwärtigen Zeiten, da faſt in allen Staaten eine gute Forſtwirthſchaft eingeführt wird, nicht überſehen, ſondern ſich richtige Kenntniß davon verſchaffen und aus der Natur der Sache für die Ausübung brauchbare Regeln herleiten. Verbindet man damit zuverläſſige Veranſchlagung der Koſten, und wählt zu einer ſichern Ausführung die kräftigſten und dabei leichteſten und wohlfeilſten Anſtalten, und verliert nie die zum Grunde liegenden mathematiſch-phyſikaliſchen Geſetze aus den Augen, ſo kann der Erfolg nicht anders als gut, und für den Staat ſowohl, als das gemeine Beſte, vortheilhaft ſeyn.

Anmerkung.

Die vorſtehende Einleitung ſoll dazu dienen, den Zuſammenhang der forſtwiſſenſchaftlich-mathematiſchen Kenntniſſe theils mit der geſammten Mathematik, theils mit den eigentlichen Forſtkenntniſſen zu zeigen. Wer von Jugend auf eine wiſſenſchaftliche Bildung erhalten hat, dem wird es nicht ſchwer werden, die Entwickelung der mathematiſchen Kenntniſſe aus ihren erſten Quellen einzuſehen, und den Gang zu faſſen, den der Mathematiker wählt, um mathematiſche Wiſſenſchaften nach ihrem Gehalte und ihrer Würde angemeſſen zu behandeln. Dem, der an ſcharfes Nachdenken nicht gewöhnt worden, wird zwar manches in dieſer Einleitung zu ſchwer und unfaßlich bleiben; allein durch die Bekanntſchaft mit den folgenden arithmetiſchen Lehren und der Geometrie wird ſich das für ihn Dunkele nach und nach aufhellen und das ſchwerfaßliche leicht werden. Kann ſich ein ſolcher auch nicht gleich ſo ganz vollkommen in den Gang des Mathematikers hineindenken, ſo werden anhaltender Fleiß und gehörige Ausdauer doch zuletzt dieſen Gang rechtfertigen, und die Folgen einer nach Theorie geordneten Anwendung werden die Zeit reichlich belohnen, die er der Erlernung dieſer mathematiſchen Kenntniſſe widmet.

Ueber den Nutzen, den die Mathematik oder aus dieſer die gemeinnützigen Kenntniſſe gewähren, kann man folgende Abhandlung nachleſen: Carl Chriſtoph Oettelt's praktiſcher Beweis, daß die Matheſis beim Forſtweſen unentbehrliche Dienſte thue, nebſt Abſchilderung eines geſchickten Förſters. Dritte Auflage. Eiſenach 1786. 8. 174 S. ½ B. Kupfer und 1 B. Tabellen.

Erſter Theil

welcher

die Arithmetik

enthält.

Anfangsgründe der Arithmetik.

Erſtes Kapitel.

Von den Zahlen dem Zahlenſyſteme und den allgemeinen Begriffen vom Rechnen.

I.

Erklärung und Bezeichnung der Zahlen.

§. 1.

Dinge nennt man verſchieden, in ſofern in dem einen etwas iſt, was in dem andern nicht iſt; einerlei aber, ſofern ſie nicht verſchieden ſind. Daher laſſen ſich einerlei Dinge für einander ſetzen (d. i. ſubſtituiren), und umgekehrt: Dinge, die ſich für einander ſetzen laſſen, ſind einerlei. Z. B. vier und drei und eins ſind einerlei, vier und drei aber verſchieden.

§. 2.

Eine Zahl iſt eine Menge von Dingen von einerlei Art; z. B. 4 iſt eine Menge von 1.

§. 3.

Dinge, deren Menge (Anzahl) man ſich denkt oder anzeigt, können zwar in verſchiedener Hinſicht verſchieden ſeyn,

ſeyn, aber in ſofern man ſie in eine Menge zuſammenfaſſen, das iſt zählen will, ſieht man nur auf das, was ſie mit einander gemein haben. Deutſche und Engländer laſſen ſich als Europäer, als Menſchen, als Geſchöpfe oder als Dinge zuſammen zählen, aber nicht als Deutſche und Engländer. So ſind vier Deutſche und drei Engländer zuſammen ſieben Europäer, auch ſieben Menſchen, ſieben Geſchöpfe; aber weder ſieben Deutſche noch ſieben Engländer.

§. 4.

Das Gemeinſchaftliche, was macht, daß Dinge zuſammengezählt werden können, heißt Eins oder die Einheit. Im Beiſpiele §. 3. iſt der Begriff: Europäer, Menſch, Geſchöpf, die Einheit. Man kann daher eine Zahl ſo erklären, daß ſie eine Menge von Einheiten ſei.

§. 5.

Sind die Dinge, die zuſammen gezählt werden ſollen, Ganze, ſo heißt die Zahl, welche ihre Menge ausdrückt, eine ganze Zahl; daher entſteht jede ganze Zahl, wenn man die völlige Einheit mehrere male nimmt. Iſt aber ein Ganzes oder die Einheit in gleiche Theile getheilt, ſo heißt die Zahl, welche entweder einen oder eine Menge dieſer Theile angiebt, eine gebrochene Zahl, oder kurz ein Bruch. Eine ganze Zahl und ein Bruch zuſammen genommen, geben eine gemiſchte Zahl. Iſt von Zahlen nur überhaupt die Rede, ſo verſteht man gewöhnlich ganze Zahlen.

§. 6.

Die Zahlen werden entweder ſo betrachtet, daß man außer der Menge Einheiten, die ſie enthalten, das heißt außer ihrer Größe, auf keine andern Eigenſchaften wie etwa ihren Namen und dergleichen Rückſicht nimmt; oder

man

man ſieht zugleich auf die Art und Beſchaffenheit der Einheiten, die ihre Größe ausmachen. Im erſten Falle heißen ſie *ungenannte* (abſtrakte); im zweiten Falle aber *genannte* (concrete) *Zahlen*. So iſt *vier* eine ungenannte; *vier Thaler* aber eine genannte Zahl. Genannte Zahlen heißen dann *mehrerleinamig*, wenn außer dem größern, noch kleinere Werthe der Zahlen vorkommen. Z. B. 24 Thaler 16 Groſchen 8 Pfennige.

§. 7.

Um Zahlen mit *Worten* auszudrücken, gebraucht man zunächſt für

die *Mengen*	·	··	···	····	·····	······
die *Wörter*	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs

·······	········	·········	··········
Sieben.	Acht.	Neun.	Zehn.

Will man größere Mengen ausdrücken, ſo ſetze man zu *zehn* wieder *eins*, *zwei*, *drei*, u. ſ. w. und zwar ſo weit hinzu, bis man auf zehn und zehn kommt. Die letztere Zahl, nämlich zehn und zehn oder zweimal zehn, nenne man *zwanzig*. Zu zwanzig ſetze man wiederum eins, zwei, drei u. ſ. w. hinzu, bis dreimal zehn, und nenne dieſe Zahl *dreißig*. Bei der Wiederholung dieſes Verfahrens kommt man auf viermal zehn oder *vierzig*, auf fünfmal zehn oder *funfzig* u. ſ. w. Zehnmal zehn nenne man *hundert*; zehnmal hundert aber heiße *tauſend*. Tauſendmal tauſend wird eine *Million*; Tauſendmal tauſend Millionen, oder eine Million Millionen eine *Billion*; eine Million Billionen aber eine *Trillion* genannt. Fährt man ſo fort, ſo kommt man auf Zahlenbegriffe, die man *Quadrillionen* u. ſ. w. ausdrückt.

Anmerkung.

Daß wir von *eins bis auf zehn* zählen iſt *willkührlich*; eben ſo willkührlich ſind die Wörter, wodurch man die Menge von Einheiten *ausdrückt*. Dieſe einfache

fache und ſinnreiche Bezeichnungsart ſetzt uns in den Stand, jede noch ſo große Menge durch wenige Worte, und in vielen Fällen durch ein Wort auszudrücken. Die Art, jede Menge durch Wiederholung der zehn und Hinzuſetzung kleinerer Zahlen auszudrücken, iſt alt und die Urſache davon leicht und ſehr natürlich. Obgleich alle cultivirte Nationen ſo zählen, ſo ſoll es dennoch Völker geben, die nur bis auf drei zählen.

§. 8.

Um Zahlen ſchriftlich auszudrücken, gebraucht man für

die Zahlen	Eins.	Zwei.	Drei.	Vier.	Fünf.	Sechs.
die Zahlzeichen oder Ziffern	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	Sieben.	Acht.	Neun.			
	7.	8.	9.			

So gebraucht, heißen die Zahlzeichen oder Ziffern, einfache. Will man aber größere Zahlen ſchriftlich ausdrücken, ſo ſetzt man mehrere dieſer Ziffern neben einander, und nennt ſie dann zuſammengeſetzte Ziffern. Das Zeichen 0 (Null) heißt im beſondern Sinne Ziffer und hat für ſich keinen Werth, ſondern dient nur, leere Stellen auszufüllen.

II.

Vom Zahlenſyſteme.

§. 9.

Damit man nun im Stande ſei, durch Hülfe dieſer Zeichen oder Ziffern jede gegebene Zahl auszudrücken, ſo hat man jeder Ziffer außer ihrem eigenthümlichen Werthe, den die Figur der Ziffer anzeigt, noch einen beſondern gegeben, der von der Stelle, oder dem Orte herrührt, in welchem ſich eins dieſer Zeichen befindet.

Die

Die beſondern Werthe der Ziffern oder Zahlzeichen werden durch folgendes willkührliche Geſetz beſtimmt:

Man ſchreibt die Zahlzeichen von der rechten gegen die linke Hand zu und läßt jedes in der folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als es bedeuten würde, wenn es die nächſt vorhergehende Stelle einnähme.

§. 10.

Das Zahlzeichen 1 erhält demnach in den verſchiedenen Stellen, folgende Werthe

in der **erſten**	eins oder eine Einheit	1
zweiten	zehn	10
dritten	hundert	100
vierten	tauſend	1000
fünften	zehntauſend	10000
ſechsten	hunderttauſe	100000
ſiebenten	Million	1000000
achten	zehn Millionen	10000000
neunten	hundert —	100000000
zehnten	tauſend —	1000000000

Die Fortſetzung dieſer Tabelle läßt ſich aus der vorgeſchriebenen nun leicht entwerfen.

Wählte man ſtatt des Zahlzeichens 1, in allen Stellen das Zeichen 2 oder 3 u. ſ. w. ſo würde man im erſten Falle die Zahlenbegriffe zwei, zwanzig, zweihundert u. ſ. w.; im zweiten Falle aber drei, dreißig, dreihundert u. ſ. w. erhalten.

§. 11.

Die Ordnung, nach welcher man von 1 bis 10 zählt, nennt man die **Decimalordnung**; alle zuſammengeſetzten Zahlen müſſen daher aus einfachen Zahlzeichen beſtehen, die, wenn man das erſte zur rechten Hand ausnimmt, welches immer nur **Einheiten** ausdrückt, zu ver-

verſchiedenen Decimalordnungen gehören. Die verſchiedenen Decimalordnungen folgen ſo auf einander: da von der rechten Hand zur linken das erſte Zahlzeichen oder das Zahlzeichen in der erſten Stelle, Einheiten ausdrückt, ſo iſt das Zahlzeichen in der zweiten Stelle eine zehnfache Einheit, oder es gehört zur erſten Decimalordnung; das Zahlzeichen in der dritten Stelle gehört demnach zur zweiten Decimalordnung; das in der vierten Stelle zur dritten Decimalordnung u. ſ. w. Alſo überhaupt gehört ein Zahlzeichen, wenn es mit mehrern verbunden wird, zu derjenigen Decimalordnung, welche die Zahl anzeigt, die man erhält, wenn man unterſucht, in der wievielſten Stelle es nach der erſten ſtehet.

Die Zahlen ſo geſchrieben und ſo ausgedrückt, geben das Zahlenſyſtem nach Decimalordnungen, oder das Decimalſyſtem (Dekadik).

§. 12.

Man kann die verſchiedenen Decimalordnungen auch auf folgende Art ausdrücken:

1	zeigt	einfache Einheiten	oder	Einer;
10	—	zehnfache	—	Zehner;
100	—	hundertfache	—	Hunderte;
1000	—	tauſendfache	—	Tauſende;
10000	—	zehntauſendfache	—	Zehntauſende ꝛc.

Demnach enthält die erſte Decimalordnung, die Zehner; die zweite, die Hunderte; die dritte, die Tauſende; die vierte die Zehntauſende u. ſ. w. Mit jedem andern, an die Stelle 1 gewählten Zahlzeichen, hat es eine ähnliche Bewandniß.

Anmerkung 1.

Die Art nach Zehnen zu zählen oder das Decimalſyſtem, iſt keineswegs nothwendig. Es iſt mög-

lich,

lich, aber nicht bequem, alle Zahlen durch zwei Ziffern 1 und 0 auszudrücken. Die Art, mit dieſen zwei Zeichen alle Zahlen zu ſchreiben, würde die Dyadik geben. Das Duodecimalſyſtem (Dodekadik) würde man erhalten, wenn man alle Zahlen durch zwölf Zahlzeichen ausdrückte, wozu noch zwei neue erforderlich wären. Eben ſo gut könnte man von 1 bis auf 4; von 1 bis auf 25 zählen u. ſ. w. Alle dieſe Zahlenſyſteme aber müßten nothwendig unbequemer ausfallen, als unſer bekanntes Decimalſyſtem.

Die Zahlzeichen oder Ziffern, wodurch wir unſere Zahlen ausdrücken, haben wir Europäer im dreizehnten Jahrhunderte von den Arabern erhalten, daher ſie auch arabiſche Ziffern genannt werden. Andere halten ſie für indiſche und noch andere für egyptiſche Buchſtaben.

Anmerkung 2.

Bisweilen braucht man auch die römiſchen Zahlzeichen, die aus den Buchſtaben I, V, X, L und C, beſtehen und ſchreibt damit: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Der Buchſtab L bedeutet funfzig, IↃ fünfhundert, und. CIↃ tauſend. Aus IↃ iſt vermuthlich D, aus CIↃ aber M entſtanden. Es iſt übrigens einleuchtend, daß dieſe Bezeichnung auch nur zu mäßig großen Zahlen unbequem iſt.

§ 15.

Eine mit Ziffern, oder mit Zahlzeichen geſchriebene Zahl zu leſen oder mit Worten auszuſprechen.

Um das Ausſprechen zu erleichtern, bediene man ſich folgender Zeichen und Regeln:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klaſſen, durch ein Komma, und gebe jeder derſelben drei Zahlzeichen: in der letzten (dem Werthe nach höchſten) Klaſſe zur Linken können auch weniger als drei Zahlzeichen ſtehen.

2) Ueber das erſte Zahlzeichen in der zweiten, vierten, ſechsten, achten ꝛc. Klaſſe, (oder überhaupt,

 über

über das erſte Zahlzeichen aller geraden Klaſſen, d. i. ſolcher, in welchen die Zahl 2 völlig einmal oder mehreremale enthalten iſt), ſetze man einen Punkt.

3) Ueber das erſte Zahlzeichen der dritten Klaſſe ſetze man einen Strich oder eine römiſche I; über das erſte in der fünften, zwei Striche, oder II; über das erſte in der ſiebenten Klaſſe drei Striche, oder III; über das erſte in der neunten aber vier Striche, oder IV; und ſo fort, über jeder um eins überſprungenen Klaſſe, einen Strich mehr, oder das folgende römiſche Zahlzeichen.

4) Alle Zahlzeichen, die mit einem Punkte bezeichnet ſind, leſe man Tauſend; das Zahlzeichen aber, welches mit einem Striche oder I bezeichnet iſt, leſe man Millionen; das, worüber zwei Striche ſtehen, oder II, Billionen; das, worüber drei Striche ſtehen, oder III, Trillionen; das, über welchem vier Striche ſtehen, oder IV, Quadrillionen u. ſ. w.

5) In jeder Klaſſe drückt man über dies das erſte Zahlzeichen (von der Rechten zur Linken) durch Einer, das zweite durch Zehner, und das dritte durch Hunderte aus.

6) Alle Stellen, die mit Null angefüllt ſind, übergeht man beim Ausſprechen.

Es ſei die Zahl:

. III . II . I .
12, 594, 523, 843, 657, 316, 249, 253. d. i. zwölftauſend, fünfhundert und vier und neunzig Trillionen, fünfhundert und drei und zwanzig tauſend, achthundert und drei und vierzig Billionen, ſechshundert und ſieben und funfzig tauſend dreihundert und ſechszehn Millionen, zweihundert und neun und vierzig Tauſend, zwei Hundert und drei und funfzig.

Eben

Eben ſo:

II . I .
29, 900, 052, 400, 001.

d. i. neun und zwanzig Billionen, neunhunderttauſend und zwei und funfzig Millionen, Vierhunderttauſend und Eins.

§. 14.

Eine durch Worte ausgedrückte Zahl mit Ziffern zu ſchreiben.

Hierbei befolgt man dieſe Regeln:

1) Man bemerkt die Anzahl der Klaſſen oder jede Klaſſe mit einem Komma, und ſetzt eins vom andern ſo weit ab, daß drei Zahlzeichen in jeden Zwiſchenraum geſetzt werden können.

2) In dieſe Zwiſchenräume ſetzt man die Ziffern der durch Worte ausgedrückten Zahl, jede in ihre Klaſſe und Stelle.

3) Bleiben Stellen oder ganze Klaſſen leer, ſo füllt man die leeren Stellen oder Klaſſen mit Null aus.

Es ſei die gegebene Zahl:
Dreizehn Millionen, achthundert und ſiebenzig Tauſend, Vierhundert und Sechſe.

Da hier dreizehn Millionen die höchſte Zahl ſind, ſo erhält man überhaupt nur drei Klaſſen (§. 13.), die hier mit Sternchen bezeichnet ſtehen:

*, *, *

In die dritte Klaſſe (von der Rechten gegen die Linke) ſchreibt man nun 13; in die zweite oder in die Klaſſe der Tauſende aber 870, und in die erſte oder niedrigſte Klaſſe 406.

I .
Demnach erhält man: 13, 87 , 4 6.
I .
oder: 13, 870, 406.

Anmerkung 1.

Beim Ausſprechen findet ſich folgende Irregularität. Man ſpricht nämlich in jeder Klaſſe die Einer vor den Zehnern aus, da man ſonſt durchgängig die Werthe der Zahlzeichen ſo angiebt, wie ſie auf einander folgen: ſo ſagt man 24, vier und zwanzig, anſtatt: zwanzig und vier. Vermuthlich rührt dieſe Ausnahme noch von den erſten Erfindern unſers Zahlenſyſtems her, welche aller Wahrſcheinlichkeit nach auch die geſchriebenen Zahlen von der Rechten zur Linken geleſen haben, ſo wie jetzt noch die morgenländiſchen Nationen zu ſchreiben und zu leſen gewohnt ſind.

Anmerkung 2.

Mehrere Beiſpiele zur Uebung, um Zahlen zu ſchreiben und zu leſen, hierher zu ſetzen, iſt nach meiner Ueberzeugung unnöthig. Wer ſich das Geſetz merkt, nach welchem die Zahlen geſchrieben und geleſen werden, und mit demſelben die angezeigte Bezeichnungsart verbindet, muß im Stande ſeyn, jede gegebene Zahl zu leſen und zu ſchreiben.

III.

Allgemeine Begriffe vom Rechnen.

§. 15.

Rechnen heißt: Veränderungen mit Zahlen vornehmen, um aus den gegebenen (bekannten) die geſuchten (unbekannten) Zahlen zu finden. Bedient man ſich beim Rechnen der Zahlzeichen, ſo hat man die Zahlenrechenkunſt; braucht man aber Buchſtaben (gewöhnlich das kleine lateiniſche Alphabet): ſo hat man die Buchſtabenrechenkunſt. Jene nennt man die gemeine; dieſe aber die allgemeine Rechenkunſt. Die Buchſtaben vertreten nicht nur die Stellen der Zahlen, ſondern bezeichnen überhaupt Größen.

§. 16.

§. 16.

Die Veränderungen, die mit Zahlen vorgenommen werden können, gründen ſich urſprünglich auf den Begriff der Zahl (§. 2.) in welchem deutlich liegt, daß jede Zahl vermehrt oder vermindert werden kann; demnach wäre die Vermehrung oder Verminderung der Zahlen der Grund aller Zahlenveränderungen. Man vermehrt aber eine Zahl, wenn man ihr eine, oder mehr Einheiten zuſetzt; und vermindert eine Zahl, wenn man von ihr eine oder mehr Einheiten wegnimmt.

§. 17.

Aus dem Begriffe der Veränderungen der Zahlen entſtehen die Rechnungsarten oder Species der Rechenkunſt. Der Natur der Sache gemäß, würde man nur zwei Rechnungsarten haben, nämlich die Addition und die Subtraktion. Man addirt, wenn man eine Zahl um eine oder mehr andere Zahlen vermehrt, und ſubtrahirt, wenn man eine Zahl um eine andere vermindert. Beides geſchieht, wenn man die Einheiten der einen Zahl entweder um ſo viel vermehrt oder vermindert, als die andere Zahl Einheiten enthält. Da ſich aber der Fall oft zuträgt, daß man eine Zahl mehreremale einer andern gegebenen zuſetzen oder eine Zahl von einer andern gegebenen mehreremale wegnehmen ſoll: ſo hat man für dieſe Fälle noch zwei Rechnungsarten eingeführt, nämlich die Multiplikation und die Diviſion. Demnach giebt es vier Rechnungsarten.

§. 18.

Da es ganze Zahlen und Brüche (§. 5.), ungenannte und genannte Zahlen giebt: ſo giebt es auch für jede dieſer Klaſſen von Zahlen, vier Rechnungsarten, nämlich Rech-

nungsarten in ganzen und gebrochenen, in ungenannten und genannten Zahlen. Auch kommen die Veränderungen der Zahlen bald einfach, bald zuſammengeſetzt vor; und aus dieſem Grunde giebt es auch einfache, und zuſammengeſetzte Rechnungsarten.

§. 19.

Einerlei Zahl kann man nicht zugleich vermehren und vermindern, weil die Begriffe Vermehrung und Verminderung einander entgegengeſetzt ſind. Aus dieſem Grunde ſind Addition und Subtraktion, und ſo auch Multiplikation und Diviſion, einander entgegengeſetzt: und umgekehrt.

Anmerkung.

Zahlen und Größen ſind entgegengeſetzt, wenn eine die andere, entweder ganz, oder zum Theile, aufhebt; wie z. B. Vorwärtsgehen und Rückwärtsgehen; Steigen und Fallen.

Umgekehrt, iſt ein Ausdruck, den man der Kürze wegen in der Mathematik eingeführt hat. Im gegenwärtigen Falle (§. 19.) müßte man ſonſt ſagen: Die Subtraktion iſt der Addition, und die Diviſion der Multiplikation entgegengeſetzt.

§. 20.

Wenn Zahlen oder überhaupt Größen mit einander verglichen werden, ſo wird eigentlich unterſucht, ob beide gleich, oder ungleich ſind. Zwei Zahlen oder Größen ſind dann gleich, wenn ſich die eine für die andere ſetzen (ſubſtituiren) läßt; ungleich, wenn dieſes nicht angehet. So ſind ein Paar ungenannte Zahlen gleich, oder gleich groß, wenn ſie einerlei Menge Einheiten enthalten; ungleich, oder ungleich groß, wenn ſie nicht einerlei Menge Einheiten enthalten. Vergleicht man aber genannte Zahlen in Anſehung ihrer Größe mit einander, ſo

ſo muß man nicht allein bei beiden, die Menge ihrer Einheiten, ſondern auch den Werth der Einheiten, unterſuchen. So ſind 4 Thaler und 4 Groſchen als Zahlen betrachtet, zwar gleich, aber nicht als Thaler und Groſchen.

Anmerkung.

Die Werthe der Einheiten machen, bei den Rechnungsarten in genannten Zahlen, eine Hauptunterſuchung aus, und ihrer Verſchiedenheit muß man es daher zuſchreiben, daß Rechnungen mit genannten Zahlen gewöhnlich weitläufiger und verwickelter ſind, als Rechnungen mit ungenannten Zahlen.

§. 21.

Die Arithmetik oder Rechenkunſt beſchäftiget ſich überhaupt mit der Größe in ſo fern, als ſie als ein Ganzes betrachtet werden kann, das aus Theilen beſteht, wovon man wenigere oder mehrere nehmen kann, die aber alle zuſammengenommen für das Ganze geſetzt werden können. Eben ſo muß es auch möglich ſeyn, die Theile einzeln für einander zu ſetzen. So iſt z. B. ein Wald ein Ganzes, der aus Theilen (Bäumen, Revieren, Schlägen) beſteht. Jeder Theil (Baum, Revier oder Schlag von gleicher Größe) kann für den andern genommen, und ſo können alle für das Ganze geſetzt werden.

Die Gleichheit zweier Zahlen, oder überhaupt Größen, drückt man durch das Zeichen (= aequal) anſtatt des Wortes gleich oder gleich groß aus, und ſetzt es zwiſchen beide Zahlen oder Größen; z. B. 4 = 4.

§. 22.

Findet keine Gleichheit ſtatt, oder ſind zwei Zahlen oder Größen ungleich, ſo drückt man dieſe Ungleichheit durch (in = inaequal) aus. So iſt a in = b. Von

zwei ungleichen Zahlen oder Größen iſt allemal eine größer, als die andere. Die erſte nennt man daher auch die *größere*, die zweite aber die *kleinere* Zahl oder Größe. In jedem Falle enthält die größere von zwei ungleichen Zahlen oder Größen, die kleinere *ganz*, und noch *etwas mehr*; die kleinere aber iſt nur ſo groß, als *ein Theil* der größern.

Die *größere* von zwei ungleichen Zahlen oder Größen wird durch das Zeichen $(>)$ ſo bezeichnet, daß ihr die Oeffnung entgegen ſteht; die *kleinere* erhält zwar das nämliche Zeichen, aber mit zugekehrter Spitze $(<)$. So wird der Ausdruck $7 > 3$ geleſen: 7 iſt größer als 3; und $3 < 7$: 3 iſt kleiner als 7.

Anmerkung.

Dieſe allgemeinen Bemerkungen über die *Gleichheit* und *Ungleichheit* der Zahlen oder Größen, ſind im Begriffe der Zahl, und allgemein, im Begriffe der Größe gegründet, (§. 2. und §. 1. Einleitung).

Zweites Kapitel.

Allgemeine Grundſätze der Mathematik.

§. 23.

Jede Zahl, alſo auch jede Größe iſt ſich ſelbſt gleich. So iſt z. B. 4 = 4; der Thaler = dem Thaler. Iſt a das Zeichen irgend einer Größe, ſo läßt ſich der Satz kurz ſo ausdrücken: a = a.

Anmerkung.

Dieſer Satz enthält die Gleichheit ganz allgemein. Mit andern Worten kann er auch ſo ausgedrückt werden: Eine gewiſſe Zahl oder Größe kann nicht zugleich dieſe, und auch eine andere ſeyn; oder: Etwas kann nicht zugleich ſeyn, und nicht ſeyn. Er iſt der Satz des Widerſpruchs der Mathematiker, auf welchen alle Beweiſe der reinen Mathematik, nach der ſynthetiſchen Methode, zurückgeführt werden müſſen, wenn ſie die Gültigkeit einer Demonſtration haben ſollen. Dieſes Verfahren enthält einen Grund der an der Mathematik ſo gerühmten und unbezweifelten Gewißheit.

§. 24.

Das Ganze iſt allen ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich (§. 21).

8 = 6 und 2; oder
1 Thaler = 24 Groſchen.

§. 25.

§. 25.

Das Ganze iſt größer als jeder einzelne Theil; und größer als einige Theile allein genommen.

$8 > 1;$
und $8 > 6.$

oder: 1 Thaler > 1 Groſchen, und
1 Thaler > 16 Groſchen.

§. 26.

Wenn zwei Größen einer dritten gleich ſind; ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich.

12 = 8 und 4;
8 und 4 = 10 und 2
――――――――――――― *)
12 = 10 und 2.

Oder: 1 Ruthe = 10 Fuß;
10 Fuß = 100 Zoll
――――――――――――― *)
1 Ruthe = 100 Zoll.

Allgemein: $a = b;$
$b = c$
――――――― *)
$a = c.$

Anmerkung.

Dieſer Satz enthält einen förmlichen Schluß, oder Sillogism der Vernunftlehre nach der erſten Figur. Der erſte Satz, heißt der Oberſatz; der zweite, der Unterſatz; beide aber die Vorderſätze, oder Prämiſſen; der dritte Satz wird der Schlußſatz oder die Konkluſion genannt. Die Verbindung der Konkluſion mit den Prämiſſen nennt man die Konſequenz.

Zu jedem Vernunftſchluſſe werden alſo drei Stücke erfordert: 1) Der Gegenſtand, welcher verglichen wird; 2) das Merkmal, welches mit dieſem Gegenſtande verglichen wird; 3) das Zwiſchenmerkmal,
oder

oder der Mittelbegriff, durch welchen man die richtige Beziehung im Schlußſatze einſieht.

Demnach wäre in dem Schluſſe

$$\begin{array}{c} a = b \,: \\ \underline{b = c \quad} \\ a = c \end{array} \;{}^{*)}$$

a der Gegenſtand; c das Merkmal; und b der Mittelbegriff.

*) Im ſchriftlichen Vortrage der mathematiſchen Wiſſenſchaften, pflegt man ſich durch Zeichen ſo kurz wie möglich zu faſſen; daher vertritt die Linie, die Stelle der Wörter: alſo iſt; ſo iſt auch; mithin auch; folglich; ergo. Wörtlich könnte die obige Form ſo ausgedrückt werden: da $a = b$, und $b = c$: ſo iſt auch $a = c$.

§. 27.

Was größer oder kleiner iſt, als eine von zwei gleichen Größen, das iſt auch größer oder kleiner als die andere.

Erſter Fall:
$$\begin{array}{c} 8 = 6 \text{ und } 2 \\ \underline{12 > 8 \quad\quad} \\ 12 > 6 \text{ und } 2. \end{array}$$

oder:
$$\begin{array}{c} 1 \text{ Thaler} = 24 \text{ Groſchen}; \\ \underline{1 \text{ Dukaten} > 1 \text{ Thaler} \quad\quad} \\ 1 \text{ Dukaten} > 24 \text{ Groſchen}. \end{array}$$

allgemein:
$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{c > a} \\ c > b \end{array}$$

Zweiter Fall:
$$\begin{array}{c} 8 = 6 \text{ und } 2 \\ \underline{5 < 8 \quad\quad} \\ 5 < 6 \text{ und } 2. \end{array}$$

oder

oder: 1 Dukaten = 3 Thaler.
1 Gulden < 1 Dukaten.

1 Gulden < 3 Thaler.

allgemein: $a = b$
$d < a$

$d < b$.

§. 28.

Was größer iſt, als die größere von zwei ungleichen Größen, das iſt um ſo mehr auch größer, als die kleinere.

$8 > 6$
$12 > 8$

$12 > 6$

oder: 1 Thaler > 16 Groſchen;
1 Dukaten > 1 Thaler

1 Dukaten > 16 Groſchen.

allgemein: $a > b$
$c > a$

$c > b$

§. 29.

Was kleiner iſt, als die kleinere von zwei ungleichen Größen, das iſt um ſo mehr auch kleiner, als die größere.

$6 < 8$
$4 < 6$

$4 < 8$.

oder: 1 Fuß < 1 Ruthe;
1 Zoll < 1 Fuß

1 Zoll < 1 Ruthe.

allge-

$$\text{allgemein: } \begin{array}{c} a < b \\ \underline{c < a} \\ c < b \end{array}$$

Anmerkung.

Die für Groͤßen allgemein durch Woͤrter ausgedruͤckten Saͤtze, gelten auch für Zahlen (§. 1. Einl.), wie dies auch die beigeſetzten Beiſpiele zeigen. Da nun der Begriff von Groͤßen auch auf Linien, Flaͤchen und Koͤrper paßt, ſo ſind dieſe Grundſaͤtze nicht nur Grundſaͤtze für die Arithmetik, ſondern auch für die Geometrie, und gelten alſo auch in der geſammten Mathematik. Dieſe Saͤtze ſind übrigens nicht ſo fremdartig, als ſie auf den erſten Anblick dem Ungeuͤbten ſcheinen moͤgen; jeder vernuͤnftige Menſch braucht ſie in der Anwendung im gemeinen Leben.

Drittes Kapitel.

Von den vier Rechnungsarten ſowohl in ungenannten als auch in genannten und mehrerleinamigen ganzen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Die Addition.

§. 30.

Die **Addition** lehrt aus gegebenen (bekannten) Zahlen eine andere (unbekannte) finden, die ſo groß iſt, als die gegebenen zuſammengenommen (§. 17.).

Man nennt die gegebenen, die ſummirenden Zahlen; die geſuchte Zahl aber, die Summe (das Aggregat). Die Summe kann daher als das Ganze, und die ſummirenden Zahlen als alle Theile zuſammen genommen, betrachtet werden (§. 21.).

Das Zeichen, wodurch die Addition angedeutet wird, iſt (+), welches durch plus oder mehr ausgeſprochen, und zwiſchen die ſummirenden Zahlen, wenn dieſe in einer fortlaufenden Reihe neben einander geſchrieben werden, geſetzt wird.

So ſind in dem Ausdrucke $6+4=10$, die Zahlen, 6 und 4 die ſummirenden Zahlen, und 10 iſt die Summe.

§. 31.

1) Gleiches zu Gleichen addirt, giebt gleiche Summen.

2) Wenn man dagegen zu ungleichen Größen oder Zahlen, gleiche addirt, ſo werden die Summen ungleich. Die Summe iſt größer, wenn man eben ſo viel zu der größern; hingegen kleiner, wenn man eben ſo viel zu der kleinern addirt.

3) Um ſo mehr iſt die Summe des Größern zum Größern, größer, als die Summe des kleinern zum kleinern.

Zu No. 1: $\begin{array}{c} 6 = 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 6+4 = 6+4 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ \hline a+b = a+b \end{array}$

Zu No. 2: $\begin{array}{c} 10 > 8 \\ 6 = 6 \\ \hline 10+6 > 8+6 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a+c > b+c \end{array}$

Zu No. 3: $\begin{array}{c} 12 > 8 \\ 6 > 2 \\ \hline 12+6 > 8+2 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a+c > b+d \end{array}$

§. 32.

Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen, von welchen keine größer als 9 iſt, muß man durchs Zuſammenzählen in Gedanken finden, und durch die ihr zugehörigen Zahlzeichen ausdrücken können (§. 8.).

Anmerkung.

Auf dieſen erſten Forderungsſatz gründet ſich die ganze Ausübung der Addition. Anfangs zählt man Einheit zu Einheit, und bekommt dadurch die Summe. Nach und nach wird man geübter und merkt ſich Summen von größern Zahlen auswendig, bis man endlich im Stande iſt, eine große Anzahl von Zahlen in eine Summe zu bringen.

bringen. Dies Verfahren, beſonders wenn die gegebenen Zahlen nicht aufgeſchrieben werden, nennt man das Rechnen im Kopfe. Wer die Rechenkunſt in Geſchäften nöthig hat, thut wohl, wenn er von Jugend auf ſich gewöhnt, viele und große Summen durchs Rechnen im Kopfe zu finden.

§. 33.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere gegebene ganze Zahlen in eine Summe zu bringen.

Auflöſung.

A. in ungenannten Zahlen.

Die gegebenen Zahlen ſind: 5473 + 1245; desgleichen: 7469 + 364 + 789 + 1678.

Hierbei befolge man dieſe Regeln:

1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen von der Rechten gegen die Linke ſo unter einander, daß die einfachen Zahlzeichen, ſowohl die Einheiten als auch die übrigen, nach ihren Stellen und Ordnungen unter einander zu ſtehen kommen, d. i. man ſetze Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, Tauſende unter Tauſende u. ſ. w. Unter die ſo hingeſchriebenen Zahlen ziehe man einen Strich, und ſchreibe darunter die Summe.

2) Um dieſe Summe zu finden, addire man von der Rechten gegen die Linke zu, alle Einheiten der Zahlzeichen, die in einer Kolumne über einander ſtehen, alſo zu einerley Stelle und Ordnung gehören, und ſetze die Summen dieſer Theile der gegebenen Zahlen, oder dieſe Partialſummen unter den Strich ſo, daß auch die Zahlzeichen derſelben in diejenigen Stellen und Ordnungen zu ſtehen kommen, in welche ſie nach ihrem Werthe gehören.

3) Zu-

3) Zuletzt addire man auf eben die Art die Partialſummen und man erhält daraus die Totalſumme. Um die letztere in einer Zeile zu erhalten, merke man, ob die Zehner der Partialſummen unter 9 oder gerade 9, oder über 9 betragen; in den beiden erſten Fällen ſchreibe man das Zahlzeichen der Totalſumme unter die Einer der Partialſummen; im letzten Falle aber ſetze man nur die Einer unter, und behalte das übrige Zahlzeichen, oder alle, wenn es mehrere ſind, im Sinne, und addire das Zurückbehaltene zu den Zehnern der Partialſummen. So verfährt man auch bey den Zehnern, u. ſ. f. bei allen übrigen Stellen und Ordnungen.

5473	Summirende Zahlen.
1245	
8	Partialſummen.
11	
66	
6718	Totalſumme.

Ferner:

7469
364
789
1678
30
27 .
20 . .
8 . . .
10300

Abgekürzt: Zur Erſparung der Zeit kann man ſo verfahren. Man addirt, wie vorhin, alle Zahlzeichen der ſummirenden Zahlen in der erſten Stelle zur Rechten, und ſetzt, wenn die erhaltene Summe 9 übertrifft, nur die Einer derſelben in die Stelle der Einer in der Summe; was übrig bleibt, wird zur Kolumne der Zehner genom-

 men.

bringen. Dies Verfahren, beſonders wenn die gegebenen Zahlen nicht aufgeſchrieben werden, nennt man das Rechnen im Kopfe. Wer die Rechenkunſt in Geſchäften nöthig hat, thut wohl, wenn er von Jugend auf ſich gewöhnt, viele und große Summen durchs Rechnen im Köpfe zu finden.

§. 33.

Aufgabe.

Zwei oder mehrere gegebene ganze Zahlen in eine Summe zu bringen.

Auflöſung.

A. in ungenannten Zahlen.

Die gegebenen Zahlen ſind: 5473 + 1245; desgleichen: 7469 + 364 + 789 + 1678.

Hierbei befolge man dieſe Regeln:

1) Man ſchreibe die gegebenen Zahlen von der Rechten gegen die Linke ſo unter einander, daß die einfachen Zahlzeichen, ſowohl die Einheiten als auch die übrigen, nach ihren Stellen und Ordnungen unter einander zu ſtehen kommen, d. i. man ſetze Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, Tauſende unter Tauſende u. ſ. w. Unter die ſo hingeſchriebenen Zahlen ziehe man einen Strich, und ſchreibe darunter die Summe.

2) Um dieſe Summe zu finden, addire man von der Rechten gegen die Linke zu, alle Einheiten der Zahlzeichen, die in einer Kolumne über einander ſtehen, alſo zu einerley Stelle und Ordnung gehören, und ſetze die Summen dieſer Theile der gegebenen Zahlen, oder dieſe Partialſummen unter den Strich ſo, daß auch die Zahlzeichen derſelben in diejenigen Stellen und Ordnungen zu ſtehen kommen, in welche ſie nach ihrem Werthe gehören.

3) Zu-

3) Zuletzt addire man auf eben die Art die Partialſummen und man erhält daraus die Totalſumme. Um die letztere in einer Zeile zu erhalten, merke man, ob die Zehner der Partialſummen unter 9 oder gerade 9, oder über 9 betragen; in den beiden erſten Fällen ſchreibe man das Zahlzeichen der Totalſumme unter die Einer der Partialſummen; im letzten Falle aber ſetze man nur die Einer unter, und behalte das übrige Zahlzeichen, oder alle, wenn es mehrere ſind, im Sinne, und addire das Zurückbehaltene zu den Zehnern der Partialſummen. So verfährt man auch bey den Zehnern, u. ſ. f. bey allen übrigen Stellen und Ordnungen.

5473	Summirende Zahlen.
1245	
8	Partialſummen.
11	
66	
6718	Totalſumme.

Ferner:

7469
364
789
1678
30
27 .
20 . .
8 . . .
10300

Abgekürzt: Zur Erſparung der Zeit kann man ſo verfahren. Man addirt, wie vorhin, alle Zahlzeichen der ſummirenden Zahlen in der erſten Stelle zur Rechten, und ſetzt, wenn die erhaltene Summe 9 übertrifft, nur die Einer derſelben in die Stelle der Einer in der Summe; was übrig bleibt, wird zur Kolumne der Zehner genom-

 men.

men. Verfährt man in allen Kolumnen der ſummirenden Zahlen auf dieſe Art, ſo erhält man die Totalſumme ſogleich in einer einzigen Zeile.

5473	7469
1245	364
6718	789
	1678
	10300

Die Zahl 6718 des erſten Beiſpiels, die durch das vorgeſchriebene Verfahren erhalten wird, iſt die Summe der gegebenen Zahlen; denn ſie enthält ihre Einer, Zehner, Hunderte und Tauſende, oder ſie iſt durch die Addition aus denſelben nach und nach zuſammengeſetzt worden (§. 21.).

Anmerkung.

Sollte man beim Rechnen ſelbſt das Zuſammenzählen der Einheiten mehrerer Zahlzeichen anfänglich zu ſchwer finden, ſo kann man von den ſummirenden Zahlen, wenn ihrer viele ſind, zwei oder drei nehmen, und ihre Summe ſuchen. Die ſo erhaltene Partialſumme bringt man alsdenn zuletzt in eine Summe. So könnte man mit dem vorigen Beiſpiele: 7469 + 364 + 789 + 1678 verfahren.

7469	789
364	1678
7833 Erſte Partialſumme	2467 zweite Partialſumme.

7833
2467
10300 Totalſumme.

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Man addire 23 Thlr. 7 gr. 6 pf. + 77 Thlr. 14 gr. 9 pf. + 96 Thlr. 4 gr. 8 pf. Wie groß iſt die Summe?

23 Thlr.

23 Thlr.	7 gr.	6 pf.
77 —	14 —	9 —
96 —	4 —	8 —
197 Thlr.	2 gr.	11 pf.

Hier zählt man

a) die Pfennige: 6 und 9 iſt 15, und 8 dazu giebt 23. Nun ſind 23 pf. gleich 1 gr. und 11 pf.; daher ſetzet man die 11 pf. unter die Pfennige, nimmt den 1 gr. zu den folgenden Groſchen, und zählt ferner:

b) 1 und 7 iſt 8, und 8 und 14 iſt 22, und 22 und 4 iſt 26. Da nun 26 Groſchen gleich 1 Thlr. 2 gr. ſind; ſo ſchreibt man die 2 übrigen Groſchen unter die Reihe der Groſchen, und den 1 Thlr. zu den folgenden Thalern, und zählt endlich

c) 1 und 3 iſt 4, und 7 darzu iſt 11 und 6 iſt 17. Von dieſer 17 ſetzt man die 7 unter die Einer, und nimmt die 1 zu den folgenden Zehnfachen und ſagt: 1 und 2 iſt 3, und 7 darzu giebt 10, und 10 und 9 giebt 19. Dieſe ſchreibt man unter die Reihe der Zehnfachen aus; ſo wird die ganze Summe

197 Thlr. 2 gr. 11 pf. ſeyn.

Und dieſe ſind eben ſo viel, als die drei vorigen Poſten zuſammen genommen.

Nun folgen einige Beiſpiele zur Uebung.

Ein Förſter hat bei der Frühlingsförſterei von Holz einzuberechnen 27 Thlr. 12 gr. 6 pf. + 14 Thlr. 19 gr. 8 pf. + 36 Thlr. 20 gr. 7 pf. + 19 Thlr. 8 gr. 4 pf. Was beträgt die ganze Summe?

98 Thlr. 13 gr. 1 pf.

Desgleichen: Ein andrer hat ſeinen Forſt in gewiſſe Diſtrikte eingetheilet und die Stämme nach den unterſchiedenen Holzarten ausgezählet. Nun befinden ſich auf A

 378

378 Stangen, 696 Schaalhölzer, 877 Saulbäume, 596 Bretbäume und 96 Wellbäume. In B ſtehen 68 Schaalhölzer, 167 Saulbäume, 977 Bretbäume und 213 Wellbäume. In C ſind vorhanden: 1726 Stangen, 54 Schaalhölzer, 1627 Saulbäume, 304 Bretbäume, und 226 Wellbäume. Und in D ſind noch 977 Stangen, 455 Schaalhölzer, 687 Saulbäume, 413 Bretbäume und 718 Wellbäume gezählet worden. Was beträgt jede Holzart insbeſondere und wie viel Stämme ſtehen überhaupt auf dieſem Forſte?

3081 Stangen, 1673 Schaalhölzer, 3358 Saulbäume, 2290 Bretbäume, und 1163 Wellbäume, und überhaupt in allen 11565 Stämme.

Ferner: ein Forſtbedienter hat ſein Revier nach und nach mit der Meßkette ummeſſen und gefunden, daß er

a) 242 Ruthen 12 Fuß.

b) 388 Ruthen 10 Fuß.

c) 977 Ruthen 8 Fuß.

d) 298 Ruthen 7 Fuß, und endlich

e) 2688 Ruthen 9 Fuß aufgezeichnet. Wenn nun die Ruthe zu 15 Fuß gerechnet wird; wie groß wird der ganze Umfang ſeines Reviers ſeyn?

4596 Ruthen und 1 Fuß.

Ein Holzſchläger hat mit ſeinen Gehülfen bei der Herbſtförſterei an Klaſtern geſchlagen und aufgeſetzt: 27 + 18 + 30 + 12 + 16 + 48 + 28 + 9 Klf. Wie viel Klaftern betragen dieſe überhaupt in einer Summe, um ſein Schlaglohn dafür fordern zu können?

188 Klaftern.

Der Oberforſtmeiſter zu M — hat auf Verordnung der Kammer nachſtehendes Bauholz anzuweiſen, als:

1)

1) Für das Kammergut K. 272 Ziegellatten, 88 Saulbäume und 44 Bretbäume.

2) Für das dahin gehörige Vorwerk G. 388 Ziegellatten, 213 Saulbäume und 69 Bretbäume.

3) Für das abgebrannte Dorf W. 277 Saulbäume und 116 Bretbäume.

4) Für das Städtchen U. welches ebenfalls durch Feuer verunglückt, 429 Ziegellatten, 2788 Saulbäume und 827 Bretbäume.

Wenn nun dieſes Holz insgeſammt auf dem Revier zu A ſoll geſchlagen werden; wie viel von jeder Holzart und wie viel Stämme überhaupt, gehen genanntem Forſte ab?

1089 Ziegellatten, 3366 Saulbäume und 1056 Bretbäume, und überhaupt 5511 Stämme.

Endlich: Der Förſter zu X. bekommt an Neujahrsgetreide aus nachfolgenden Orten, als: aus X. 14 Schfl. 2 Viertel und 2 Metzen, aus Y. 14 Schfl. 3 Viertel 1 Metze, aus Z. 8 Schfl. 2 Viertel 1 Metze, aus A. 6 Schfl. 3 Viertel 3 Metzen und aus B. 7 Scheffel 1 Viertel und 2 Metzen. Was beträgt ſein Neuesjahr überhaupt an Getreide?

52 Schfl. 1 Viertel und 1 Metze.

Anmerkung.

Die Aufgaben in genannten und mehrerleinamigen Zahlen, ſetzen die Kenntniß der Eintheilungen derjenigen Dinge voraus, die man berechnet. Da dieſe nun an verſchiedenen Orten verſchieden ſind, ſo muß man ſich dieſelben an Ort und Stelle bekannt machen, oder Tabellen beſitzen, welche die Eintheilungszahlen enthalten. Dieſe Zahlen nennt man auch Reduktionszahlen, und das Verfahren, Zahlen mit Namen von geringerem Werthe auf ſolche zu bringen, die Namen von größern Werthen erhalten, ſo wie auch umgekehrt: Reduktion.

§. 34.

Eine andre Art, aus gegebenen Zahlen größere zu finden, als die gegebenen ſind, beſtehet darin, daß man die gegebenen Zahlen etlichemal zu ſich ſelber zählet, als z. B. drei, 3 mal zu ſich ſelbſt gezählet, giebt 9; vier, 4 mal zu ſich ſelbſt gezählt, giebt 16.

Damit aber dieſe Zahlen nicht ſo vielmal dürfen unter einander geſetzt und zuſammengezählet werden, welches oft ſehr weitläuftig ſeyn würde; ſo hat man durch die Addition eine Tafel erfunden, vermittelſt welcher alle Einheiten, bis auf neunmal zuſammen gezählet, in ihrer Summe können gefunden werden. Dieſe Tafel, welche dem Pythagoras, als Erfinder, zugeeignet wird, heißt daher auch nach ihm Tabula Pythagorica, oder insgemein das Einmal Eins.

§. 35.

Aufgabe.

Das Einmal Eins aufzuſetzen.

Aufloſung.

Man ſchreibet

1) die Zahlen nach der Ordnung von eins bis 9 hintereinander in einer Linie hin, und eben ſo auch wieder zur Linken in einer Reihe unterwärts.

2) Man addirt die in der oberſten Reihe auf einander folgenden Zahlen jede insbeſondere zu ſich ſelber, und ſetzt ihre Summen gleich darunter ſo, daß ſie mit der zur Linken ſtehenden 2 wieder in einer Linie zu ſtehen kommen. Man addirt hierauf

3) die oberſten Zahlen zu ihren darunter ſtehenden Summen, und ſchreibt dieſe neuen Summen unter die erſtern ſo, daß ſie mit der zur Seite ſtehenden 3 in einer Linie fortgehen. Und alsdenn addirt man ferner

4) jedesmahl die obenſtehende Zahl zu der letztgefundenen Summe, bis man ſo viel Linien vollgefüllt, als an der Seite herunter Zahlen ſtehen. So hat man, was verlangt iſt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 36.

Der Gebrauch dieſer Tafel iſt folgender: Will man eine Zahl etlichemal zu ihr ſelber zählen, z. B. man wollte 6 ſiebenmal zuſammen nehmen; ſo wird die 6 in der oberſten Reihe der Zahlen geſucht, und die 7 in der Reihe der Zahlen, die zur Linken herunter gehet, oder man nimmt die 7 in der oberſten und die 6 in der zur Linken herunter gehenden Reihe. Geht man nun in den Zwiſchenräumen dieſer beiden Zahlen bis an das Fach, wo ſie beide zuſammen kommen; ſo findet man in demſelben in beiden Fällen die Zahl 42 eingezeichnet. Dieſes zeiget an, daß 6 ſiebenmal oder auch 7 ſechsmal zu ſich ſelber addiret in der Summe 42 giebt. Oder welches einerlei iſt: 6 mal 7 iſt 42, und 7 mal 6 iſt auch 42. Mithin findet man in dieſer Tafel alle Zahlen von 1 bis 9 mit einander vervielfältiget. Und daher macht man ſich dieſelbe vorzüglich zu Nutze.

Zweiter Abſchnitt.

Die Multiplikation.

§. 37.

Die Multiplikation iſt nach §. 17. (verglichen mit §. 32.) eine abgekürzte Addition für den Fall, wenn eine Zahl mehreremale zu ſich ſelbſt addirt werden ſoll, und lehrt aus zwei gegebenen (bekannten) Zahlen eine dritte finden, welche eine von den gegebenen ſo oft enthält, als die andere die Einheit. Man nennt die Zahl, welche man durch die Multiplikation erhält, das Produkt; die eine von den gegebenen Zahlen das Multiplikandum, die andere aber den Multiplikator. Demnach iſt das Multiplikandum im Produkte ſo vielmal enthalten, als der Multiplikator die Einheit enthält.

Auch können das Multiplikandum und der Multiplikator zuſammen, die Faktoren heißen, in welchem Falle alsdenn das Produkt, das Faktum heißt.

Das Zeichen, wodurch die Multiplikation angezeigt wird, iſt ein liegendes Kreuz (×) oder (.). Eins dieſer Zeichen ſetzt man zwiſchen die Faktoren. Z. B. $5 \times 8 = 40$; oder $5 . 8 = 40$ d. i. 5 multiplicirt mit 8. In dieſen Beiſpielen ſind 5 und 8 die Faktoren, und 40 das Faktum. Nennt man nun einen der Faktoren, etwa 8 das Multiplikandum, ſo iſt der andere 5, der Multiplikator, und das Produkt heißt das Faktum.

Iſt einer der Faktoren zuſammengeſetzt, oder ſind ſie vielleicht beide durch die geſammten Theile einer Summe ausgedrückt, ſo ſetzt man ſie in eine Parentheſe ( ), und folgende Ausdrücke bedeuten alsdenn einerlei: $(6+4) . 5$; $10 . 5$. Oder $6 . (4+2)$; $6 . 6$. Eben ſo: $(5+4) . (6+2)$; $9 . 8$. Desgleichen machen auch die Zeichen keinen Unterſchied. Der Ausdruck $6 . 5$ iſt ſo viel als 6×5.

Anmer-

Anmerkung.

In der Arithmetik ſowohl, als in der Geometrie, und überhaupt in der geſammten Mathematik, iſt der Gebrauch der Parentheſen von Wichtigkeit, und von nicht unbeträchtlichem Nutzen. So würde der Ausdruck $5+4 . 6+2$ heißen $9 . 6+2$ oder 56, da er ſo $(5+4) . (6+2)$ das Faktum 72 giebt.

Manche Fälle machen die Parentheſen nothwendig, da andere, ſtatt des Gebrauchs derſelben zulaſſen, die Ausdrücke ſo einzurichten, daß ihr Werth ungeändert bleibt und dabei die Form leichter wird. Dieſe Aenderung könnte man eine Reduktion der Ausdrücke nennen. So iſt der Ausdruck $(6+4) . 5$ in den reducirt: $10 . 5$.

§. 38.

1) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Produkte.

2) Sind aber bei gleichen Multiplikatoren die Multiplikanda ungleich, ſo giebt das größere auch das größere Produkt.

3) Um ſo mehr iſt das Produkt des Größern mit dem Größern, größer, als das Produkt des Kleinern mit dem Kleinern (§. 31.).

Zu N. 1.
$$\begin{array}{c} 6 = 6 \\ 2 = 2 \\ \hline 6.2 = 6.2 \end{array} \qquad \text{allgemein} \qquad \begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ \hline ab = ab \end{array}$$

Zu N. 2.
$$\begin{array}{c} 10 > 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 10.4 > 6.4 \end{array} \qquad \text{allgemein} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ m = m \\ \hline am > bm \end{array}$$

Zu N. 3.
$$\begin{array}{c} 8 > 5 \\ 4 > 3 \\ \hline 8.4 > 5.3 \end{array} \qquad \text{allgemein} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ m > n \\ \hline am > bn \end{array}$$ *)

Anmerkung *).

Wird die Multiplikation mit Buchſtaben verrichtet, ſo hat man zwiſchen die Faktoren das Multiplikationszeichen zu ſetzen nicht nöthig; denn man verſteht a b wie a.b oder a × b, und der Grund davon liegt darin, daß es keine Zweideutigkeit, oder kein Mißverſtändniß verurſacht, wenn auch das Zeichen weggelaſſen wird. So heißt a b c d ein Faktum aus den vier Faktoren a, b, c und d zuſammengeſetzt. Ganz anders aber iſt es beim Gebrauch der Zahlen; denn ſchriebe man das Produkt 2.4 ohne dazwiſchen geſetztes Multiplikationszeichen 24: ſo würde man die Zahl für keine andere, als für vier und zwanzig halten.

§. 39.

Sind beide Faktoren ganze Zahlen (wie dies hier gegenwärtig der Fall iſt): ſo iſt das Produkt gleich, wenn man ſie auch verwechſelt, d. i. die erſte Zahl mit der zweiten, oder die zweite mit der erſten multiplicirt.

Iſt der eine Faktor 4, und der andere 3, ſo iſt das Produkt ſowohl 4.3 als auch 3.4, und beide ſind gleich. Denn man bezeichne einmal beide Zahlen mit Sternchen, und zwar ſo, daß jede ſo viele Sternchen erhalte, als ſie Einheiten ausdrückt, und ſetze das Multiplikandum in eine Zeile von a nach b, und ſo vielmal unter ſich, von a nach c, als der Multiplikator Eins enthält:

a * * * * b
  * * * *
c * * * *

So iſt die Summe aller Sternchen ſo groß, als das Produkt 4.3 oder es iſt 4 + 4 + 4; denn die Reihe a b wird ſo vielmal genommen, als die Reihe a c Sternchen, d. i. Eins enthält. Nimmt man aber die Reihe a c ſo vielmal, als die Reihe a b Eins enthält, ſo hat man dieſelbe Menge, nämlich 3 + 3 + 3 + 3 = 3.4. Heißt

nun

nun allgemein die Reihe von a nach b, oder ab = M; ac aber m: ſo iſt M. m eben ſo wie m. M die Menge der Einheiten. Da nun M. m = m. M (§. 38.): ſo iſt auch 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 . 3 = 3 . 4. Hierdurch wird auch zugleich der Begriff der Multiplikation §. 37. gerechtfertiget.

Hieraus folgt deutlich, daß man, wenn auch mehrere Faktoren mit einander multiplicirt werden, die Ordnung, in welcher ſie auf einander folgen, verändern kann, wie man will, ohne daß die Produkte geändert werden. Demnach iſt z. B. 4 . 5 . 6 = 5 . 6 . 4 = 6 . 4 . 5 u. ſ. w.

§. 40.

Produkte zweier Zahlen, von welchen keine größer als 9 iſt, kann man aus der Pythagoriſchen Tafel (§. 35.) nehmen.

Anmerkung.

Da man die Pythagoriſche Tafel oft nöthig hat, ſo iſt es unumgänglich nöthig, ſie auswendig zu lernen; und da ſie das iſt, was wir das Einmal Eins nennen, und dieſes eine Beſchäftigung in unſerer Kindheit iſt, ſo kann man mit Sicherheit die Kenntniß deſſelben vorausſetzen.

Die Nepperſchen Stäbchen und mehrere Arten von Rechenmaſchinen führen noch weiter, machen aber die Kenntniß des Einmal Eins in gemeinen Rechnungen nicht ganz entbehrlich. Man ſehe: Fortſetzung der Rechenkunſt, in Anwendungen auf mancherlei Geſchäfte. Von Abraham Gotthelf Käſtner. (Der mathematiſchen Anfangsgründe erſten Theils zweite Abtheilung). Göttingen 1786.

§. 41.

Vortheile beim Multipliciren gewähren die Fälle, wo der eine Faktor 10 oder 100, oder überhaupt 1 mit einer gewiſſen Anzahl Nullen iſt. Man multiplicirt dem-

Anmerkung *).

Wird die Multiplikation mit Buchſtaben verrichtet, ſo hat man zwiſchen die Faktoren das Multiplikationszeichen zu ſetzen nicht nöthig; denn man verſteht a b wie a . b oder a × b, und der Grund davon liegt darin, daß es keine Zweideutigkeit, oder kein Mißverſtändniß verurſacht, wenn auch das Zeichen weggelaſſen wird. So heißt a b c d ein Faktum aus den vier Faktoren a, b, c und d zuſammengeſetzt. Ganz anders aber iſt es beim Gebrauch der Zahlen; denn ſchriebe man das Produkt 2.4 ohne dazwiſchen geſetztes Multiplikationszeichen 24: ſo würde man die Zahl für keine andere, als für vier und zwanzig halten.

§. 39.

Sind beide Faktoren ganze Zahlen (wie dies hier gegenwärtig der Fall iſt): ſo iſt das Produkt gleich, wenn man ſie auch verwechſelt, d. i. die erſte Zahl mit der zweiten, oder die zweite mit der erſten multiplicirt.

Iſt der eine Faktor 4, und der andere 3, ſo iſt das Produkt ſowohl 4 . 3 als auch 3 . 4, und beide ſind gleich. Denn man bezeichne einmal beide Zahlen mit Sternchen, und zwar ſo, daß jede ſo viele Sternchen erhalte, als ſie Einheiten ausdrückt, und ſetze das Multiplikandum in eine Zeile von a nach b, und ſo vielmal unter ſich, von a nach c, als der Multiplikator Eins enthält:

a * * * * b
  * * * *
c * * * *

So iſt die Summe aller Sternchen ſo groß, als das Produkt 4 . 3 oder es iſt 4 + 4 + 4; denn die Reihe a b wird ſo vielmal genommen, als die Reihe a c Sternchen, d. i. Eins enthält. Nimmt man aber die Reihe a c ſo vielmal, als die Reihe a b Eins enthält, ſo hat man dieſelbe Menge, nämlich 3 + 3 + 3 + 3 = 3 . 4. Heißt

nun

nun allgemein die Reihe von a nach b, oder ab = M; ac aber m: ſo iſt M.m eben ſo wie m.M die Menge der Einheiten. Da nun M.m = m.M (§. 38.): ſo iſt auch 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 · 3 = 3 · 4. Hierdurch wird auch zugleich der Begriff der Multiplikation §. 37. gerechtfertiget.

Hieraus folgt deutlich, daß man, wenn auch mehrere Faktoren mit einander multiplicirt werden, die Ordnung, in welcher ſie auf einander folgen, verändern kann, wie man will, ohne daß die Produkte geändert werden. Demnach iſt z.B. 4.5.6 = 5.6.4 = 6.4.5 u.ſ.w.

§. 40.

Produkte zweier Zahlen, von welchen keine größer als 9 iſt, kann man aus der Pythagoriſchen Tafel (§. 35.) nehmen.

Anmerkung.

Da man die Pythagoriſche Tafel oft nöthig hat, ſo iſt es unumgänglich nöthig, ſie auswendig zu lernen; und da ſie das iſt, was wir das Einmal Eins nennen, und dieſes eine Beſchäftigung in unſerer Kindheit iſt, ſo kann man mit Sicherheit die Kenntniß deſſelben vorausſetzen.

Die Nepperſchen Stäbchen und mehrere Arten von Rechenmaſchinen führen noch weiter, machen aber die Kenntniß des Einmal Eins in gemeinen Rechnungen nicht ganz entbehrlich. Man ſehe: Fortſetzung der Rechenkunſt, in Anwendungen auf mancherlei Geſchäfte. Von Abraham Gotthelf Käſtner. (Der mathematiſchen Anfangsgründe erſten Theils zweite Abtheilung). Göttingen 1786.

§. 41.

Vortheile beim Multipliciren gewähren die Fälle, wo der eine Faktor 10 oder 100, oder überhaupt 1 mit einer gewiſſen Anzahl Nullen iſt. Man multiplicirt dem-

demnach eine Zahl mit 10, wenn man ihr zur Rechten eine 0 beifügt (§. 9 und 10.). Aus eben dem Grunde multiplicirt man eine Zahl mit 100 oder 1000 u. ſ. w. wenn man ihr zwei oder drei Nullen beifügt. Denn man kann ſich vorſtellen, als ſei z. B. die Zahl 50 aus 5.10; 600 aus 6.100, und 6000 aus 6.1000 u. ſ. w. entſtanden; eben ſo die Zahlen 1260 aus 126.10; 14500 aus 145.100; 1264000 aus 1264.1000; mithin auch 45200.34000 aus 452.100.34.1000 = 452.34. 100.1000 = 452.34.10000. Dies Verfahren enthält folgende Regel allgemein. Wenn die Faktoren Zahlen mit angehängten Nullen ſind: ſo multiplicirt man die Zahlen (nach §.40. und ſetzt an das Faktum ſo viele Nullen, als beiden Faktoren zuſammen genommen angehängt ſind.

§. 42.

Aufgabe.

Eine zuſammengeſetzte Zahl mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Man ſchreibe den Multiplikator unter die Einer des Multiplikandums, und ziehe unter beide, wie bei der Addition, einen Strich.

2) Multiplicire nun die Einer des Multiplikandums mit dem Multiplikator, und ſo fort die Zehner, Hunderte, Tauſende ꝛc. nach §. 36. Enthält das Produkt der Einer einen, oder mehrere Zehner, ſo ſetze man bloß die Einer in die Stelle des Produkts, nämlich unter die Einer des Multiplikandums, die Zehner aber behalte man im Sinne, und addire ſie, wenn man das Produkt der Zehner gemacht hat, zu den Zehnern. Auf eine ähnliche Art verfährt man mit allen Theilen des Multiplikandums.

Es ſei z. B. 23416 das Multiplikandum
2 der Multiplikator

ſo iſt 46832 das Produkt

desgleichen 45928 . 6
6

275568

Eigentlich ſollte man jeden Theil des Produkts, ſo wie man denſelben durch die Multiplikation erhält, unterſetzen, und zuletzt die Partialprodukte in eine Summe bringen, die zugleich das geſammte Produkt ausdrückte. Z. B.

```
 45928
     6
 -----
    48 ┐
   12  │
   54  ├ Partialprodukte
  30   │
 24    ┘
------
275568 die Summe oder das geſammte
       Produkt.
```

Das Verfahren im vorſtehenden Beiſpiele zeigt deutlich, daß alle Einer, Zehner, Hunderte u. ſ. w. alſo alle Theile des Multiplikandums, ſo vielmal genommen ſind, als der Multiplikator Einheiten enthält. Daher folgt, daß die gefundene Zahl das Multiplikandum ſo oft enthalte, als der Multiplikator die Einheit; mithin iſt dieſe Zahl das verlangte Produkt.

§. 43.

Aufgabe.

Zwei aus einfachen Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahlen zu multipliciren.

Auflö-

Aufloſung.

A. in ungenannten Zahlen.

1) Man ſchreibe die Faktoren ſo unter einander, daß die Einheiten des Multiplikators unter den Einheiten des Multiplikandums ſtehen, auch verfahre man ſo mit den Zehnern, Hunderten, Tauſenden u. ſ. w.

2) Nun multiplicire man das Multiplikandum mit den Einern des Multiplikators, und ſchreibe das Partialprodukt ſo unter, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern ſtehen ꝛc.

3) Das Produkt der Einer des Multiplikandums aber, mit den Zehnern des Multiplikators ſetze man ſo, daß das niedrigſte Zahlzeichen zur rechten, unter die Zehner des Multiplikandums komme. Auf eine ähnliche Art verfahre man mit allen Partialprodukten des Multiplikandums mit den Theilen des Multiplikators.

4) Kommen in der Mitte des Multiplikators Nullen vor, ſo übergehe man ſie, weil ſie nicht multipliciren. Denn $4 . 0 = 0$ und $0 . 4 = 0$; ſetze aber das folgende Partialprodukt ſo viel Stellen weiter zur Linken, als Nullen hinter einander im Multiplikator vorkommen, damit ſie ihren Werth nicht verlieren.

5) Hat ein Faktor am Ende Nullen, ſo multiplicire man die geltenden Zahlzeichen, ſetze aber dem Produkte rechter Hand die Nullen des Multiplikators bei. Kommen Nullen am Ende beider Faktoren vor, ſo verfahre man wie vorhin, und gebe dem Produkte ſo viele Nullen, als beide Faktoren zuſammengenommen enthalten.

Beiſpiele:

Beiſpiele:

674584	5432000
243	120000
2023752	10864
2698336	5432
1349168	651840000000
163923912	

6405124	Anſtatt	6405124
13002		13002
12810248		12810248
19215372		0000000
6405124		0000000
83279422248		19215372
		6405124
		83279422248

6) Man kann auch die Multiplikation dadurch abkürzen, oder erleichtern, daß man den Multiplikator, wenn es angeht, in ſeine Faktoren zerfällt und mit dieſen multiplicirt.

Da z. B. $24 = 4 . 6$, ſo wird auch $362 . 4 . 6 = 362 . 24$; denn

362	und	362	
24		4	der erſte Faktor
1448		1448	
724		6	der zweite Faktor
8688		8688	

Abgekürzt kann man die Auflöſung auch ſo vornehmen $362 . 24$; 24 aber iſt $= \frac{4}{6}$. Demnach iſt

```
  362 (4        Oder noch mehr abgekürzt   362
 1448                                     1448
 ----- (6                                 -----
 8688                                     8688
```

Das nämliche Produkt erhält man, wenn der Multiplikator 24 = 3 . 8; oder 24 = $\frac{3}{8}$ geſetzt wird. Denn es iſt

362 multiplicirt mit 24 oder 3 . 8 = $\frac{3}{8}$

```
    3
 ------
  1086
     8      abgekürzt    362
 ------                 ----- (3
  8688                  1086
                       ------ (8
                        8688

        Noch abgekürzter:    362
                            1086
                           ------
                            8688
```

Desgleichen multiplicirt man 699 mit 32, ſo kommt 22368 zum Produkt.

```
Man ſetzt alſo:  699    Oder    699 . 32 = 4
                  32            ----       -
                -----           2796       8
                 1398          ------
                2097            22368 Produkt.
                -----
                22368  Produkt.
```

Ferner: 6789 multiplicirt mit 21 = 142569.

48 . 6342 = 304416.

81 . 20978 = 1699218.

777 . 988 = 767676.

B. in benannten und mehrerleinamigen Zahlen. Man multiplicire 66 Thaler zu Groſchen.

Da

Da in einem Thaler 24 gr. ſind; ſo iſt dieſes eben ſo viel, als 66 multiplicirt mit 24. Man ſetzt daher

66 Thlr. 24 ――― 264 132 ――― 1584 gr.	Oder 66 Thlr. 24 = 4. 6. ――― 264 ――― 1584 gr.

Desgleichen: 226 Thlr. 18 gr. 6 pf. Wenn ſolche unter einerlei Benennung gebracht, das iſt, zu Pfennigen gemacht werden; was wird das Produkt derſelben ſeyn?

Hier multiplicirt man die Thaler mit 24 zu Groſchen und nimmt die 18 gr. dazu. Das Produkt der Groſchen mit 12 zu Pfennigen multiplicirt und die 6 pf. darzu addirt, giebt die verlangte Zahl der Pfennige: z. E.

226 Thl. 18gr. 6pf. 24 ――― 904 452 ――― 5424 +18 ――― 5442 = gr. 12 ――― 10884 5442 + 6 ――― Fac. 65310 Pfennige.	Od. 226 Thlr. 18gr. 6pf. 3+18 ――― 678 — 8 ――― 5442 = gr. 12 = 2 ――― 10884 — 6+6 ――― Fac. 65310 pf.

Wie viel Fuße oder Schuhe geben 718 Ruthen und 8 Schuhe?

10778 Schuh, wenn die Ruthe zu 15 Schuh gerechnet wird.

718 Ruthen 8 Schuh. Od. 718 R. 8 S. 15 = 3/5 + 8
15 — 2154
3590 — 10778 Schuh.
718
10770
+ 8
10778 Schuh.

Kommen ganze oder mehrerleinamige Zahlen mit einer andern gegebenen Zahl zu multipliciren vor, ſo bediene man ſich beſonders dieſes Vortheils der Zerfällung des Multiplikators, wenn er ſich nach dem Einmal Eins zerfällen läßt, weil dadurch oft viele Weitläuftigkeit im Rechnen kann vermieden werden. Z. B. ſoll man 24 Thlr. 16 gr. 6 pf. mit 36 multipliciren; ſo ſetzt man alſo:

24 Thlr. 16 gr. 6 pf. 36 = 6 . 6.
148 Thlr. 3 gr.
Das Produkt iſt 888 Thlr. 18 gr.

Dies verſteht man ſo: 36 läßt ſich in 6 . 6 zerfällen, denn 6 mal 6 iſt 36 nach dem Einmal Eins. Nun ſpricht man: 6 Sechspfenniger ſind gleich 3 gr. und da ferner 6 Sechzehngroſchenſtücke gleich 4 Thlr. ſind, ohne etliche Groſchen übrig zu laſſen; ſo ſchreibt man die aus den Pfennigen entſtandenen 3 gr. unter die Stelle der gleich überſtehenden Groſchen, und multipliciret ferner mit der 6 die folgenden 24 Thlr. ſo geben ſie 144 Thlr. welche mit den 4 Thlr. von den ſechs Sechzehngroſchenſtücken alsdann 148 Thlr. betragen. Mithin iſt das erſte Produkt:

148

148 Thlr. 3 gr. Dieſes Produkt multipliciret man mit der andern 6, wie das erſtere. So geben 6 mal 3 gr. gleich 18 gr. und 6 mal 148 Thlr. werden 888 Thlr. Und folglich iſt das ganze Produkt 888 Thlr. 18 gr.

Anmerkung.

Dieſe und andre dergleichen Beiſpiele werden ſonſt zu der Regel Detri gerechnet, wo der erſte Satz eigentlich nur 1 iſt. Als 1 Centner koſtet 24 Thlr. 16 Gr. 6 Pf. was koſten 36 Centner? 888 Thlr. 18 gr.

Nun folgen noch einige Beiſpiele zur Uebung außer der Ordnung. 478 multiplicirt mit 48. Was iſt das Produkt? 22924.

Desgleichen: 976 . 72 = 70272.
2769 . 81 = 224289.
3645 . 263 = 959635.
6924 mit 2367 =
70432 mit 63040 =
23456 mit 78901 =

Wie viel geben 263 Thlr. Pfennige?

Desgleichen: Wie viel machen 619 Mfl. 18 gr. 4 pf. an Pfennigen?

Bringet 8 Centner 24 Pfund 16 Loth unter eine Benennung; was thun ſie?

Wenn eine Klafter zweielliges Holz aufgeſpalten, 120 Cubikſchuh hält; wie viel Cubikſchuh gehören zu 99 Klaftern? 11880.

Ein Förſter bekommt in einem Jahre 24 Schfl. 3 Viertel 2 Metzen Neujahrsgetreide; was thut ſolches in 6 Jahren? 149 Scheſl. 1 Viertel.

Eine Klafter Holz gilt 1 Thlr. 12 gr. 6 pf. Was koſten 36 Klaftern? 54 Thlr. 18 gr.

Wenn eine Klafter hartes Holz 2 Thlr. 4 gr. koſtet; was werden 72 Klaftern koſten? 156 Thlr.

Wenn ein Holzſchläger täglich 6 gr. verdienet; was hat er in 6 Wochen zu fordern, die Woche zu 6 Tagen gerechnet? 9 Thlr.

Ein Sechziger hält 3600 Scheitchen. Wie viel Scheitchen müſſen zu 77 Sechzigern geſpalten werden? 277200 Scheitchen.

Auf einen Malter gehen 64 Cubikſchuh. Wie viel Cubikſchuh werden zu 2763 Maltern erfordert? 176832 Cubikſchuh.

Multiplicirt man 367 Mfl. 7 gr. 8 pf. mit 27. Was wird das Produkt ſeyn? 9918 Mfl. 18 gr.

Der Förſter zu N. hat einen Wellbaum für 6 Thlr. 12 gr. verkauft; Was werden 28 Stück um eben dieſen Preis gelten? 182 Thlr.

Wenn ein Schock Hopfenſtangen 1 Thlr. 16 gr. koſten; was wird man für 18 Schock zahlen müſſen? 30 Thlr.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion.

§. 44.

Die Subtraktion lehrt, aus zwei gegebenen Zahlen ein ſolche dritte finden, die anzeigt, um wieviel die eine von den gegebenen größer iſt, als die andere.

Man nennt die gegebenen Zahlen, das Minuendum und das Subtrahendum, da denn das Subtrahendum anzeigt, um wieviel das Minuendum vermindert werden ſoll. Die geſuchte Zahl heißt die Differenz (Reſt, Unterſchied, Ueberſchuß).

Das

Das Zeichen, wodurch die Subtraktion angezeigt wird, iſt (—), und wird durch minus oder weniger ausgeſprochen, und vor diejenige Zahl geſetzt, die ſubtrahirt werden ſoll. So iſt in dem Ausdrucke 8—6=2, die Zahl 8 das Minuendum, 6 das Subtrahendum; 2 aber die Differenz. Der Sinn des Ausdrucks iſt: 8 ſoll um 6 vermindert werden.

Iſt eine Zahl, welche ſubtrahirt werden ſoll, eine durch ihre Theile ausgedrückte Summe: ſo ſetze man ſie in eine Parentheſe ( ), und folgende Ausdrücke bedeuten alsdenn einerlei: 18 — (4 + 7); 18 — 11 d. i. die Summe von 4 + 7 oder 11 ſoll von 18 ſubtrahirt werden.

Anmerkung.

Ohne Parentheſe würde z. B. der gebrauchte Ausdruck 18 — 4 + 7 nichts anders heißen, als von 18 ſoll 4 ſubtrahirt und zur Differenz 7 addirt werden. Da nun 4 von 18, die Differenz 14 giebt, und 14 um 7 vermehrt, 21 macht; 18 — (4 + 7) oder 18 — 11 aber nur 7 giebt: ſo iſt die geſuchte Zahl der beiden Ausdrücke 8 — 4 + 7 und 18 — (4 + 7), um 14 von einander verſchieden.

Kommt eine von den gegebenen Zahlen als ein Produkt, durch die Faktoren ausgedrückt vor, ſo iſt der Ausdruck noch zuſammengeſetzter, der Gebrauch der Parentheſen dann um ſo nöthiger und die Parentheſe muß oft doppelt oder vielfach gebraucht werden, wie z. B. [(3.6.4) — (6 + 2).2], d. i. 3.6.4 = 72; (6 + 2).2 = 12.2 = 24; alſo 72 — 24 = 48.

§. 45.

1) Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

2) Subtrahirt man gleiche Größen oder Zahlen von ungleichen, ſo erhält man ungleiche Differenzen, denn die größere Zahl giebt auch die größere Differenz.

Wie viel Fuße oder Schuhe geben 718 Ruthen und 8 Schuhe?

10778 Schuh, wenn die Ruthe zu 15 Schuh gerechnet wird.

718 Ruthen 8 Schuh. Od. 718 R. 8 S. 15 = 3 / 5 + 8

```
  15              2154
 ____          ________
 3590           10778 Schuh.
 718
 _____
 10770
   + 8
 _____
 10778 Schuh.
```

Kommen ganze oder mehrerleinamige Zahlen mit einer andern gegebenen Zahl zu multipliciren vor, ſo bediene man ſich beſonders dieſes Vortheils der Zerfällung des Multiplikators, wenn er ſich nach dem Einmal Eins zerfällen läßt, weil dadurch oft viele Weitläuftigkeit im Rechnen kann vermieden werden. Z. B. ſoll man 24 Thlr. 16 gr. 6 pf. mit 36 multipliciren; ſo ſetzt man alſo:

```
  24 Thlr. 16 gr. 6 pf.    36 = 6 . 6.
 ______________________
  148 Thlr.  3 gr.
 ______________________
```

Das Produkt iſt 888 Thlr. 18 gr.

Dies verſteht man ſo: 36 läßt ſich in 6 . 6 zerfällen, denn 6 mal 6 iſt 36 nach dem Einmal Eins. Nun ſpricht man: 6 Sechspfenniger ſind gleich 3 gr. und da ferner 6 Sechzehngroſchenſtücke gleich 4 Thlr. ſind, ohne etliche Groſchen übrig zu laſſen; ſo ſchreibt man die aus den Pfennigen entſtandenen 3 gr. unter die Stelle der gleich überſtehenden Groſchen, und multipliciret ferner mit der 6 die folgenden 24 Thlr. ſo geben ſie 144 Thlr. welche mit den 4 Thlr. von den ſechs Sechzehngroſchenſtücken alsdann 148 Thlr. betragen. Mithin iſt das erſte Produkt:

148 Thlr. 3 gr. Dieſes Produkt multipliciret man mit der andern 6, wie das erſtere. So geben 6 mal 3 gr. gleich 18 gr. und 6 mal 148 Thlr. werden 888 Thlr. Und folglich iſt das ganze Produkt 888 Thlr. 18 gr.

Anmerkung.

Dieſe und andre dergleichen Beiſpiele werden ſonſt zu der Regel Detri gerechnet, wo der erſte Satz eigentlich nur 1 iſt. Als 1 Centner koſtet 24 Thlr. 16 Gr. 6 Pf. was koſten 36 Centner? 888 Thlr. 18 gr.

Nun folgen noch einige Beiſpiele zur Uebung außer der Ordnung. 478 multiplicirt mit 48. Was iſt das Produkt? 22924.

Desgleichen: 976 . 72 = 70272.
2769 . 81 = 224289.
3645 . 263 = 959635.
6924 mit 2367 =
70432 mit 63040 =
23456 mit 78901 =

Wie viel geben 263 Thlr. Pfennige?

Desgleichen: Wie viel machen 619 Mfl. 18 gr. 4 pf. an Pfennigen?

Bringet 8 Centner 24 Pfund 16 Loth unter eine Benennung; was thun ſie?

Wenn eine Klafter zweielliges Holz aufgeſpalten, 120 Cubikſchuh hält; wie viel Cubikſchuh gehören zu 99 Klaftern? 11880.

Ein Förſter bekommt in einem Jahre 24 Schfl. 3 Viertel 2 Metzen Neujahrsgetreide; was thut ſolches in 6 Jahren? 149 Scheſl. 1 Viertel.

Eine Klafter Holz gilt 1 Thlr. 12 gr. 6 pf. Was koſten 36 Klaftern? 54 Thlr. 18 gr.

Wenn eine Klafter hartes Holz 2 Thlr. 4 gr. koſtet; was werden 72 Klaftern koſten? 156 Thlr.

Wenn ein Holzſchläger täglich 6 gr. verdienet; was hat er in 6 Wochen zu fordern, die Woche zu 6 Tagen gerechnet? 9 Thlr.

Ein Sechziger hält 3600 Scheitchen. Wie viel Scheitchen müſſen zu 77 Sechzigern geſpalten werden? 277200 Scheitchen.

Auf einen Malter gehen 64 Cubikſchuh. Wie viel Cubikſchuh werden zu 2763 Maltern erfordert? 176832 Cubikſchuh.

Multiplicirt man 367 Mfl. 7 gr. 8 pf. mit 27. Was wird das Produkt ſeyn? 9918 Mfl. 18 gr.

Der Förſter zu N. hat einen Wellbaum für 6 Thlr. 12 gr. verkauft; Was werden 28 Stück um eben dieſen Preis gelten? 182 Thlr.

Wenn ein Schock Hopfenſtangen 1 Thlr. 16 gr. koſten; was wird man für 18 Schock zahlen müſſen? 30 Thlr.

Dritter Abſchnitt.

Die Subtraktion.

§. 44.

Die Subtraktion lehrt, aus zwei gegebenen Zahlen ein ſolche dritte finden, die anzeigt, um wieviel die eine von den gegebenen größer iſt, als die andere.

Man nennt die gegebene'n Zahlen, das Minuendum und das Subtrahendum, da denn das Subtrahendum anzeigt, um wieviel das Minuendum vermindert werden ſoll. Die geſuchte Zahl heißt die Differenz (Reſt, Unterſchied, Ueberſchuß).

Das

Das Zeichen, wodurch die Subtraktion angezeigt wird, iſt (—), und wird durch minus oder weniger ausgeſprochen, und vor diejenige Zahl geſetzt, die ſubtrahirt werden ſoll. So iſt in dem Ausdrucke $8-6=2$, die Zahl 8 das Minuendum, 6 das Subtrahendum; 2 aber die Differenz. Der Sinn des Ausdrucks iſt: 8 ſoll um 6 vermindert werden.

Iſt eine Zahl, welche ſubtrahirt werden ſoll, eine durch ihre Theile ausgedrückte Summe: ſo ſetze man ſie in eine Parentheſe ( ), und folgende Ausdrücke bedeuten alsdenn einerlei: $18-(4+7)$; $18-11$ d. i. die Summe von $4+7$ oder 11 ſoll von 18 ſubtrahirt werden.

Anmerkung.

Ohne Parentheſe würde z. B. der gebrauchte Ausdruck $18-4+7$ nichts anders heißen, als von 18 ſoll 4 ſubtrahirt und zur Differenz 7 addirt werden. Da nun 4 von 18, die Differenz 14 giebt, und 14 um 7 vermehrt, 21 macht; $18-(4+7)$ oder $18-11$ aber nur 7 giebt: ſo iſt die geſuchte Zahl der beiden Ausdrücke $8-4+7$ nnd $18-(4+7)$, um 14 von einander verſchieden.

Kommt eine von den gegebenen Zahlen als ein Produkt, durch die Faktoren ausgedrückt vor, ſo iſt der Ausdruck noch zuſammengeſetzter, der Gebrauch der Parentheſen dann um ſo nöthiger und die Parentheſe muß oft doppelt oder vielfach gebraucht werden, wie z. B. $[(3.6.4)-(6+2).2]$, d. i. $3.6.4=72$; $(6+2).2=12.2=24$; alſo $72-24=48$.

§. 45.

1) Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

2) Subtrahirt man gleiche Größen oder Zahlen von ungleichen, ſo erhält man ungleiche Differenzen, denn die größere Zahl giebt auch die größere Differenz.

3) Wenn man aber von gleichen Größen oder Zahlen ungleiche ſubtrahirt, ſo giebt die größere Größe oder Zahl die kleinere, und die kleinere Größe oder Zahl die größere Differenz.

Zu N. 1. $\begin{array}{r} 8 = 8 \\ 6 = 6 \\ \hline 8 - 6 = 8 - 6 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{r} a = a \\ c = c \\ \hline a - c = a - c \end{array}$

Zu N. 2. $\begin{array}{r} 10 > 6 \\ 4 = 4 \\ \hline 10 - 4 > 6 - 4 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{r} a > b \\ c = c \\ \hline a - c > b - c \end{array}$

Zu N. 3. $\begin{array}{r} 12 = 12 \\ 8 > 4 \\ \hline 12 - 8 < 12 - 4 \end{array}$ allgemein: $\begin{array}{r} a = a \\ c > d \\ \hline a - c < a - d \end{array}$

§. 46.

Die Differenz zweier Zahlen, wenn keine von beiden größer als 9 oder 9 + 9, d. i. 18 iſt, kann man ſehr leicht in Gedanken, oder durch Hülfe des Zurückzählens finden.

Anmerkung.

Dieſer zweite Forderungsſatz enthält den Grund aller ausübenden Subtraktion. Für ihn gilt das, was §. 32. in der Anmerkung beigebracht worden iſt, dann, wenn man nur die Einſchränkung dabei macht, welche das der Addition entgegengeſetzte Verfahren erfordert. Je weiter man dieſe Forderung in Gedanken ausdehnt, und jemehr man ſie übt, deſtomehr gewinnt man für die Ausübung.

§. 47.

Aufgabe.

Jede kleinere Zahl von einer größern zu ſubtrahiren.

Auflö-

Auflöſung:

A. in ungenannten Zahlen.

1) Man ſchreibe das Subtrahendum unter das Minuendum ſo, wie es die Stellen und Ordnungen des Zahlenſyſtems verlangen, oder kürzer: man verfahre dabei, wie bei der Addition (§. 33.).

2) Subtrahire jedes Zahlzeichen von dem über ihm ſtehenden und ſchreibe die Differenz unter den Strich. Im Falle, daß beide Zahlzeichen gleich ſind, iſt die Differenz 0.

```
Z. B.   87459635
        36243231
        --------
        51216404
```

3) Iſt das Zahlzeichen des Minuendums kleiner als das Zahlzeichen des Subtrahendums, oder gar 0: ſo nimmt man von dem folgenden Zahlzeichen des Minuendums zur Linken Eins, oder eine Einheit weg, und ſetzt dieſe zu der zu kleinen Zahl. Die fehlende Einheit aber zeigt man durch einen Punkt an, der über oder neben die Zahl geſetzt wird, von welcher dieſe Einheit weggenommen worden iſt. Dies Verfahren nennt man das Borgen. Die geborgte Einheit gilt nun eine Stelle weiter zur Rechten geſetzt 10 oder zehn Einheiten der um eine Stelle niedrigern Kaſſe.

```
        8 10  1 10                    .   .
Z. B.   5 9. 0 6 2. 5 7   abgekürzt:  5906257
        2 4 9 2 1 6 5                 2492165
        -------------                 -------
        3 4 1 4 0 9 2                 3414092
```

D. i. 5 von 7 bleibt 2; 6 von 5 borgt man Eins, und ſpricht nun 6 von 15 bleibt 9; 1 von 1 geht auf, oder bleibt 0; 2 von 6 bleibt 4; 9 von 0 borgt man Eins: 9 von 10 bleibt 1; 4 von 8 bleibt 4; 2 von 5 bleibt 3.

4) Iſt das Zahlzeichen, bei welchem man Eins borgen will, eine 0, ſo geht man dieſe 0 vorbei und borgt bei dem nächſtfolgenden Zahlzeichen. Die geborgte Einheit heißt in der Stelle der 0 zehn; von dieſer 10 nimmt man abermals Eins weg zu dem Zahlzeichen, für welches man geborgt hat, und dieſe Eins gilt alſo noch eine Stelle weiter gegen die Rechte abermals 10; folglich bleibt nur 9 für die 0.

```
          9       9
      4 1̸ 0̸ 10  6 1̸ 0̸ 10               . .  . . .
Z.B.  8̸. 0 3 5 6 7̸. 0 2   abgekürzt:  50356702
      3 2 5 4 3 6 1 5                 32543615
      ---------------                 --------
      1 7 8 1 3 0 8 7                 17813087
```

5) Folgen mehr Nullen auf einander, bei welchen man borgen ſoll, ſo verfährt man wie vorhin, oder nach der Regel: Wenn man über mehrere Nullen wegborgt, ſo verwandelt man dadurch jede 0 in 9, weil die geborgte Einheit jeder 0 eine ſolche Eins abgiebt, die nun in der nächſtfolgenden Stelle zur Rechten 10 gilt weil die Einer jeder vorhergehenden Stelle zur Linken 10mal größer ſind, als die in der nächſtfolgenden Stelle zur Rechten.

```
          9  9  9  9  9
      8 1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 1̸0̸ 10                . . . . . .
Z.B.  6 9̸. 0  0  0  0  0  4  5   abgekürzt: 690000045
      1 2  4  5  7  8  9  5  3              124578953
      ------------------------              ---------
      5 6  5  4  2  1  0  9  2              565421092
```

Nach den vorgeſchriebenen und befolgten Regeln der Auflöſung hat man die Einer, Zehner, Hunderte, Tauſende ꝛc. des Subtrahendums, von den Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. des Minuendums ſubtrahirt. Die durch dies Verfahren erhaltene Zahl zeigt demnach an, um wieviel die größere von den gegebnen Zahlen größer iſt,

iſt, als die kleinere, und iſt alſo die geſuchte Differenz (§. 45.).

B. in benannten und mehrerleinamigen Zahlen.

1) Auch hier ſetzt man Gleiches unter Gleiches, d. i. man ſchreibt Thaler unter Thaler, Groſchen unter Groſchen — Centner unter Centner — Ruthen unter Ruthen ꝛc.

2) Subtrahirt man wirklich das Kleinere vom Größern und es kommt hier der Fall vor, daß das Subtrahendum von irgend einem Namen größer iſt, als das Minuendum, ſo muß man auch borgen und zwar bei der nächſtfolgenden größern Sorte, ſie mag nun Maaß, Gewichte oder ſonſt irgend eine Eigenſchaft einer Größe bezeichnen. Die geborgte Einheit gilt nun in der Stelle, für welche man borgt, ſo viel, als die größere Sorte Einheiten der kleinern in ſich begreift. So iſt 1 Rthlr. = 24 gr.; 1 gr. = 12 Pf. ꝛc. Beim Subtrahiren der einzelnen Zahlzeichen verfährt man übrigens eben ſo, wie bei den ungenannten Zahlen gezeigt worden iſt.

Man ſubtrahire: 27 Thlr. 10 gr. und 9 pf. von 98 Thlr. 12 gr. 4 pf. Was bleibt Reſt? 71 Thlr. 1 gr. 7 pf.

Nämlich:	98 Thlr.	12 gr.	4 pf.	—
	27 —	10 —	9 —	—
	71 Thlr.	1 gr.	7 pf.	Reſt.

Hier ſagt man: 9 pf. von 4 pf. können nicht abgezogen werden; daher nimmt man von den folgenden Groſchen Einen hinweg. Dieſer gilt 12 pf. und da 12 pf. und 4 pf. gleich 16 Pfennige ſind; ſo heißt es nunmehr 9 pf. von 16 pf. bleiben 7 pf. Dieſe 7 kommt unter den Strich an die Stelle der Pfennige zu ſtehen, als Reſt.

Ferner ſagt man: 10 Groſchen von 11 Groſchen bleibt 1 Groſchen Reſt. Denn 0 von 1 bleibt 1, und 1 von 1 geht

geht auf. Dieſen Reſt von 1 Groſchen ſchreibt man unter die Linie an die Stelle, wo die Groſchen ſtehen.

Und endlich geht man auch zu den Thalern und ſagt: 7 von 8 bleibt 1, und 2 von 9 bleibt 7, welches zuſammengeſetzt 71 Thlr. Reſt beträgt, der unter die obern Thaler unter die Linie zu ſchreiben iſt.

Addirt man nun 71 Thlr. 1 gr. 7 pf. zu 27 Thlr. 10 gr. 9 pf. ſo geben dieſe zwei Poſten in einer Summe wieder 98 Thlr. 12 gr. 4 pf. d. i. das völlige Subtrahendum. Und man hat richtig ſubtrahiret.

Einige Beiſpiele zur Uebung:

63972 von 97845 ſubtrahirt; was bleibt Reſt? 33873.

Desgleichen: 16397 von 43678, was iſt übrig? 27281.

Wenn von 123456 die Zahl 98765 abgezogen wird, was muß übrig bleiben? 24689.

Ziehet 206907 von 980764 ab; ſo bleibt Reſt: 773857.

Ferner: Wenn von 478 Thlr. 23 gr. 8 pf. — 227 Thlr. 14 gr. und 4 pf. weggegeben werden; was wird übrig ſeyn? 251 Thlr. 9 gr. 4 pf.

Ein Forſtſchreiber hat in Kaſſe 978 Thlr. 20 gr. 8 pf. und davon hat er an Ausgabe 297 Thlr. 12 gr. 6 pf. mit Belegen berechnet. Was hat er noch baar? 681 Thlr. 8 gr. 2 pf.

Ein Förſter hat nach und nach 98 Thlr. 17 gr. 6 pf. an Forſtgeldern eingenommen. Er berechnet aber, daß er davon in ſeinem Forſtweſen wiederum ausgegeben:

a) 18 Thlr. 9 gr. 7 pf. für eingeſammlete fichtene Zapfen zu Saamen.

b) 39 Thlr. 14 gr. 8 pf. um einen Hegefleck mit Stangen zu vermachen, Arbeiterlohn und endlich:

c) 27 Thlr. 18 gr. 4 pf. für 100 Schock junge Buchen, welche auf das herrſchaftliche Revier verſetzet worden. Was wird er noch baar einzurechnen haben? 12 Thlr. 22 gr. 11 pf.

Ein Holzſchläger hat an Schlagelohn 18 Thlr. 18 gr. zu fordern. Darauf hat er von dem Förſter zu N. 9 Thlr. 20 gr. 6 pf. und von deſſen Nachbar, dem Förſter zu O. 6 Thlr. 18 gr. erhalten. Was muß er noch auf ſeine Anforderung von dem Förſter zu P. erhalten? 2 Thlr. 3 gr. 6 pf.

Ein Forſtbedienter hat auf ſeinem Revier 2763 Stangen, 4796 Schaalhölzer, 3818 Bretbäume und 977 Wellbäume gezählet. Da nun in vorigem Monat 972 Stangen, 1200 Schaalhölzer, 299 Bretbäume und 189 Wellbäume ſind abgepaſſet worden. Wie viel von jeder Sorte hat er noch auf ſeinem Revier ſtehen? 1791 Stangen, 3596 Schaalhölzer, 3519 Bretbäume und 788 Wellbäume.

Anmerkung.

Auch bei der Subtraktion in genannten und mehrerleinamigen Zahlen hat man die Kenntniß der Reduktionszahlen nöthig.

§. 48.

Wenn man zu einer Größe oder Zahl eine andere addirt, und eben dieſelbe Zahl von der Summe wiederum ſubtrahirt; oder wenn man von einer Größe oder Zahl eine andere ſubtrahirt, und eben dieſelbe Zahl wiederum zu der Differenz addirt: ſo bleibt in beiden Fällen die erſte Größe oder Zahl ungeändert.

Beiſpiele.

Beiſpiele.

Man drücke die Rechnungsarten durch Zeichen aus und bezeichne die Größen theils allgemein mit Buchſtaben, theils aber auch durch Zahlzeichen.

Erſter Fall: $6+4-4=6$ Allgemein: $a+b-b=a$
Zweiter Fall: $6-4+4=6$ $a-b+b=a$

Anmerkung.

Auf dieſen Satz gründet ſich die Probe für die Addition und Subtraktion.

1. Probe der Addition.

A. in ungenannten Zahlen.

Man ſubtrahirt von der, aus den gegebenen Zahlen erhaltenen Summe, die gegebenen Zahlen nach einander; ſo muß, wenn man richtig gerechnet hat, die letzte Differenz der, von der Subtraktion ausgenommenen Zahl, gleich ſeyn. Z. B.

6457	= c
3246	= b
1503	= a
11206	Summe = a + b + c
1503	= a wird ſubtrahirt
9703	Summe = b + c
3246	= b wird ſubtrahirt
6457	Gegebene Zahl = c

B. in

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	= c
77 —	14 —	9 —	= b
96 —	4 —	8 —	= a
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a + b + c
96 —	4 —	8 —	= a wird ſubtrahirt
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	Summe = b + c
77 —	14 —	9 —	= b wird ſubtrahirt.
23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	Gegebene Zahl = c.

2. Probe der Subtraktion.

A. in ungenannten Zahlen.

Man addirt die Differenz zur kleinern Zahl, d. i. zum Subtrahendum, und die Summe giebt das Minuendum oder die größere Zahl. Z. B.

. . . . . .
690000045 = a

124578953 } ſummirende Zahlen
565421092 }

690000045 Summe = a

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	= a
96 —	4 —	8 —	} ſummirende Zahlen.
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	}
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a

Mehrere Proben der Addition und Subtraktion hier aufzuführen, liegt nicht im Zwecke gegenwärtiger Anfangsgründe, ob es gleich mehrere Arten giebt. Ueberhaupt

haupt iſt es beſſer, ſich gleich anfangs zu gewöhnen, mit Aufmerkſamkeit ſicher zu rechnen, als ſich auf irgend eine Art von Probe zu verlaſſen.

Wenn man viele Poſten an Münzſorten ꝛc. zuſammen zu zählen hat, ſo kann man höchſtens, nachdem die Summe beſtimmt worden iſt, dieſe Poſten noch einmal in verkehrter Ordnung zuſammen zählen, weil alsdenn der gemachte Fehler leicht entdeckt wird, indem die einzelnen Zahlzeichen nicht mehr in der vorigen Ordnung auf einander folgen.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion.

§. 49.

Die Diviſion iſt nach §. 17. eine abgekürzte Subtraktion für den Fall, wenn eine Zahl um eine andere ſo vielmal vermindert werden ſoll, als die andere Einheiten enthält; daher lehrt die Diviſion eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft oder wie viel mal eine von zwei gegebenen Zahlen in der andern enthalten ſey.

Die Zahl, welche dividiret werden ſoll, nennt man das Dividendum, und die, womit man dividirt, den Diviſor; diejenige aber, welche man durch die Diviſion erhält, und die durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten iſt, wird der Quotient genannt.

Das Zeichen, wodurch die Diviſion angezeigt wird, iſt (:), und wird zwiſchen das Dividendum und den Diviſor ſo geſetzt, daß das Dividendum vor- der Diviſor aber nachgehet. Auch bedient man ſich eines Striches, wo alsdenn das Dividendum über- der Diviſor aber unter den-

ſelben geſetzt wird. Beide Ausdrücke ſind demnach einerlei, z. B. 12 : 4 oder $\frac{12}{4}$, d. i. das Dividendum 12 ſoll durch den Diviſor 4 dividirt werden.

Iſt eine von den gegebenen Zahlen ſchon für ſich eine Summe durch + verbunden, oder eine Differenz, durch — bezeichnet, oder findet eine ſolche Zuſammenſetzung in beiden ſtatt; ſo ſetzt man ſie in eine Parentheſe (), und folgende Ausdrücke ſind alsdenn einerlei: z. B. (14 + 4 + 6) : 8; 24 : 8, und (12 + 4) : (1 + 3); 16 : 4; und (16 — 3 + 8) : (2 + 5); 21 : 7.

§. 50.

Wird die Diviſion mit der Multiplikation (§. 37.) verglichen, ſo findet man, daß das Dividendum als das Produkt, der Diviſor als das Multiplikandum, und der Quotient als der Multiplikator angeſehen werden kann. Multiplicirt man demnach den Quotient mit dem Diviſor, ſo erhält man im Produkte das Dividendum.

Auch ergiebt ſich aus der Eigenſchaft des Produkts, daß der Quotient ſo oft im Dividend enthalten ſeyn muß, als 1 im Diviſor. Stellt man ſich nun vor, daß das Dividendum aus lauter ſolchen gleichen Theilen beſtehe, als der Quotient iſt, und daß der Diviſor die Menge dieſer Theile durch ſeine Einheiten anzeige, ſo heißt dividiren auch: Eine Zahl (das Dividendum) in ſo viele gleiche Theile theilen, als die andere (der Diviſor) Einheiten enthält, und einen dieſer Theile (den Quotienten) beſtimmt angeben. So den Begriff der Diviſion ausgedrückt, paßt derſelbe auch auf die Diviſion in genannten Zahlen, z. B. $\frac{15}{3}$ Thlr. = 5; oder 15 Thlr. : 3 Thlr. = 5 Thlr.

Beiſpiele.

Man drücke die Rechnungsarten durch Zeichen aus und bezeichne die Größen theils allgemein mit Buchſtaben, theils aber auch durch Zahlzeichen.

Erſter Fall: $6+4-4=6$ Allgemein: $a+b-b=a$
Zweiter Fall: $6-4+4=6$ $a-b+b=a$

Anmerkung.

Auf dieſen Satz gründet ſich die Probe für die Addition und Subtraktion.

1. Probe der Addition.

A. in ungenannten Zahlen.

Man ſubtrahirt von der, aus den gegebenen Zahlen erhaltenen Summe, die gegebenen Zahlen nach einander; ſo muß, wenn man richtig gerechnet hat, die letzte Differenz der, von der Subtraktion ausgenommenen Zahl, gleich seyn. Z. B.

6457	$= c$
3246	$= b$
1503	$= a$
11206	Summe $= a + b + c$
1503	$= a$ wird ſubtrahirt
9703	Summe $= b + c$
3246	$= b$ wird ſubtrahirt
6457	Gegebene Zahl $= c$

B. in

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	= c
77 —	14 —	9 —	= b
96 —	4 —	8 —	= a
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a + b + c
96 —	4 —	8 —	= a wird ſubtrahirt
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	Summe = b + c
77 —	14 —	9 —	= b wird ſubtrahirt.
23 Rthlr.	7 Gr.	6 Pf.	Gegebene Zahl = c.

2. Probe der Subtraktion.

A. in ungenannten Zahlen.

Man addirt die Differenz zur kleinern Zahl, d. i. zum Subtrahendum, und die Summe giebt das Minuendum oder die größere Zahl. Z. B.

......	
690000045	= a
124578953	} ſummirende Zahlen
565421092	}
690000045	Summe = a

B. in genannten mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiel:

197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	= a
96 —	4 —	8 —	} ſummirende Zahlen.
100 Rthlr.	22 Gr.	3 Pf.	}
197 Rthlr.	2 Gr.	11 Pf.	Summe = a

Mehrere Proben der Addition und Subtraktion hier aufzuführen, liegt nicht im Zwecke gegenwärtiger Anfangsgründe, ob es gleich mehrere Arten giebt. Ueberhaupt

haupt iſt es beſſer, ſich gleich anfangs zu gewöhnen, mit Aufmerkſamkeit ſicher zu rechnen, als ſich auf irgend eine Art von Probe zu verlaſſen.

Wenn man viele Poſten an Münzſorten ꝛc. zuſammen zu zählen hat, ſo kann man höchſtens, nachdem die Summe beſtimmt worden iſt, dieſe Poſten noch einmal in verkehrter Ordnung zuſammen zählen, weil alsdenn der gemachte Fehler leicht entdeckt wird, indem die einzelnen Zahlzeichen nicht mehr in der vorigen Ordnung auf einander folgen.

Vierter Abſchnitt.

Die Diviſion.

§. 49.

Die Diviſion iſt nach §. 17. eine abgekürzte Subtraktion für den Fall, wenn eine Zahl um eine andere ſo vielmal vermindert werden ſoll, als die andere Einheiten enthält; daher lehrt die Diviſion eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft oder wie viel mal eine von zwei gegebenen Zahlen in der andern enthalten ſey.

Die Zahl, welche dividiret werden ſoll, nennt man das Dividendum, und die, womit man dividirt, den Diviſor; diejenige aber, welche man durch die Diviſion erhält, und die durch die Menge ihrer Einheiten anzeigt, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten iſt, wird der Quotient genannt.

Das Zeichen, wodurch die Diviſion angezeigt wird, iſt (:), und wird zwiſchen das Dividendum und den Diviſor ſo geſetzt, daß das Dividendum vor- der Diviſor aber nachgehet. Auch bedient man ſich eines Striches, wo alsdenn das Dividendum über- der Diviſor aber unter denſel-

ſelben geſetzt wird. Beide Ausdrücke ſind demnach einerlei, z. B. 12 : 4 oder $\frac{12}{4}$, d. i. das Dividendum 12 ſoll durch den Diviſor 4 dividirt werden.

Iſt eine von den gegebenen Zahlen ſchon für ſich eine Summe durch + verbunden, oder eine Differenz, durch — bezeichnet, oder findet eine ſolche Zuſammenſetzung in beiden ſtatt; ſo ſetzt man ſie in eine Parentheſe (), und folgende Ausdrücke ſind alsdenn einerlei: z. B. (14 + 4 + 6) : 8; 24 : 8, und (12 + 4) : (1 + 3); 16 : 4; und (16 — 3 + 8) : (2 + 5); 21 : 7.

§. 50.

Wird die Diviſion mit der Multiplikation (§. 37.) verglichen, ſo findet man, daß das Dividendum als das Produkt, der Diviſor als das Multiplikandum, und der Quotient als der Multiplikator angeſehen werden kann. Multiplicirt man demnach den Quotient mit dem Diviſor, ſo erhält man im Produkte das Dividendum.

Auch ergiebt ſich aus der Eigenſchaft des Produkts, daß der Quotient ſo oft im Dividend enthalten ſeyn muß, als 1 im Diviſor. Stellt man ſich nun vor, daß das Dividendum aus lauter ſolchen gleichen Theilen beſtehe, als der Quotient iſt, und daß der Diviſor die Menge dieſer Theile durch ſeine Einheiten anzeige, ſo heißt dividiren auch: Eine Zahl (das Dividendum) in ſo viele gleiche Theile theilen, als die andere (der Diviſor) Einheiten enthält, und einen dieſer Theile (den Quotienten) beſtimmt angeben. So den Begriff der Diviſion ausgedrückt, paßt derſelbe auch auf die Diviſion in genannten Zahlen, z. B. $\frac{15}{3}$ Thlr. = 5; oder 15 Thlr. : 3 Thlr. = 5 Thlr.

§. 51.

1) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten.

2) Sind bei gleichen Diviſoren die Dividenda ungleich, ſo giebt das grǒßere Dividendum einen grǒßern Quotienten als das kleinere.

3) Sind aber die Dividenda gleich, und die Diviſoren ungleich, ſo giebt der grǒßere Diviſor den kleinern Quotienten.

Zu No. 1.
$$\begin{array}{c} 12 = 12 \\ 4 = 4 \\ \hline 12:4 = 12:4 \end{array}$$
allgemein:
$$\begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ \hline a:b = a:b \end{array}$$

Zu No. 2.
$$\begin{array}{c} 12 > 8 \\ 4 = 4 \\ \hline 12:4 > 8:4 \end{array}$$
allgemein:
$$\begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a:c > b:c \end{array}$$

Zu No. 3.
$$\begin{array}{c} 16 = 16 \\ 4 > 2 \\ \hline 16:4 < 16:2 \end{array}$$
allgemein:
$$\begin{array}{c} a = a \\ b > c \\ \hline a:b < a:c \end{array}$$

§. 52.

Wenn man irgend ein Dividendum nimmt und dividirt es nach einander ſo, daß das erſte Mal ein gewiſſer Diviſor, das zweite Mal dieſer doppelte Diviſor, und das dritte Mal der dreifache Diviſor genommen wird: ſo erhǎlt man durch die zweite Diviſion einen halb ſo großen Quotienten als das erſte Mal; durch die dritte Diviſion aber einen dreimal ſo kleinen Diviſor; und ſo auch umgekehrt.

Iſt das Dividendum = 12 und der Diviſor = 2; ſo iſt der Quotient 12 : 2 halb ſo groß als der 12 :(2 . 2); 12 :(2 . 3) aber nur der dritte Theil von dem, 12 : 2. u. ſ. w. Hieraus ſieht man zugleich, daß der Satz auch umgekehrt wahr ſey.

§. 53.

Ein Dividendum, welches aus mehrern Theilen beſteht, wird mit einer andern Zahl dividirt, wenn man alle Theile des Dividendums nach einander mit dem gegebenen Diviſor dividirt, und zuletzt alle einzelne Quotienten in eine Summe bringt.

Beiſpiel.

Das Dividendum 639 ſey durch die Theile 600 + 30 + 9 ausgedrückt. Iſt nun 3 der Diviſor, ſo iſt $(600 : 3) + (30 : 3) + (9 : 3) = (600 + 30 + 9) : 3 = 639 : 3$.

§. 54.

Den Quotient zweier Zahlen findet man entweder durch Hülfe des Einmaleins oder durch die Subtraktion.

Beiſpiel durch die Subtraktion.

Wenn das Dividendum 24, der Diviſor aber 6 iſt; ſo iſt

$$\begin{array}{r} 24 \\ -6 \\ \hline 18 \\ -6 \\ \hline 12 \\ -6 \\ \hline 6 \\ -6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Da nun 6 **viermal** nach einander ſubtrahirt worden, ſo iſt 4 der geſuchte Quotient.

§. 55.

Aufgabe.

Man ſoll den Quotient durch die Diviſion finden, wenn das Dividendum aus zwei, der Diviſor aber nur aus einem Zahlzeichen beſtehet.

Auflöſung.

Erſter Fall. Wenn der Diviſor größer iſt als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, ſo kann der Quotient nicht größer als 9 ſeyn. Soll man z. B. 68 durch 9 dividiren, ſo iſt der Quotient 7, weil 9 . 7 = 63, und 9 . 8 = 72 macht. Da nun 72 ſchon größer als 68 iſt, ſo kann der Quotient nicht 8 ſeyn; demnach iſt 7 der zu 68 : 9 gehörige Quotient. Hieraus ſieht man zugleich, warum der Quotient noch weniger 9 oder wohl gar 10 ſeyn kann.

Nimmt man die in §. 35 befindliche Pythagoriſche Tafel zu Hülfe, ſo läßt ſich in allen dieſen Fällen der Quotient leicht finden. Denn da der Diviſor 9 iſt, ſo ſucht man ihn linker Hand auf, geht in dieſer Reihe querdurch ſo weit, bis man auf 68 oder die nächſt kleinere Zahl trifft, wie hier 63; da nun in der Reihe über 63 oben die Zahl 7 ſteht, ſo iſt 7 der Quotient.

Die Form der wirklichen Diviſion iſt verſchieden, daher kann man folgende wählen:

Diviſor 9) 68 | 7 Quotient.

Findet man ein Produkt, welches ſo groß iſt, als das gegebene Dividendum, ſo ſagt man: der Diviſor geht im Dividend auf, wie in folgendem Beiſpiel: 63 : 9.

9) 63 | 7

Iſt das Produkt des Diviſors mit dem Quotienten aber kleiner, als das Dividendum, doch nicht ſo viel kleiner, als der Diviſor beträgt, weil ſonſt der Quotient um Eins zu klein ſeyn würde; ſo ſetzt man das kleinere Produkt

dukt unter das Dividendum, ſubtrahirt und ſetzt den Reſt unter den Strich. Der Reſt zeigt allemal an, daß das Dividendum den Diviſor nicht nur etlichemal ganz, ſondern auch noch einen Theil deſſelben darüber enthalte. Z. B.

```
9) 68 | 7
   63 |
  ------
    5 Reſt.
```

Zweiter Fall. Wenn der Diviſor kleiner oder eben ſo groß, als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, und das niedrigſte des letztern o iſt; ſo ſuche man den Quotienten wie vorhin, aber nur für das höchſte Zahlzeichen des Dividendums, und gebe dem Quotienten, eben ſo wie dem Produkte des Quotienten mit dem Diviſor, zur Rechten, eine o und ſubtrahire. Bleibt auch hier ein Reſt, ſo dividirt man dieſen abermals mit dem Diviſor, ſetzt den Quotienten unter die angehängte o und addirt beide gefundenen Theile deſſelben. Mit dem Produkte dieſes Theils des Quotienten und des Diviſors verfährt man wie vorhin. Z. B.

```
4) 80 | 20          3) 70 | 20
   80 |                60 |  3
  ------              ----- -----
    o               3) 10   23
                        9
                      -----
                        1 Reſt.
```

Dritter Fall. Wäre auch bei den Bedingungen des zweiten Falls, das niedrigſte Zahlzeichen nicht Null, ſo müßte man doch auf eine ähnliche Art verfahren; nämlich

```
6) 84 | 10          4) 47 | 10
   60 |  4             40 |  1
  ----- -----         ----- -----
6) 24   14 Q.       4)  7   11 Q.
   24                   4
  -----               -----
    o                   3 R.
```

Nach der vorgeſchriebenen Auflöſung ſind die Einer im erſten Falle, und die Einer und Zehner im zweiten und dritten Falle der gefundenen Zahl oder der Diviſoren in der gehörigen Ordnung multiplicirt und die erhaltenen Produkte von den Dividenden ſubtrahirt. Dieſe einzelnen Produkte ſind zuſammen genommen den Dividenden (die Fälle ausgenommen, wo ein Reſt übrig geblieben) gleich. Da nun durch die Theile der Dividenden die Dividenda ſelbſt dividirt, und die Theile der gefundenen Zahlen oder der Quotienten ebenfalls nach einander mit den Diviſoren multiplicirt und den Dividenden (bis auf den Reſt) gleich ſind; ſo ſind die gefundenen Zahlen die verlangten Quotienten (§. 49.).

§. 56.

Das Verfahren in den beiden letzten Fällen (§. 55.) kann man auch ſo abkürzen: wenn auch das Dividendum mehr als zwei Zahlzeichen hat, ſo ſucht man für jedes (oder wenn das höchſte kleiner iſt als der Quotient, für beide) Zahlzeichen des Dividendums, die Theile des Quotienten einzeln, und ſetzt ſie in eine Zeile neben einander; den Diviſor ſchreibt man in jedem Falle vor das Dividendum. Das folgende Beiſpiel wird dies Verfahren erläutern.

Man dividire 96732 durch 4.

```
4) 96732 | 24183
   8....
   -----
   16...
   16...
   -----
    07..
     4..
   -----
     33.
     32
   -----
      12
      12
   -----
       0
```

d. i.

d. i. 4 in 9 iſt zweimal enthalten, denn $2 . 4$ iſt 8, und 8 von 9 giebt 1 Reſt. Zu dieſem Reſte 1 ſchreibt man das folgende Zahlzeichen des Dividendums, nämlich 6 und ſagt: 4 in 16 iſt viermal enthalten; da nun $4 . 4 = 16$, und 16 mit 16 aufgeht, ſo iſt hier kein Reſt, oder 0. Nun ſchreibt man das folgende Zahlzeichen des Dividendums, nämlich 7 hin, und dividirt abermals, nämlich 4 in 7 iſt 1 mal enthalten u. ſ. w.

Den Beweis für dieſen und alle ähnliche Fälle kann man auch ſo führen: Wenn man weiß, daß 4 in 96732 ſo viel mal als Eins in 24183 enthalten iſt; ſo folgt, es iſt $4 . 24183 = 96732$. Demnach iſt 24183 der 24183ſte Theil von 96732, oder 24183 iſt der verlangte Quotient.

§. 57.

Die Diviſion läßt ſich auch auf folgende, noch etwas kürzere Art verrichten: Man nimmt z. B. das Dividendum 96732, den Diviſor 4, und ſchreibt den letztern vor das Dividendum und dividirt wie vorhin. Die Produkte des Quotienten mit dem Diviſor aber ſchreibt man nicht unter den zugehörigen Theil des Dividendums, ſondern behält ſie in Gedanken, ſubtrahirt, und ſchreibt die Differenz allein unter, indem man die Zahlzeichen des Dividendums durchſtreicht, von welchen man die erwähnten Produkte ſubtrahirt hat. Die Reſte können ſowohl über als auch unter das Dividendum geſchrieben werden, ſo wie man es am bequemſten findet. Durch Auseinanderſetzung des Beiſpiels wird dies Verfahren noch deutlicher werden:

4) ~~96732~~ | 24183 Quotient.
~~1~~ ~~31~~

Hier iſt 4 in 9, 2 mal; da nun $4 . 2 = 8$, ſo ſtreicht man 9 durch und ſetzt den Reſt 1 unter 9, denn 8 von 9 bleibt 1. Ferner ſagt man: 4 in 16, 4 mal; da aber hier $4 . 4 = 16$,

ſo bleibt kein Reſt, ſondern 16 wird durchgeſtrichen. Auf eine ähnliche Art verfährt man auch mit den übrigen Theilen des Dividendums.

Setzt man den Reſt über das Dividendum, ſo würde die Form ſo ausfallen:

~~1~~ ~~31~~
4) ~~96732~~ | 24183 Quotient.

oder:

~~1~~ ~~31~~ | 24183.
~~96732~~ |
~~44444~~

§. 58.

Aufgabe.

Jede gegebene Zahl mit einer kleinern zu dividiren.

Auflöſung.

A. in ungenannten Zahlen.

Erſter Fall. Wenn das Dividendum gleich viel Zahlzeichen hat, ſo ſucht man den Quotienten eben ſo, als wenn alle Zahlzeichen, das höchſten ausgenommen, **Nullen** wären, multiplicirt den Quotienten mit dem Diviſor und ſubtrahirt. Bleibt ein Reſt, ſo **muß er kleiner ſeyn als der Diviſor**, weil ſonſt der Quotient zu klein wäre. Z. B.

245) 980 | 4
980
———
0

278) 981 | 3
834
———
147 < als der Diviſor 278.

Zweiter Fall. Wenn das Dividendum **ein** Zahlzeichen mehr hat, als der Diviſor, dieſer aber größer iſt, als das höchſte Zahlzeichen des Dividendums; ſo nimmt man die zwei höchſten Zahlzeichen des Dividendums zuſammen, das höchſte des Diviſors aber allein, und ſucht den

den Quotienten ſo, als ob die übrigen Zahlzeichen alle **Nullen** wären. Den gefundenen Quotienten multiplicirt man nun mit dem ganzen Diviſor, ſetzt das Produkt unter das Dividendum und ſubtrahirt, ſo bekommt man entweder den Reſt, oder es geht alles auf. Z. B.

```
7425) 48251 | 6 Q.
      44550
      -----
       3701 Reſt.
```

Wäre aber das höchſte Zahlzeichen des Diviſors kleiner oder eben ſo groß, als das höchſte des Dividendums, und das Dividendum hätte mehr Zahlzeichen als der Diviſor, ſo läßt man die übrigen Zahlzeichen des Dividendums zur Rechten weg, und verfährt wie vorhin. Zum Reſte ſchreibt man alsdenn das folgende Zahlzeichen des Dividendums und ſucht ſo das zweite, und auf eine ähnliche Art auch alle übrige Zahlzeichen des Quotienten. Z. B.

```
4593) 8940573 | 1946
      4593...
      -------
      43475..
      41337..
      -------
       21387.
       18372.
       ------
        30153
        27558
        -----
         2595
```

Dritter Fall. Wenn bey fortgeſetzter Rechnung irgend einmal der Reſt mit dem beigeſchriebenen folgenden Zahlzeichen des Dividendums zuſammengenommen kleiner, als der Diviſor, ſo wird der Quotient **Null**. Da kein Produkt in Zahlenwerthen entſteht, wenn ein Faktor 0 iſt, ſo bleibt alles ungeändert, und man ſchreibt das folgende Zahlzeichen des Dividendums neben die vorigen, und ſucht abermals den Quotienten. Iſt er wieder 0, ſo ſetzt man

dieſes Verfahren ſo lange fort, bis der Quotient ein geltendes Zahlzeichen giebt, oder völlig gefunden iſt. Z. B.

```
359241) 4756908764 | 13099
        359241....
        ----------
        1113288...
        1077723...
        ----------
         3556576.
         3233169.
         --------
          3234074
          3233169
          -------
              905 < 359241.
```

Vierter Fall. Wenn der Diviſor 10 iſt, und das Dividendum enthält zur Rechten mehrere Nullen, ſo hat man wirklich dividirt, wenn man die niedrigſte Null des Dividendums wegſtreicht. Eben ſo, wenn der Diviſor 100 oder 1000 ꝛc. nimmt man ſo viel Nullen zur rechten Hand des Dividendums weg, als der Diviſor hat. Hiernach iſt (§. 42.) die Zahl 526000 : 10 = (52600 . 10) : 10 = 52600.

Iſt der Diviſor 1 mit einer Menge von Nullen, und das Dividendum hat zur Rechten eine eben ſo große Menge Nullen, ſo iſt der Quotient die Zahl des Dividendums, die den Nullen vorangeht; z. B. 526000 : 1000 = 526.

Enthält das Dividendum zur Rechten mehr Nullen als der Diviſor, ſo iſt der Quotient der Zahl des Dividendums gleich, weniger ſo viel Nullen, als der Diviſor hat: z. B. 7482000 : 100 = 74820.

Wenn der Diviſor 10 oder 100 oder 1000 ꝛc. iſt, und das Dividendum hat zur Rechten keine Nullen, ſo ſchneidet man vom Dividend ſo viele Zahlzeichen ab, als der Diviſor Nullen hat. Dieſe abgeſchnittenen Zahlzeichen ſind der Reſt, und was zur Linken ſtehen bleibt, der Quotient. So iſt 45369 : 1000 = 45 + (369 : 1000).

Auf

Auf dieſelbige Art laſſen ſich auch folgende Fälle behandeln:

a) Wenn das Dividendum am Ende keine, der Diviſor aber mehrere Nullen hat, und ſein höchſt s Zahlzeichen nicht Eins iſt, ſo dividirt man wie gewöhnlich, nachdem man ſo viele Zahlzeichen vom Dividend abgeſchnitten, als der Diviſor Nullen hat; z. B.

```
24) 456|724 | 19    oder 12) 4283|51 | 356
    24.|000                  36..|00 |
    ---                      ----
    216                        68.
    216                        60.
    ---                        ----
      0                         83
                                72
                               ----
                                11 alſo 1151 Reſt.
```

b) Endigen ſich, das Dividendum ſowohl als der Diviſor, auf eine gleiche Anzahl Nullen, und der Diviſor hat vor den Nullen ein oder mehrere Zahlzeichen, ſo hebt man die Nullen gegen einander auf, und dividirt wie vorhin; z. B.

```
6) 354|00 | 59
   30.|00 |
   ---
    54
    54
   ---
     0
```

Bliebe aber in einem ſolchen Falle ein Reſt, ſo müßte man dieſem noch die vom Dividend weggeſtrichenen Nullen beifügen; z. B.

```
6) 357|00 | 59
   30.|00 |
   ---
    57 ..
    54 ..
   ------
    300 Reſt.
```

c) Hat

c) Hat unter den vorigen Bedingungen das Dividendum am Ende mehr Nullen als der Diviſor, ſo ſchneide man nur ſo viele ab, als der Diviſor hat, und dividire; z. B.

```
15) 43780|00 | 2918
    30...|00 |
    ─────
    137....
    135....
    ─────
     28...
     15...
    ─────
     130..
     120..
    ─────
      10 00 Reſt.
```

d) Hat aber das Dividendum zur Rechten weniger Nullen als der Diviſor, ſo ſchneide man ſo viele Nullen und andere Zahlzeichen zuſammen genommen ab, als der Diviſer hat und dividire; z. B.

```
2) 125|600 | 62
    12.|000 |
   ─────
     5...
     4...
   ─────
     1 600 Reſt.
```

B. In benannten und mehrerleinamigen Zahlen. Z. B. man theile 145 Thlr. 12 gr. in 6 Theile. Was kommt auf einen Theil? 24 Thlr. 6 gr.

```
Man ſetze: 6: 145 Thlr. 12 gr.
              21
         ─────────────────
              24 Thlr.  6 gr.
```

Das heißt: 6 in 14 iſt 2 mal enthalten, denn 2 mal 6 iſt 12, und 12 von 14 bleibt 2, und mit der folgenden 5 = 25. Nun ſagt ferner: 6 in 25 iſt 4 mal enthalten. Und 4 mal

6 iſt

6 iſt 24, und 24 von 25 läßt 1 Reſt. Mithin iſt der Quotient 24 Thaler, welche unter die Stelle der obern Thaler geſetzet werden. Nun bleibt aber aus 145 Thlr. noch Ein Thaler Reſt. Zu dieſem nimmt man die folgenden 12 gr. = 1 Thlr. + 12 gr. = 36 gr. In dieſe 36 gr. dividirt man wiederum mit dem Diviſor der 6, und ſagt: 6 in 36 iſt 6 mal enthalten. Denn 6 mal 6 iſt 36, und 36 — 36 = 0. Schreibt man dieſe 6 gr. noch zum Quotienten neben die Thaler; ſo iſt der ganze Quotient 24 Thlr. 6 gr. Und 24 Thlr. 6 gr. 6 mal genommen, oder mit der 6 multipliciret, geben wiederum das Dividendum 145 Thlr. 12 gr. Folglich iſt richtig dividiret worden.

Nun folgen noch einige Aufgaben zur Uebung:

Man dividire 8436 mit 6. Was kommt? 1406.

24: 8688 = 362.

362: 8688 = 24.

32: 22368 = 699.

699: 22368 = 32.

21: 142569 = 6789.

Endlich 6789: 142569 = 21.

Anmerkung. 1.

Sollen die Größen der kleinern Sorten in Größen von größern Sorten verwandelt werden; ſo wird mit der Anzahl der kleinern, die in den größern enthalten iſt, die gegebene Zahl der kleinern Sorten dividiret. Z. B.

Wie viel machen 1584 Groſchen an Thalern aus? 66 Thaler.

24: ~~1~~5~~8~~4 | 66 Thaler.
~~1~~4

Ferner:

Ferner: Was betragen 65310 Pfennige in Thalern ꝛc.? 226 Thlr. 18 gr. 6 pf.

24

12: 65310 | 5442 | 226 Thlr. 18 gr. 6 pf..

536 pf. 668

11 = gr.

Wie viel geben 10778 Schuh, funfzehnſchuhigte Ruthen? 718 Ruthen 8 Schuh.

Anmerkung 2.

Kann der Diviſor nach dem Einmal Eins in gleiche Theile getheilt werden; ſo kann man mit ſolchen durch die Zerfällung eben auf die Weiſe dividiren, als in der Multiplikation multipliciret worden. Z. B.

76 Thaler in 24 Theile getheilt. Was kommt auf Einen dergleichen Theil? 3 Thlr. 4 gr.

Denn es iſt: 24 = 4.6: 76 Thlr.

19

1 = 24 gr.

3 Thl. 4 gr.

Hier heißt es: 4 in 76 iſt 19 mal enthalten; denn 4 mal 19 = 76. Ferner: 6 in 19 iſt 3 mal enthalten; das ſind 3 Thaler, denn 3.6 = 18, und 18 von 19 läßt noch 1 Thlr. übrig. Da nun 1 Thlr. = 24 Groſchen, ſo ſagt man endlich: 6 in 24 gr. iſt 4 mal enthalten; denn 4.6 = 24, und 24 — 24 = 0. Daher ſetzt man den Quotienten der 4 gr. auch neben den Quotienten der Thaler und die verlangte Zahl iſt 3 Thlr. 4 gr.

§. 59.

Wenn man vorhergehende Aufgaben in genannten und mehrerleinamigen Zahlen nur einigermaßen genau betrachtet; ſo kommen ſie mit denjenigen vollkommen überein, welche ſonſt von den Rechnungslehrer in die Regel De=

tri

tri pflegen geſetzt zu werden. Denn wenn man ſagt: 76 Thlr. in 24 Theile getheilt; ſo iſt es eben ſo viel, als wenn man ſagt:

Wenn 24 Stück 76 Thlr. gelten, was kommt 1 Stück? 3 Thlr. 4 gr.

Mithin rechnet man zu dieſem Abſchnitte auch zugleich alle Aufgaben, die, wenn ſie in drey Sätzen gegeben werden, zum letzten Satze eine 1 haben. Denn ſie ſind nichts anders, als Aufgaben, die durch die Diviſion aufgelöſet werden. Hiervon folgen noch einige:

1) Auf 99 Klaftern aufgeſpalten zweielliges Holz werden 11880 Cubikſchuh gerechnet. Wie viel kommt auf eine Klafter? 120 Cubikſchuh.

2) Wenn ein Förſter in 6 Jahren 149 Scheffel 1 Viertel Neujahrsgetreide bekommt. Wie viel kann er auf ein Jahr rechnen? 24 Schffl. 3 Vrtl. 2 Metzen.

3) Wenn man für 36 Klaftern 54 Thlr. 18 gr. zahlen muß; was gilt Eine Klafter insbeſondere? 1 Thlr. 12 gr. 6 pf.

4) 72 Klaftern hartes Holz ſind mit 156 Thlr. bezahlet worden; wie theuer hat der Verkäufer 1 Klafter gerechnet? 2 Thlr. 4 gr.

5) Wenn ein Holzſchläger in 6 Wochen 9 Thaler verdient. Was iſt ſein Tagelohn excl. der Sonntage? 6 gr.

6) In 77 Sechzigern ſind 277200 Scheitchen enthalten; wie viel Scheitchen werden wohl auf Einen einzigen Sechziger gerechnet? 3600 Scheitchen.

7) Wenn auf 2763 Malter 176832 Cubikſchuh gerechnet werden; wie viel kommen auf Einen Malter? 64 Cubikſchuh.

8) Wenn

8) Wenn 27 Centner 9918 Mfl. 18 gr. gelten; was kommt auf Einen? 367 Mfl. 7 gr. 8 pf.

9) Der Förſter zu N. hat letzthin 28 Stück Wellen verkauft, und dafür 182 Thaler einberechnet; wie theuer hat er Ein Stück verhandelt? 6 Thlr. 12 gr.

10) Es ſind für 18 Schock Hopfenſtangen 30 Thaler erlegt worden; wie theuer iſt ein Schock bezahlt worden? 1 Thlr. 16 gr.

Anmerkung.

Auf den Satz §. 50. gründet ſich die Probe der Multiplikation und Diviſion.

1. Probe der Multiplikation.

A. in ungenannten Zahlen.

Man dividirt das Produkt durch den einen Faktor, ſo erhält man den andern als Quotient. Es ſey 48 das Multiplikandum, 6 der Multiplikator, und das Produkt 288. Denn es iſt

```
6) 288 | 48 Quotient = Multiplik.
    24
  -----
    48
    48
```

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Hätte man 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. mit 6 multiplicirt, und 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. erhalten, ſo wäre das Multiplikandum 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. der Multiplikator 6; das Produkt aber 171 Thlr. 20 gr. 6 pf.

Nun

Nun ſey 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. das Dividendum,

der Diviſor 6) 12

51 | 28 Thl.
48

3
34

72 }
+ 20 } gr.

6) 92 | 15 gr. | alſo 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. das Multiplikandum = dem Quotienten.
6

32
30

2
12

24
+ 6

6) 30 | 5 Pf.
30

2. Probe der Diviſion.

A. in ungenannten Zahlen.

Man multiplicire den Quotienten mit dem Diviſor, und addire den etwa gebliebenen Reſt dazu, ſo hat man das Dividendum. Es ſey das Dividendum 980, der Diviſor 245, und der Quotient 4. Nun multiplicire man, ſo iſt

245
4

980 das Produkt = dem Dividendum.

Bayeriſche Staatsbibliothek München

B. in genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

Iſt 28 Thlr. 15 gr. 5 pf. der Quotient, 6 der Diviſor und 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. das Dividendum, ſo multiplicire man und es iſt.

```
  28 Thlr.      15 gr.      5 pf.
   6             6          6
  ———           ———        ———
  168            90    12) 30 | 2 gr.
    3           + 2        24
 ————          ————      ————
 171 thl.  24) 92 | 3 thl. 6 Pf.
               72
             ————
              20 gr.
```

alſo 171 Thlr. 20 gr. 6 pf. der Quotient = dem Multiplikandum.

Vier-

Viertes Kapitel.

Von den Brüchen und den Rechnungsarten mit Brüchen und gemiſchten und mehrerleinamigen Zahlen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 60.

Da Brüche nichts anders ſind als Theile des Ganzen (§. 5.) oder der Einheit, ſo kommen ſie mit den mehrerleinamigen Zahlen in ſofern überein, als die Theile des Ganzen bei den leztern Zahlen durch Wörter, bei den erſtern aber durch Zahlzeichen oder Ziffern ausgedrückt werden. So iſt z. B. Thaler das Ganze, Groſchen und Pfennige aber ſind Theile; auf eine ähnliche Art iſt Eins das Ganze, die Hälfte aber, oder das Drittel (der dritte Theil), Viertel (der vierte Theil) ſind Theile. Hieraus ergiebt ſich die Art, wie man die Brüche auszudrücken pflegt. Man hat nämlich zwei Zahlen nöthig, wovon die eine anzeigt, in wieviel gleiche Theile Eins, die Einheit oder das Ganze getheilt iſt, die andere aber den Theil der Einheit oder die Menge der Theile angiebt, die der Bruch enthält; die erſtere heißt der Nenner, und die leztere der Zähler. Das Zeichen der Brüche iſt das Zeichen der Diviſion oder der Strich, weil ein Bruch auch als ein Quotient angeſehen werden kann, der entſteht,

wenn man ein kleineres Dividendum durch einen größern Diviſor dividiren ſoll. Der Zähler kommt **über** und der Nenner **unter** den Strich, weil jener das Dividendum, dieſer aber den Diviſor vorſtellt. So iſt, wenn 1 z. B. in 4 gleiche Theile getheilt wird, und man nimmt 1 oder 2 oder 3 ſolcher gleiche Theile, der Bruch $\frac{1}{4}$ oder $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{4}$, wo denn 1 und 2 ſo wie 3 die Zähler ausdrücken, 4 aber den Nenner anzeigt. **Demnach wäre jeder Bruch ein Quotient, den man findet, wenn man den Zähler zum Dividendum und den Nenner zum Diviſor macht; ſo auch umgekehrt** (§. 50.). Folglich iſt der Theil eines Quotienten, in den Fällen, wo zuletzt ein Reſt bleibt (§. 55—58.), der in weiter keine Betrachtung kam, ein **Bruch**, deſſen Zähler der gebliebene Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt. Z. B. $27:5=5+\frac{2}{5}$.

Wird ein Bruch blos allein durch ſeinen Zähler und Nenner ausgedrückt, ſo heißt er ein **ungenannter**; wird aber auch zugleich der **Name der Einheit** angezeigt, ein **genannter Bruch**. So ſind $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ungenannte; $\frac{3}{4}$ Rthlr., $\frac{5}{8}$ Pfund aber genannte Brüche (§. 6.).

§. 61.

Wenn Brüche einerlei Namen oder gleich große Nenner haben, ſo ſind ihre einzelnen Theile gleich groß; folglich kann man die Größe des einen Bruchs, gegen die Größe des andern, aus der Vergleichung der Zähler finden.

Iſt der Zähler des einen Bruches Eins, und der Zähler der andern jede **andere** beliebige Zahl, ſo iſt der erſtere gleichſam die Einheit, wornach die Größe der andern geſchätzt wird. So vielmal als alſo dieſe Eins im Zähler des andern Bruchs enthalten iſt, ſo vielmal enthält überhaupt der letztere den erſtern. Z. B. es ſei $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wo $\frac{1}{4}$ die **Einheit** und $\frac{3}{4}$ das **Ganze** iſt. Da nun

die

die Nenner gleich ſind, und 1 in 3 dreimal enthalten, ſo ſieht man, daß auch $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$, 3mal enthalten iſt. Auch kann man 3 als die Zahl ſelbſt, $\frac{1}{4}$ aber als den Namen derſelben betrachten, denn es iſt $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$.

Der obige Saz aber gilt auch für die Nenner. Wenn daher zwei Brüche einerlei Zähler haben, ſo hängt ihre Größe gegen einander, von der Größe ihrer Nenner ab. So iſt $\frac{3}{4}$ zweimal ſo groß als $\frac{3}{8}$, weil 3 = 3, 4 aber in 8 zweimal enthalten iſt. Demnach iſt überhaupt ein Bruch in dem andern zwei- drei- oder viermal enthalten, wenn der Nenner des einen im Nenner des andern ſo vielmal enthalten iſt, vorausgeſezt, daß die Zähler gleich ſind.

Alſo beruhet die Größe der Brüche bei einerlei Nenner, auf der Größe der Zähler; bei einerlei Zähler aber auf der Größe der Nenner.

§. 62.

Man kann einen von den gleichen Theilen eines Bruches ſo vielmal nehmen, daß man eine Größe erhält, welche alle Theile zuſammen begreift, die entweder dem Ganzen gleich, oder noch größer iſt, als das Ganze, und in beiden Fällen die Größe doch noch wie einen Bruch ſchreiben. So iſt z. B. $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ u. ſ. w. eben ſo groß, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ u. ſ. w. aber größer als das Ganze. Ausdrücke dieſer Art pflegt man unächte Brüche zu nennen (§. 5.).

Die ächten Brüche erkennt man daran, daß der Zähler kleiner als der Nenner iſt; die unächten Brüche aber daran, daß der Zähler entweder eben ſo groß, oder größer iſt, als der Nenner. So iſt z. B. $\frac{3}{4}$ ein ächter Bruch, weil ſein Zähler kleiner als ſein Nenner iſt, denn es iſt offenbar $3 < 4$; $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$ aber ſind unächte Brüche, weil 3 = 3, 4 = 4 iſt, und um ſo mehr

auch $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, denn hier iſt $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, ſo auch $\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$.

Unächte Brüche, welche die Einheit *ein- oder mehreremale* und noch etwas darüber enthalten, nennt man, wenn ſie ſo geſchrieben werden, anſtatt $\frac{4}{3}$, $1 + \frac{1}{3}$; anſtatt $\frac{5}{4}$, $1 + \frac{1}{4}$; anſtatt $\frac{19}{5}$, $3 + \frac{4}{5}$, *gemiſchte Zahlen*, und drückt ſie gewöhnlich ſo aus: Man ſchreibt nämlich anſtatt $1 + \frac{1}{3}$ kurz $1\frac{1}{3}$, anſtatt $1 + \frac{1}{4}$ kurz $1\frac{1}{4}$, anſtatt $3 + \frac{4}{5}$ kurz $3\frac{4}{5}$.

§. 63.

Aus §. 62. folgt: Man kann jede ganze Zahl (wenn es nöthig oder vortheilhaft iſt) in einen unächten Bruch von einem vorgeſchriebenen Nenner verwandeln, wenn man nämlich die ganze Zahl mit dem vorgeſchriebenen Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Produkt zum Zähler, den Multiplikator aber zum Nenner macht. So wird 6 in einen Bruch, deſſen Zähler 7 iſt, verwandelt, wenn man 6 durch 7 multiplicirt und das Produkt ebenfalls durch 7 dividirt, oder $\frac{6.7}{7} = \frac{42}{7}$; denn es iſt $\frac{42}{7} = 6$, oder $(6.7) : 7 = 6$, weil eine Zahl durch eine andere multiplicirt, und durch eben dieſelbe zu gleicher Zeit dividirt, ihren Werth nicht ändern kann.

§. 64.

Will man die *Größe* eines Bruchs gegen *Eins*, die *Einheit*, oder das *Ganze* d. i. ſeinen *Werth* beurtheilen, ſo muß man nicht nur die Mengen ſeiner Theile, folglich die Größe des Zählers, ſondern auch die Größe dieſer Theile, in welche das Ganze getheilt iſt, das iſt, ſeinen Nenner in Betrachtung ziehen.

Auch können Brüche eben ſo wie ganze Zahlen durch andere vorgeſchriebene Zahlen *vermehrt* und *vermindert* werden, und zwar kann beides auf eine doppelte Art, nämlich

nämlich durch Multiplikation und Diviſion geſchehen, nämlich:

Wenn man den Zähler eines Bruches mit einer vorgeſchriebenen ganzen Zahl multiplicirt, und den Nenner ungeändert läßt, oder den Nenner mit dieſer Zahl dividirt, und den Zähler nicht ändert, ſo wird in beiden Fällen der Bruch ſo vielmal größer, als der Multiplikator oder der Diviſor Einheiten hat. Dividirt man hingegen blos den Zähler des Bruchs, oder multiplicirt man blos den Nenner deſſelben, ſo wird der Bruch ſo vielmal kleiner, als der Diviſor oder Multiplikator Einheiten enthält.

Denn es ſei z. B.

1) $\frac{6}{8}$ gegeben, und 2 ſei die vorgeſchriebene Zahl, ſo iſt $\frac{6.2}{8} = \frac{12}{8} = 2.\frac{6}{8}$, und $\frac{6}{8:2} = \frac{6}{4} = 2.\frac{6}{8}$. Da nun $\frac{1}{8}$ die Hälfte von $\frac{1}{4}$ (§. 61.), ſo iſt auch $\frac{6}{8}$ die Hälfte von $\frac{6}{4}$.

2) wie vorhin $\frac{6}{8}$ gegeben, und 2 ſei auch hier die vorgeſchriebene Zahl, ſo iſt $\frac{6:2}{8} = \frac{3}{8} = \frac{6}{8} : 2$, und $\frac{6}{8.2} = \frac{6}{16} = \frac{6}{8} : 2$. Da nun auch in dieſem Falle $\frac{1}{16}$ die Hälfte von $\frac{1}{8}$ (§. 61.), ſo iſt auch $\frac{6}{16}$ die Hälfte von $\frac{6}{8}$.

Hieraus ergiebt ſich: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder ſeinen Zähler mit ihr multiplicirt, oder ſeinen Nenner damit dividirt; ein Bruch aber wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder ſeinen Zähler mit ihr dividirt, oder ſeinen Nenner damit multiplicirt.

Anmerkung.

Im allgemeinen kann man ſich merken, daß die Multiplikation und Diviſion der Zähler der Brüche, eben die Wirkung hat, wie bei ganzen Zahlen, d. i. die Multiplikation der Zähler vermehrt und die Diviſion der Zähler

Zähler vermindert die Brüche; die Multiplikation und Diviſion der Nenner hingegen hat eine der vorigen gerade entgegengeſetzte Wirkung, d. i. die Multiplikation der Nenner vermindert, und die Diviſion der Nenner vermehrt den Werth der Brüche.

§. 65.

Aus §. 63 und 64. folgt auch, daß wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs, mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruches ungeändert bleibt. Multiplicirt man z. B. $\frac{3}{4}$ mit 6 im Zähler und Nenner, ſo erhält man $\frac{3\cdot6}{4\cdot6} = \frac{18}{24}$, denn durch die Multiplikation des Zählers mit 6, wird der Bruch 6mal größer, und es iſt $\frac{3\cdot6}{4} = \frac{18}{4}$; durch die Multiplikation mit 6 im Nenner aber wird der Bruch 6mal kleiner, und es iſt $\frac{3}{4\cdot6} = \frac{3}{24}$, folglich heben beide Veränderungen an einerlei Bruch einander auf, und es iſt $\frac{3\cdot6}{4\cdot6} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

Dividirt man hingegen z. B. $\frac{18}{24}$ durch 6 im Zähler und Nenner, ſo erhält man $\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$, denn durch die Diviſion des Zählers mit 6, wird der Bruch 6mal kleiner, und es iſt $\frac{18:6}{24} = \frac{3}{24}$; durch die Diviſion mit 6 im Nenner aber, wird der Bruch 6mal größer, und es iſt $\frac{18}{24:6} = \frac{18}{4}$, folglich heben auch dieſe beiden Veränderungen an einerlei Bruch einander auf, und es iſt $\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$.

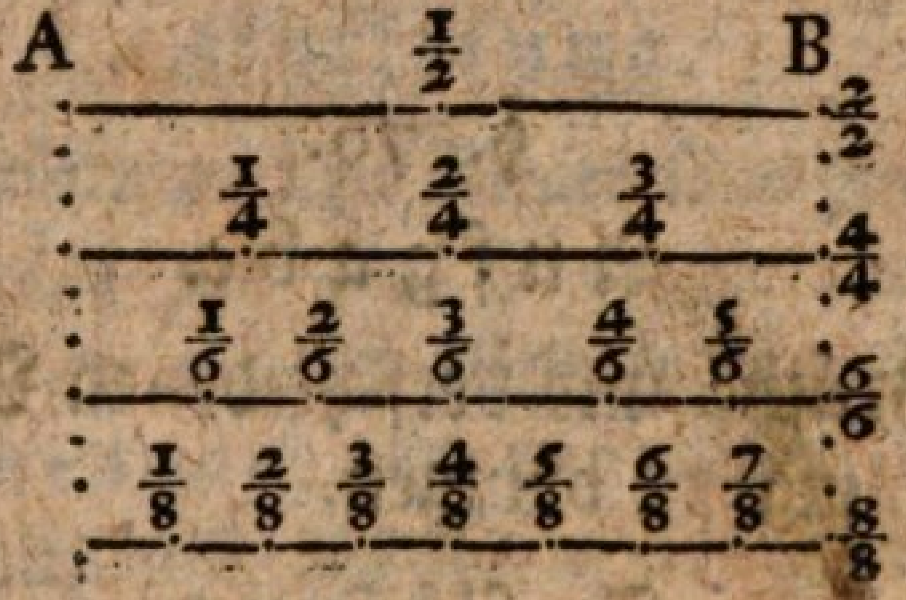
§. 66.

Hieraus ergiebt ſich, daß Brüche einerlei Größe, oder einen gleichen Werth haben können, wenn ſie auch durch verſchiedene Zahlzeichen ausgedrückt, oder mit verſchiedenen Ziffern geſchrieben ſind; denn, wenn die Zähler verſchiedener Brüche in ihrem Nenner gleich vielmal enthalten ſind, ſo müſſen auch die Werthe, folglich die Brüche ſelbſt gleichgroß ſeyn (§. 63.).

§. 67.

Von dieſen Sätzen kann man ſich auch durch Hülfe einer oder mehrerer Linien überzeugen:

Es ſei z. B. AB das Ganze, AC = BC = $\frac{1}{2}$AB, alſo die Hälfte von AB. Wird nun die Linie AB in 4 gleiche Theile getheilt, ſo iſt $\frac{1}{4}$ von dieſer Linie auch nur halb ſo groß als $\frac{1}{2}$; nimmt man aber $\frac{2}{4}$ ſo hat man eben ſo viel als vorhin an AC, alſo iſt $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Theilt man ferner AB in 6 gleiche Theile, ſo iſt $\frac{1}{6}$ von AB 3mal kleiner, als $\frac{1}{2}$; nimmt man aber 3 ſolcher Theile, ſo hat man $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Demnach iſt auch, wenn AB in 8 gleiche Theile getheilt wird, $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.



§. 68.

Dieſes leitet zugleich darauf, Brüche unter vielerlei Formen auszudrücken, ohne daß ihr Werth geändert wird. So iſt nicht nur, wie vorhin $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ſondern auch $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{10}{20} = \frac{12}{24}$ u. ſ. w. Auch kann man hiernach ganze Zahlen in der Form eines unächten Bruchs ausdrücken, z. B. $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ u. ſ. w. ſo auch $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5}$ u. ſ. w.

Anmerkung.

Das letzte Verfahren, ganze Zahlen wie Brüche zu ſchreiben, ſcheint unnöthig zu ſeyn, iſt es aber nicht. Kommt man in Fälle, wo ganze Zahlen und Brüche mit einander vermehrt oder vermindert werden ſollen, ſo kann man alle gegebenen Zahlen als Brüche ausdrücken, und ganz allein nach Bruchregeln rechnen, da man ſonſt genöthiget wäre, Regeln für ganze Zahlen

und Brüche zuſammen zu ſetzen. So hat jede Form ihren Nutzen, wenn auch in manchen Fällen einen etwas entfernten.

§. 69.

Auf den erwähnten Lehren beruht eine doppelte Veränderung der Brüche, nämlich Brüche mit verſchiedenen Nennern auf gleich große Brüche von einerlei Nenner, und durch große Zahlen ausgedrückte Brüche auf ſolche zu bringen, die kleinere Zahlen, und doch den vorigen Werth haben. Die erſte Veränderung nennt man: Brüche unter einerlei Nenner oder auf gleiche Benennung bringen; die letzte aber: Brüche aufheben.

§. 70.

Aufgabe.

Zwei Brüche mit verſchiedenen Nennern auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire beide Nenner in einander, ſo giebt das Produkt den gemeinſchaftlichen oder Generalnenner; jeden Zähler aber multiplicire man mit dem Nenner des andern Bruches, ſo erhält man die zu dem Generalnenner gehörigen Zähler beider Brüche. Z. B. ſoll man $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ auf einerlei Benennung bringen, ſo iſt $3 . 4 = 12$ der Generalnenner, und $2 . 4 = 8$, ſo wie $3 . 3 = 9$ ſind die dazu gehörigen Zähler, und es iſt

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \text{ denn } \frac{8}{12} : \frac{4}{4} = \frac{2}{3} \ (\S. 65.);$$
$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \text{ denn } \frac{9}{12} : \frac{3}{3} = \frac{3}{4} \ (\S. 65.).$$

§. 71.

Geht der Nenner des einen Bruchs im Nenner des andern auf, ſo braucht man nur einen Bruch zu verwandeln,

deln, und das Verfahren wird hierdurch etwas abgekürzt z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{12}$. Da der Nenner 4 im Nenner 12 aufgeht, und 3 zum Quotienten giebt, ſo multiplicire man blos allein Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$, mit dem erhaltenen Quotienten, nämlich $\frac{3.3}{4.3} = \frac{9}{12}$, und es iſt $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, weil $\frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$ giebt (§. 65.) und dennoch haben beide Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{9}{12}$ einerlei Benennung.

§. 72.

Aufgabe.

Jede gegebene Anzahl von Brüchen mit verſchiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire den Zähler ſowohl als den Nenner eines jeden Bruchs mit dem Produkte aller übrigen Nenner, ſo erhält man einerlei Nenner für alle Brüche oder den Generalnenner, und die dieſem Nenner zugehörigen Zähler, daß alſo die Form der Brüche, aber nicht ihr Werth geändert iſt (§. 65.). Sollen z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ unter einerlei Benennung gebracht werden, ſo iſt $4.8.6.3.7 = 4032$ der Generalnenner;

$$\text{denn } \frac{3 \times 8.6.3.7}{4 \times 8.6.3.7} = \frac{3024}{4032} = \frac{3}{4} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{7 \times 6.3.7.4}{8 \times 6.3.7.4} = \frac{3528}{4032} = \frac{7}{8} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{5 \times 3.7.4.8}{6 \times 3.7.4.8} = \frac{3360}{4032} = \frac{5}{6} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{1 \times 7.4.8.6}{3 \times 7.4.8.6} = \frac{1344}{4032} = \frac{1}{3} \text{ (§. 65.)},$$

$$\frac{4 \times 4.8.6.3}{7 \times 4.8.6.3} = \frac{2304}{4032} = \frac{4}{7} \text{ (§. 65.)}.$$

§. 73.

Aus dieſem Verfahren ſieht man deutlich, daß man das Produkt der übrigen Nenner erhalten muß, wenn man mit dem Nenner eines jeden in den Generalnenner dividirt. Hierdurch erhält man ein etwas abgekürzteres Verfahren, jede Anzahl von Brüchen von verſchiedenen Nennern unter einerlei Benennung, oder unter einen Generalnenner zu bringen. Man darf nämlich nur mit dem Nenner eines jeden Bruchs in den Generalnenner dividiren, und den erhaltenen Quotienten, welcher jedesmal das Produkt der übrigen Nenner enthält, mit jedem Zähler multipliciren, und man erhält den Zähler, der zum Generalnenner gehört; denn auch hierdurch wird der Werth der Brüche nicht geändert, weil man Nenner und Zähler mit einerlei Zahl multiplicirt. So iſt z. B.

	4032		
$\frac{3}{4}$	1008	4024,	alſo iſt $\frac{4024}{4032} = \frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	504	3528,	— $\frac{3528}{4032} = \frac{7}{8}$
$\frac{5}{6}$	672	3360,	— $\frac{3360}{4032} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	1344	1344,	— $\frac{1344}{4032} = \frac{1}{3}$
$\frac{4}{7}$	576	2304,	— $\frac{2304}{4032} = \frac{4}{7}$

§. 74.

Den Hauptnenner kann man auch auf folgende Art ſuchen: Man dividirt die Nenner der gegebenen Brüche in einander, und ſieht, ob einer in mehrern andern oder

in

in allen aufgeht; in beiden Fällen dividirt man mit dieſem Nenner, den man das **gemeine Maß** nennt, in diejenigen Nenner, in welchen er aufgehet, merkt die Quotienten, und läßt die Nenner bei welchen die Diviſion nicht aufgeht, ungeändert. Oft findet man unter den, durch die Diviſion erhaltenen Quotienten und den übrigen Nennern noch einen ſolchen Diviſor, der ein gemeines Maß für alle, oder doch für einige iſt, und dividirt abermals. Die zuletzt erhaltenen Quotienten nebſt den ungeänderten Nennern und gebrauchten Diviſoren als gemeine Maße, bringt man in ein Produkt, welches der Generalnenner iſt. Ein ſolcher Generalnenner iſt unter allen der **kleinſte**, und die Brüche erhalten durch die Verwandelung in ſolche, die einerlei Benennung haben, ihre kleinſten Formen, d. i. ſie werden durch die kleinſten Zahlen ausgedrückt. So haben z. B. unter den Nennern (§. 72.), 4, 8, 6, 3, 7, die Nenner 4 und 8 das gemeine Maß 4, welches der Diviſor von 4 und 8 iſt. Dividirt man alſo

$$4)\ \frac{4,\ 8,\ 6\ \ 3\ \ 7}{1,\ 2,\ 6,\ 3,\ 7}$$

ſo hat man, ſtatt 4 und 8 die Zahlen 1 und 2 erhalten. Da nun 2 in 2, und auch in 6 aufgeht, ſo erhält man

$$2)\ \frac{1,\ 2,\ 6,\ 3\ \ 7}{1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 7};$$

Nun geht auch 3 in 3 auf, alſo hat man, wenn man mit 3 dividirt, und die Zahlen die nicht mit 3 aufgehen, wie vorhin ungeändert läßt,

$$3)\ \frac{1,\ 1,\ 3,\ 3\ \ 7}{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 7}$$

Werden nun die Diviſoren oder die gebrauchten gemeinen Maße und die zuletzt erhaltenen Quotienten multiplicirt, ſo bekommt man den **Generalnenner**, nämlich $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ (weil 1 weder multiplicirt

tiplicirt noch dividirt = 168. Der Grund des Verfahrens beruht auf dem Satze: Jede Zahl, die in einer andern aufgeht, geht auch im 2, 3, 4 und mehrfachen Produkte dieſer Zahl auf. Die Verwandelung der Brüche geſchieht übrigens wie vorhin:

168			
$\frac{3}{4}$	42	126, alſo iſt	$\frac{126}{168} = \frac{3}{4}$
$\frac{7}{8}$	21	147, —	$\frac{147}{168} = \frac{7}{8}$
$\frac{5}{6}$	28	140, —	$\frac{140}{168} = \frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	56	56, =	$\frac{56}{168} = \frac{1}{3}$
$\frac{4}{7}$	24	96, =	$\frac{96}{168} = \frac{4}{7}$

Vergleicht man dieſe Brüche, die zum Generalnenner 168 haben, mit denen in §. 72, die 4032 zum Generalnenner haben, ſo ſieht man, daß die gegenwärtigen bequemer ausgedrückt ſind, als die vorigen.

Anmerkung.

Das Verfahren in §. 74, welches ſich auf die Lehre vom gemeinen Maße gründet, kann hier der Kürze wegen nicht vollſtändiger entwickelt werden. Wer weitern Unterricht verlangt, findet dieſen in den vollſtändigern Lehrbüchern der Mathematik von Käſtner und Karſten, ſo wie im erſten Theile des Lehrbuches der Mathematik, von F. Meinert (Halle 1789 bei Hemmerde und Schwetſchke). In allen Fällen aber enthält §. 72 die Hauptregel zur Verwandelung mehrerer Brüche in ſolche, die einerlei Nenner haben, weil die Nenner der Brüche nicht in allen Fällen gemeinſchaftliche Diviſoren, oder gemeine Maße haben.

§. 75.

Soll man einen Bruch in einen andern, wovon der Nenner vorgeſchrieben iſt, verwandeln, und der Nenner des gegebenen Bruchs geht im vorgeſchriebenen Nenner auf, ſo darf man nur beide Nenner durch einander dividiren, und mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler des gegebenen Bruchs multipliciren (§. 65.). Es ſei z. B. $\frac{2}{3}$ gegeben, und der vorgeſchriebene Nenner ſei 12; da nun 3 in 12, 4mal enthalten iſt, ſo giebt der Nenner 2 mit 4 multiplicirt, den neuen Zähler 8, und es iſt $\frac{8}{12}$ der verlangte Bruch $= \frac{2}{3}$, weil $\frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$ iſt.

§. 76.

Aufgabe.

Brüche aufzuheben, oder durch die kleinſten Zahlen doch ſo auszudrücken, daß ihr Werth nicht verändert werde.

Auflöſung.

Man ſucht eine oder mehrere Zahlen, die im Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs aufgehen, und dividirt damit Zähler und Nenner.

Es ſei z. B. $\frac{48}{72}\Big|\frac{6}{9}\Big|\frac{2}{3}$ (8, 3); oder $\frac{48}{72}\Big|\frac{2}{3}$ (24), denn es iſt $\frac{(48:8):3}{(72:9):3} = \frac{2}{3}$, und $\frac{2.8.3}{3.8.3} = \frac{48}{72}$ (§. 65.).

Anmerkung.

Das Aufſuchen ſolcher Zahlen, die im Zähler und Nenner eines Bruches aufgehen, beruht auf Uebung und Probiren, wozu man Multiplikation und Diviſion oder das Einmal Eins nöthig hat. Folgende Regeln ſind im Einmal Eins gegründet, und erleichtern das Aufheben der Brüche:

1)

1) Endigen ſich Zähler und Nenner eines Bruchs auf eins dieſer geraden Zahlzeichen 2, 4, 6, 8, 0, ſo kann man ſie ohne Reſt mit 2 dividiren.

Z. B. $\frac{24}{26}\overset{2}{\Big|}\frac{12}{13}$

2) Geben die Zahlzeichen einer Zahl, alſo auch des Zählers und Nenners eines Bruchs, zuſammen addirt 3 oder ein **Vielfaches** von 3, alſo 3.2, 3.3, 3.4 u. ſ. w., ſo kann eine ſolche Zahl durch 3 dividirt werden.

Z. B. $\frac{12}{96}\overset{3}{\Big|}\frac{4}{32}$, folglich auch nach n. 1. $\frac{4}{32}\overset{2}{\Big|}\frac{2}{16}\overset{2}{\Big|}\frac{1}{8}$ oder

weil $2.2 = 4$, $\frac{4}{32}\overset{4}{\Big|}\frac{1}{8}$; alſo auch, da

$3.2.2 = 12$, $\frac{12}{96}\overset{12}{\Big|}\frac{1}{8}$.

3) Geben die Zahlzeichen einer Zahl, alſo auch des Zählers und Nenners eines Bruchs, zuſammen addirt 9 oder ein **Vielfaches** von 9, alſo 9.2, 9.3, 9.4 u.ſ.w. ſo kann eine ſolche Zahl durch 9 dividirt werden.

Z. B. $\frac{126}{135}\overset{9}{\Big|}\frac{14}{15}$

4) Alle Zahlen, die aus **zwei gleichen** Zahlzeichen beſtehen, alſo auch Zähler und Nenner eines Bruchs können mit 11 dividirt werden.

Z. B. $\frac{22}{66}\overset{11}{\Big|}\frac{2}{6}$, und nach n. 1. $\frac{2}{6}\overset{2}{\Big|}\frac{1}{3}$, alſo

auch da $11.2 = 22$, $\frac{22}{66}\overset{22}{\Big|}\frac{1}{3}$.

5)

5) Alle Zahlen, die aus drei gleichen Zahlzeichen beſtehen, mithin auch Zähler und Nenner eines Bruchs können mit 37 dividirt werden.

$$\text{Z. B. } \overset{37}{\frac{222}{666}\Big|\frac{6}{18}}\text{, und nach n. 3. } \overset{3}{\frac{6}{18}\Big|\frac{2}{6}} \text{ folglich}$$

$$\text{auch nach n. 1. } \overset{2}{\frac{2}{6}\Big|\frac{1}{3}}\text{, alſo } \frac{222}{666} = \frac{1}{3}.$$

6) Endiget ſich eine Zahl auf 5, ſo kann ſie, durch 5 dividirt werden. Auch dieſe Regel läßt ſich auf die Diviſion eines ſolchen Zählers und Nenners eines Bruchs anwenden.

$$\text{Z. B. } \overset{5}{\frac{45}{95}\Big|\frac{9}{19}}$$

7) Endigen ſich Zähler und Nenner mit Nullen, ſo kann man gleich viele im Zähler und Nenner gegen einander wegſtreichen, denn man dividirt alsdenn mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. (§. 55 — 58.).

$$\text{Z. B. } \overset{100}{\frac{6500}{12900}\Big|\frac{65}{129}}$$

§. 77.

Weis man auf irgend eine Art die Faktoren des Zählers und Nenners eines Bruchs zu finden, die aber einfach, d. i. ſo beſchaffen ſeyn müſſen, daß ſie durch keine Zahl ohne Reſt dividirt werden können (Primzahlen), ſo kann, man gleiche einfache Faktoren im Zähler und Nenner wegſtreichen oder weglaſſen und der Bruch erhält dadurch die kleinſte Form oder wird durch die kleinſten Zahlen ausgedrückt.

$$\text{Z. B. } \frac{2310}{9350} = \frac{2.\ 7.11.5.3}{5.11.17.2.5} = \frac{7.3}{17.5} = \frac{21}{85}$$

Auf eine ähnliche Art kann man auch, wenn Faktoren, oder ganze Zähler in Faktoren oder ganzen Nennern aufgehen, die Faktoren gegen einander weglaſſen, und man läßt nur die Quotienten, die man durch ſolche Diviſion erhält, ſtehen;

$$\text{z. B. } \frac{4.6.8}{12.9.16} = \frac{1.6.1}{3.9.2} = \frac{1.2.1}{9.2} = \frac{1.1}{9} = \frac{1}{9};$$

Denn $4.6.8 = 192$, und $12.9.16 = 1728$,

$$\text{und } \frac{192}{1728} = \frac{192:192}{1728:192} = \frac{1}{9}.$$

Anmerkung.

Da das Aufſuchen der einfachen Faktoren großer Zahlen mühſam, und die Regeln dazu verwickelt ſind, ſo bedient man ſich in der Ausübung ſchon berechneter Tabellen, wohin folgende gehören:

Tabellen der Primzahlen und der Faktoren der Zahlen, welche unter 100100, und durch 2, 3, und 5 nicht theilbar ſind. Herausgegeben durch Johann Neumann. Deſſau 1785.

Auch findet man hierher gehörige Tabellen in vollſtändigen Sammlungen mathematiſcher und trigonometriſcher Tafeln; wovon in der Folge.

§. 78.

Eine gemiſchte Zahl richtet man ein, reducirt oder bringt ſie unter einerlei Benennung, wenn man die ganze Zahl in einen unächten Bruch von dem Nenner verwandelt, der dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs gleich iſt, welches geſchieht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs multiplicirt, den Zähler dazu addirt, und den Nenner überdies unter die erhaltene Summe ſetzt.

$$\text{z. B. } 9\tfrac{4}{5} = \frac{\overset{9\frac{4}{5}}{45 + 4}}{5} = \frac{49}{5}$$

Iſt

Iſt die Zahl nicht nur gemiſcht, ſondern auch mehrerleinamig, ſo multiplicirt man ſie mit der Zahl, welche anzeigt, wieviel von der Zahl des kleinern Werthes Eins der größern ausmacht, oder mit der Reduktionszahl, multiplicirt überdies das Produkt mit dem Nenner des dabei befindlichen Bruchs und addirt dazu den Zähler. Dieſe Summe dividirt durch den Nenner, giebt den unächten Bruch von einem kleinern Namen.

Z B. Wie viel Viertel eines Groſchen geben 8 Rthlr. $6\frac{3}{4}$ gr.?

Man ſetze: 8 Rthlr.
24 = 1 Rthlr.
———
192
6 gr.
———
198
4 Nenner
———
792
3 Zähler
———
795, alſo $\frac{795}{4}$ gr.

§. 79.

Aufgabe.

Einen Bruch in genannten Zahlen, alſo in Zahl, Maß, Gewicht u. ſ. w in der darauf folgenden kleinern Größe auszudrücken, oder welches einerlei iſt, einen Bruch zu reſolviren.

Auflöſung.

Man nimmt die bekannten Theile der Größe in Zahlen, deren Werth die kleinern Größen in den Größen im Ganzen ausmachen, theilt ſolche durch den Nenner des Bruches, und multiplicirt den Quotienten mit dem Zähler; ſo giebt das Produkt den Werth des Bruchs in ſeinen kleinern Benennungen.

Kann aber die Diviſion nicht ohne Reſt geſchehen, ſo multiplicirt man die Theile des Ganzen mit dem Zähler, und dividirt mit dem Nenner. Das, was übrig bleibt, multiplicirt man ferner mit den Theilen der darauf folgenden noch kleinern Größen, und dividirt das Produkt wieder mit dem Nenner des Bruches, und was endlich bei den allerkleineſten Größen in bekannten und mehrerleinamigen Zahlen übrig bleibt, ſetzt man mit dem Diviſor im Bruche darneben, und man hat den ganzen Werth des Bruchs in bekannten Zahlen. Z. B.

Wie viel ſind $\frac{3}{4}$ Thlr. in Groſchen? 18 gr.

$$\frac{3}{4} : 24 \mid 6$$
$$\underline{\quad 3 \quad}$$
$$18 \text{ gr.}$$

Denn weil 24 gr. der Werth eines Thalers ſind, ſo theilt man mit dem Nenner des Bruchs, 4, und $4 : 24 = 6$. Dieſe 6, als den Quotienten, multiplicirt man mit 3, als dem Zähler des Bruchs, und man erhält $3 . 6 = 18$ gr.

Ferner: Wieviel ſind $\frac{5}{6}$ Thaler in Groſchen? 20 gr.

$$\frac{5}{6} : 24 \mid 4 \text{ oder } \frac{5}{6} : 24 \mid 4 . 5 = 20.$$
$$\underline{\quad 5 \quad}$$
$$20 \text{ gr.}$$

Desgleichen: $\frac{5}{7}$ Thaler; was geben ſie in ihren bekannten kleinern Benennungen? 17 gr. $1\frac{5}{7}$ pf.

$$\frac{5}{7} \text{ Thlr.} = 24$$
$$\underline{\quad 5 \quad}$$
$$7 : 120 \mid 17 \text{ gr.}$$
$$1$$
$$\underline{\quad 12 \quad}$$
$$7 : 12 \mid 1\frac{5}{7} \text{ pf.}$$
$$5$$

Weil

Weil hier der Nenner 7 ſich nicht ohne Reſt in 24 dividiren läßt, ſo multiplicirt man 24.5 = 120 = dem Zähler des Bruchs, und dividiret alsdenn mit dem Nenner 7 : 120 = 17 gr. + 1. Da hier 1 übrig bleibt, ſo iſt ſolche 1 = 1 gr. Dieſer hat 12 pf. und 7 : 12 giebt 1 pf. + 5. Da nun aber die Pfennige bereits die kleinſten Benennungen des Geldes in unſern Gegenden ſind; ſo werden die 5 überbliebenen Pfennige, die ſich nicht ferner durch 7 theilen laſſen, durch 7 als Bruch ausgedrückt. Daher kommt $1\frac{5}{7}$ pf.

Was geben $\frac{8}{9}$ einer 15 ſchuhigen Ruthe an Schuhen, Zollen und Linien? 13 Schuh, 3 Zoll und $3\frac{1}{3}$ Linien.

$\frac{8}{9}$ Ruth. = 15 Schuh.

8

9 : 120 | 13 Schuh

83

10 = Zoll

9 : 30 | 3 Zoll

3

10 = Linie

3

9 : 30 | $3\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{3}$ Linie.

3

Was geben $\frac{5}{8}$ eines Mfl. in kleinern Benennungen? 13 gr. $1\frac{1}{2}$ pf.

$\frac{5}{8}$ Mfl. 21 gr. = 1 Mfl.

5

8 : 105 | 13 gr.

21

12

8 : 12 | $1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$ pf.

4

§. 80.

Aufgabe.

Den gegebenen Werth in Maß, Münze, Gewichte u. ſ. w. in bekannten und mehrerleinamigen Zahlen der kleinern Größen in einen Bruch der größern Größen zu bringen, oder einen Bruch zu reduciren.

Auflöſung.

Man hält den gegebenen Werth der kleinern Größen gegen den Werth der größern Größen, ſo giebt die gegebene Zahl der kleinern den Zähler, und der ganze Werth der kleinern im Ganzen des Größern, den Nenner.

Sind aber zugleich mehrerleinamige Zahlen vorhanden, ſo bringt man ſolche erſt unter einerlei Benennung, und alsdenn ſetzt man ſie in den Bruch. Den Bruch aber hebt man auf (§. 75. 76.).

Was ſind 18 gr. für ein Thalerbruch? $\frac{3}{4}$ Thaler.

$\frac{18}{24}$ Thlr. oder mit 6 dividirt: $\frac{3}{4}$ Thaler.

Weil 1 Thlr. aus 24 gr. beſteht; ſo giebt dieſe 24 den Nenner, und die gegebenen 18 gr. ſind der Zähler.

Was geben 12 gr. 6 pf. für einen Thalerbruch? $\frac{25}{48}$ Thaler.

Hier ſetzt man: 24 = 1 Thlr. — 12 gr. 6 pf. · 2. 6 = 12
(2/8
48   24

288 pf. = 1 Thlr.   150 pf. einerlei Benennung.

$$\frac{150}{288} \overset{6}{\Big|} \frac{25}{48} \text{ Thlr.}$$

Was

Was geben 20 gr. für einen Thalerbruch? $\frac{5}{6}$ Thlr. denn $\frac{20}{24}$ durch 4 dividirt iſt = $\frac{5}{6}$.

Endlich 17 gr. $1\frac{5}{7}$ pf. Was ſind ſolche für ein Bruch aus einem Thaler? $\frac{5}{7}$ Thlr.

24 = 1 Thlr. — 17 gr. $1\frac{5}{7}$ pf. . . 2 . 6 = 12

$-\frac{2}{6}$

48   34

288   205

7   7 + 5

2016   1440

288

$\frac{1440}{2016} \Big| \frac{5}{7}$ Rthlr.

Zweiter Abſchnitt.

Die Addition in Brüchen mit ungenannten, genannten und mehrerleinamigen Zahlen.

§. 81.

Die Summe zweier oder mehrerer Brüche, die gleiche Nenner haben oder auf einerlei Benennung ſind gebracht worden, iſt ein Bruch, deſſen Nenner der Generalnenner der Brüche, der Zähler aber der Summe der gegebenen Zähler gleich iſt. Demnach iſt die Addition der Brüche von der Addition der ganzen Zahlen nur in ſo fern verſchieden als Brüche und ganze Zahlen von einander verſchieden ſind.

§. 82.

Aufgabe.

Brüche zu addiren oder in eine Summe zu bringen.

Auflöſung.

1) Wenn die gegebenen Brüche nicht einerlei Nenner haben; ſo bringt man ſie erſt unter einerlei Benennung (§. 69 — 73.).

2) Man addirt alsdenn ihre Zähler, und in die Summe derſelben dividirt man mit dem Nenner, ſo giebt der Quotient die Ganzen, welche in den Brüchen enthalten; der Reſt aber, wenn einer vorhanden, wird darneben in Bruchform mit dem Nenner geſetzt, und wo möglich nach §. 75 und 76 aufgehoben. Sind

3) zugleich auch Ganze und mehrerleinamige Zahlen zu addiren; ſo zählt man die aus den Brüchen entſtandenen Ganzen zu den dabei ſtehenden Ganzen, und verfährt mit denſelben wie mit ganzen Zahlen.

Z. B. Man ſoll $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{7}$ in eine Summe bringen; und dieſe iſt $2\frac{57}{140}$.

Weil hier keiner von den Nennern in den andern aufgeht, ſo müſſen ſie mit einander multipliciret und unter einen Hauptnenner gebracht werden; dieſer iſt 140, nach welchem ſie unter einerlei Benennung gebracht werden, nämlich:

$$\frac{105 + 112 + 120}{140} = \frac{337}{140} = 2\frac{57}{140}$$

Oder man verfährt auf dieſe Art:

140		
$\frac{3}{4}$	35	105
$\frac{4}{5}$	28	112
$\frac{5}{7}$	20	120
		$337 : 140 = 2\frac{57}{140}$.

Ferner: Nach den letztern Forſtrechnungen iſt in dem Quartal Crucis, wie folget, berechnet worden, als: $233\frac{7}{8}$ Thlr. + $716\frac{2}{3}$ Thlr. + $897\frac{3}{4}$ Thlr. + $397\frac{5}{8}$ Thlr. + $96\frac{1}{3}$

$+ 96\frac{1}{3}$ Thlr. $+ 88\frac{3}{8}$ Thlr. Was macht die ganze Summe davon? $2430\frac{5}{8}$ Thlr.

Auf folgende Art:

$$\begin{array}{rll} & & 24 \\ 233\frac{7}{8} & \text{Thlr.} & = 21 \\ 716\frac{2}{3} & - & = 16 \\ 897\frac{3}{4} & - & = 18 \\ 397\frac{5}{8} & - & = 15 \\ 96\frac{1}{3} & - & = 8 \\ 88\frac{3}{8} & - & = 9 \\ \hline 2430\frac{5}{8} & \text{Thl.} & 87 : 24 = 3 + \frac{15}{24};\ \frac{15}{24} \text{ aber} = \frac{5}{8} \text{ thl.} \end{array}$$

Einige Aufgaben zur Uebung:

Man addire $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 2\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} = 3\frac{7}{36}$.

$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 2$. Ganze.

Der Förſter zu N. hat in ſeinem Tagebuche folgende Geldeinnahmen für Bau- und Klafterholz, als $13\frac{3}{8}$ Thlr. $+ 29\frac{5}{8}$ Thlr. $+ 9\frac{1}{3}$ Thlr. $+ 33\frac{1}{4}$ Thlr. $+ 16\frac{19}{36}$ Thlr. $+ 20\frac{5}{6}$ Thlr aufgezeichnet. Was beträgt die Summe?

Desgleichen: Man addire 7 Ellen und anderthalb Viertel; 19 Ellen und drittehalb Viertel; 13 Ellen und viertehalb Viertel, uud 10 Ellen und drey Viertel. Was beträgt dieſe Summe? $51\frac{5}{8}$ Ellen.

Dritter Abſchnitt.

Die Multiplikation der Brüche mit Brüchen, mit ganzen und mehrerleinamigen Zahlen.

§. 83.

Das Produkt eines Bruches mit einem Bruche iſt wieder ein Bruch, deſſen Zähler das Produkt der

Zähler und deſſen Nenner das Produkt der Nenner der Faktoren iſt.

Werden aber ganze Zahlen mit Brüchen, oder ganze mit gemiſchten Zahlen multiplicirt, und umgekehrt, ſo kann man dieſe in unächte Brüche verwandeln, und man erhält in jedem Falle alsdenn ein Produkt von den erwähnten Eigenſchaften.

Bei der Multiplikation eines Bruches mit einem Bruche kommt indeſſen der Fall vor, daß das Produkt kleiner iſt, als einer der Faktoren, und es ſcheint in dieſem Falle, als wenn die Multiplikation keine wirkliche Multiplikation ſey; auf eine ähnliche Art iſt das Produkt eines Bruchs mit einer ganzen oder gemiſchten Zahl ebenfalls kleiner als die ganze oder gemiſchte Zahl, aber doch größer als der Bruch, der das Multiplikandum ausdrückt. Dieſem ungeachtet bleibt dennoch die Multiplikation in Brüchen auch eine wirkliche Vermehrung. Denn z. B. einen Bruch etwa $\frac{1}{4}$mal nehmen heißt den Bruch nicht ganz, ſondern nur den vierten Theil davon nehmen. So iſt $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$mal genommen, nicht $\frac{1}{4}$, ſondern $\frac{1}{16}$, weil der vierte Theil von $\frac{1}{4}$ wirklich nur $\frac{1}{16}$ iſt; denn theilt man eine gerade Linie in 4 gleiche Theile ein, ſo hat man Viertel der ganzen Linie: ſoll man nun von einem Viertel abermal den vierten Theil, d. i. $\frac{1}{4}$ nehmen, ſo muß man jedes Viertel aufs neue in vier gleiche Theile theilen, ſo daß die ganze Linie nun 16 gleiche Theile hat, und $\frac{1}{4}$ von einem Viertel genommen, iſt daher nichts anders, als $\frac{1}{16}$ von der ganzen Linie. Und ſo muß man auch die Multiplikation in Brüchen verſtehen. Hiernach laſſen ſich auch die Fälle begreifen, wenn ein Bruch mit einer ganzen oder gemiſchten Zahl, oder umgekehrt, multiplicirt werden ſoll.

Anmerkung.

Wer in dieſen Begriffen Schwierigkeit findet, bedenke zur Erläuterung noch folgendes: Wenn man z. B. 4 mit

2 mul-

2 multiplicirt, ſo wird das Produkt 8. Multiplicirt man aber 4 mit 1, ſo iſt das Produkt 4, folglich nur halb ſo groß, als im erſten Fall. Um ſo mehr muß $4 \cdot \frac{1}{2}$ ein kleineres Produkt geben, als $4 \cdot 2$, weil $\frac{1}{2}$ nur halb ſo groß als eins iſt, und das Produkt $4 \cdot 1$ nur halb ſo groß war, als $4 \cdot 2$; demnach muß das Produkt $4 \cdot \frac{1}{2}$ nur 2 ſeyn, weil man 4 wirklich nur ein halbmal, d. i. die Hälfte nehmen ſoll und das iſt keine andere Zahl als 2. Setzt man nun $4 = \frac{4}{1}$, ſo iſt $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Daher kann man 1 als die Gränze der Multiplikatoren anſehen. Jeder Multiplikator größer als 1, giebt ein Produkt größer, als das Multiplikandum, und jeder Multiplikator kleiner als 1, alſo jeder ächte Bruch, ein Produkt kleiner als das Multiplikandum, wenn dies, wie hier vorausgeſetzt wird, eine ganze Zahl iſt. Um ſo mehr muß nun das Produkt kleiner ſeyn als einer der Faktoren, wenn beide Zahlen Brüche ſind.

Setzt man dieſe Betrachtung fort, oder ſtellt ſie bei allen vorkommenden Fällen an, ſo muß man richtige Begriffe von dieſer Art von Multiplikation erhalten.

§. 84.

Aufgabe.

Brüche mit Brüchen, oder auch Brüche mit ganzen, vermiſchten und mehrerleinamigen Zahlen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Sind Brüche mit Brüchen zu multipliciren; ſo multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Dieſe beiden Produkte geben die verlangte Zahl, welche oft noch abgekürzt ausgedrückt werden kann.

2) Sind Brüche mit Ganzen zu multipliciren, ſo multiplicire man mit dem Zähler des Bruchs die Ganzen, und ſetze unter das Produkt den Nenner. Iſt der Nenner kleiner als der Zähler, ſo dividirt man ſolchen zu Ganzen und ſchreibt den Reſt, wenn einer übrig bleibt, in Form eines Bruchs mit ſeinem Nenner neben die Ganzen.

3) Sind

3) Sind vermiſchte Zahlen mit vermiſchten Zahlen zu multipliciren, ſo bringt man ſie erſt unter die Theile ihrer Brüche, oder reducirt ſie, und multiplicirt alsdann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, und dividirt das Produkt der Zähler mit dem Produkte der Nenner. Der Quotient iſt die verlangte Zahl.

Anmerkung.

Um Zeit beim Rechnen zu erſparen, bringt man vor der Multiplikation alle mögliche Vortheile an, durch die ein Bruch abgekürzt wird, ohne daß man ſeinen Werth ändert, d. i. man hebt die Brüche auf, nach §. 75 u. 76 und nach den Regeln in der dazu gehörigen Anmerkung.

Beiſpiele.

1) Brüche mit Brüchen zu multipliciren.

Man multiplicire $\frac{2}{3}$ mit $\frac{1}{4}$, ſo kommt $\frac{1}{6}$. Denn $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (§. 75.).

Ferner: $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{40}$. Denn $3 \cdot 7 = 21$ und $5 \cdot 8 = 40$.

Auch kann man Zähler gegen Nenner in beiden Brüchen wegſtreichen, wenn ſie einerlei Größe haben, oder durch einander dividirt werden können (§. 76. Anmerkung); z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{12}$, denn $3 : 3 = 1$, und $2 : 2 = 1$, aber $24 : 2 = 12$. Demnach würde man die Brüche in dieſer Form haben $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$; demnach kann man die Zahlen, die ſich gegen einander aufheben, ausſtreichen, und nur die ſtehen laſſen, die noch multiplicirt werden müſſen. Demnach iſt das vorige Beiſpiel

$$\frac{\not{2}\;1}{\not{3}} \cdot \frac{\not{3}\;1}{\not{24}\;12} = \frac{1}{12}.$$

2) Ganze Zahlen mit Brüchen und Brüche mit ganzen Zahlen.

Man multiplicire $\frac{11}{30} \cdot 7 = \frac{77}{30} = 2\frac{17}{30}$.

Fer-

Ferner: Eine Wieſe auf dem Rammelburgiſchen Forſtrevier bringt jährlich 16 Thlr. ein; wie viel kommt auf $\frac{3}{4}$ derſelben Wieſe? 12 Thlr.

Eine andere ohnweit dem rechten Flügel bringt 13 Thaler. Nun verlangt das Dorf N. $\frac{2}{3}$ davon für ſich allein zu nutzen; was muß es geben? $8\frac{2}{3}$ Thlr.

S. verkauft einen Forſt, der mit Birken bewachſen iſt, für 25 Thlr., davon will T. der Käufer, dem C. in eben dem Preiſe, den er gehabt, wieder $\frac{1}{3}$ ablaſſen. Was hat dieſer dafür zu bezahlen? $8\frac{1}{3}$ Thlr.

3) Vermiſchte Zahlen mit ganzen, oder ganze Zahlen mit vermiſchten, oder auch vermiſchte Zahlen mit einem Bruche zu multipliciren. Z. B. Man multiplicire $13\frac{5}{8}$ Thlr. mit 7, ſo iſt

$$\begin{array}{r l} & \underline{13\frac{5}{8}\cdot 7.} \\ & 109 \\ & \underline{\quad 7} \\ 8: & 763 \,|\, 95\frac{3}{8} \text{ Thlr.} \\ & 4 \end{array}$$

Oder man multiplicire auf eine kürzere Art die ganze Zahl mit dem Bruche, als: hier ſind $\frac{5}{8}\cdot 7$, ſo kommen $\frac{35}{8}$ oder $4\frac{3}{8}$, welches alsbald in Gedanken geſchehen kann. Und dann multiplicire man die ganzen Zahlen mit den Ganzen und addire das Produkt des Bruches dazu, ſo hat man gleich die verlangte Zahl. Z. B. $\underline{13\frac{5}{8}\cdot 7}$

$$95\frac{3}{8}$$

Ferner: $12\frac{2}{3}$ Thlr. mit 18, beträgt 228 Thlr.

Ferner: C. hat auf ſeinem Revier 100 Stämme ſchlagen laſſen, um ſolche zu verſilbern. Nachdem dieſes geſchehen, findet er, daß er deren noch $194\frac{3}{4}$ mal ſo viel nöthig habe, um ſeine Schulden zu tilgen. Daher wird gefragt: Wie viel Stämme dergleichen Art ſein Holzförſter

noch

noch zu ſchlagen anweiſen müſſe, um ſeinem Herrn ein Genüge zu leiſten? 19475 Stämme, denn $194\frac{3}{4} \cdot 100$

$\overline{19475.}$

Ferner: 100 mal $2\frac{2}{3}$ Thlr., wie viel beträgt das Produkt? $266\frac{2}{3}$ Thlr. Denn

$2\frac{2}{3}$ Thlr. . 100
$\overline{8}$
$\underline{100}$
$3 : 800 | 266\frac{2}{3}$ Thlr.
222

Oder kurz: $2\frac{2}{3} \cdot 100$, denn $\frac{2}{3} \cdot 100 = 66\frac{2}{3}$
$\overline{266\frac{2}{3}}$

Auf dem herrſchaftlichen Revier zu B ſind $1\frac{3}{4}$ mal 566 Thaler eingekommen, wie groß iſt das Produkt? $990\frac{1}{2}$ Thlr. Denn

$566 \cdot 1\frac{3}{4}$
$\quad 7 \qquad 7$
$4 : 3962 | 990\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Thlr.
3

4) Eine gemiſchte Zahl mit einem Bruche oder einen Bruch mit einer gemiſchten Zahl zu multipliciren. Z. B.

Man multiplicire: $13\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$, ſo kommt $9\frac{1}{2}$.

Nämlich: $13\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$ Oder kürzer: $13\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$

$\overline{109}$ $\qquad 3 : 27\frac{1}{4}$
$\underline{\quad 2} \quad 2 \qquad \overline{9\frac{1}{12}}$
$24 : 218 | 9\frac{2}{24} | \frac{1}{12}$
2

Wie groß iſt das Produkt von $23\frac{11}{30}$ mal $\frac{7}{30}$ Thlr.? $5\frac{407}{900}$ Thlr.

Was

Was betragen $24\frac{3}{4}$ mal $\frac{3}{4}$ Thaler? $18\frac{9}{16}$ Thaler. Denn

$24\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ Oder $24\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

99 — 4 : 72

3 — $18\frac{9}{16}$

16 : 297 | $18\frac{9}{16}$

129

5) Gemiſchte Zahlen mit gemiſchten Zahlen zu multipliciren.
Z. E. $6\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3} = 30\frac{1}{3}$.

Setzet $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3}$ Oder: $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3}$

13 14 — $\frac{13}{2} \cdot \frac{14 \cdot 7}{3} = \frac{91}{3} = 30\frac{1}{3}$.

14

52

13

6 : 182 | $30\frac{1}{3}$.

Oder: $6\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{13}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{182}{6} = 30\frac{2}{6} = 30\frac{1}{3}$.

$13\frac{5}{8}$ mal $7\frac{2}{3}$ Thlr., wie viel betragen dieſe? $104\frac{11}{24}$ Thlr. Denn

$13\frac{5}{8} \cdot 7\frac{2}{3}$ Oder: $13\frac{5}{8} \cdot 7\frac{2}{3}$

109 23 — 3 : $27\frac{1}{4}$

23 — $9\frac{1}{12}$

327 — $+ 95\frac{3}{8}$

218 — $104\frac{11}{24}$

24 : 2507 | $104\frac{11}{24}$ Thlr.

1.11

Eben alſo verhält es ſich auch, wenn mehrerleinamige Zahlen mit Brüchen zu multipliciren ſind. Z. B.

8 Thlr. 16 gr. $4\frac{3}{4}$ pf. 6 mal genommen, wie groß iſt das Produkt? 52 Thlr. 2 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

Dieſe

Dieſe Aufgabe ſtehet kurz ſo:

8 Thlr. 16 gr. $4\frac{3}{4}$ pf. . 6
52 Thlr. 2 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

Hier ſagt man: $\frac{3}{4} \cdot 6 = 4\frac{1}{2}$ pf., und vier Sechspfenniger oder 6 Vierpfenniger ſind 2 gr. und 6 Sechzehngroſchenſtücken ſind 4 Thaler. Dieſe 4 Thlr. zu 6 . 8 Thlr. = 48 addirt, giebt 52 Thlr.

Ferner: Der Wildmeiſter zu D. hat an jährlichen Einkünften 456 Thlr. 20 gr. 6 pf. aufgeſchrieben; wie viel kann er auf $\frac{3}{4}$ Jahr rechnen (d. i. 456 Thlr. 20 gr. 6 pf. $\frac{3}{4}$ mal genommen)? 342 Thlr. 15 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

Setzet: 456 Thlr. 20 gr. 6 pf. . $\frac{3}{4}$
342 Thlr. 15 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

456
3
4 : 1368 | 342
1

Oder: 456 Thlr. 20 gr. 6 pf. . $\frac{3}{4}$
4 : 1370 Thlr. 13 gr. 6 pf.
2 1 2
342 Thlr. 15 gr. $4\frac{1}{2}$ pf.

Ferner: $4\frac{1}{2}$ mal 976 Thaler $18\frac{3}{4}$ Gr. Holzgeld, wie viel beträgt dies? 4395 Thlr. $12\frac{3}{8}$ gr.

Nach gemeiner Art würde dieſe Aufgabe ſo aufgelöſt:

976 Thlr. $18\frac{3}{4}$ gr. . $4\frac{1}{2}$
24 9
3922
1952
23442
4 der Nenner + 3 der Zähler.
93771
9 24
8 : 843939 | 105492 | 4395 Thlr. $12\frac{3}{8}$ gr.
713 923
211

Kür-

Kürzer aber:

$$\begin{array}{l} 976 \text{ Thlr. } 18\frac{3}{4} \text{ gr. } \,.\, 4\frac{1}{2} \\ \hline 488 \text{ Thlr. } 9\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \\ + 3907 \;—\; 3 = 4\text{fach.} \\ \hline 4395 \text{ Thlr. } 12\frac{3}{8} \text{ gr.} \end{array}$$

Vierter Abſchnitt.

Die Subtraktion der Brüche von Brüchen, ganzen oder gemiſchten Zahlen.

§. 85.

Die Differenz zweier Brüche, die gleiche Nenner haben, oder auf einerlei Benennung gebracht worden ſind, iſt ein Bruch, deſſen Nenner der Generalnenner oder der gemeinſchaftliche beider Brüche, der Zähler aber die Differenz jener Zähler iſt.

§. 86.

Aufgabe.

Brüche von Brüchen oder auch Brüche von Ganzen zu ſubtrahiren.

Auflöſung.

1) Haben die Brüche einerlei Nenner, ſo zieht man nur Zähler von Zähler ab, und ſchreibt unter den Reſt den Nenner.

2) Haben die Brüche ungleiche Nenner; ſo bringt man ſie erſt unter einerlei Benennung (§. 69.), und zieht alsdann Zähler von Zähler ab, und ſchreibt unter den Reſt den Nenner.

3) Sollen aber Brüche von Ganzen ſubtrahirt werden, ſo nimmt man bei den Ganzen Eins weg, d. i. man **borgt Eins.** Dieſe Eins hat zum Zähler ſo viele

Theile, als der Nenner des gegebenen Bruchs Theile in ſich hat. Denn wenn der Zähler eben ſo groß iſt, als der Nenner, ſo iſt der Bruch ein Ganzes (§. 62.). Von dieſer Anzahl der Zähler zieht man alsdenn das gegebene Subtrahendum ab, und ſchreibt den Reſt über den bekannten Nenner. Dieſen ſetzt man zu den gegebenen Ganzen weniger Eins, weil Eins davon ſubtrahirt worden.

4) Sind aber auch endlich noch mehretleinamige Zahlen dabei zu ſubtrahiren, ſo verfährt man mit denſelben, wie mit ganzen Zahlen (§. 47.). Z. B.

Man ſubtrahire $\frac{3}{7}$ von $\frac{5}{7}$, ſo bleibt $\frac{2}{7}$ Reſt; denn $3 - 5 = 2$.

Desgleichen $\frac{3}{4}$ von $\frac{17}{19}$, was bleibt übrig? $\frac{11}{76}$.

Hier ſetzt man ſo: $\frac{17}{19} - \frac{3}{4} = \frac{68}{76} - \frac{57}{76} = \frac{11}{76}$.

76

Oder	$\frac{17}{19}$	4	68
	$\frac{3}{4}$	19	57
			$\frac{11}{76}$ Reſt oder Differenz.

Ferner: Wenn von $\frac{4}{5}$ Thlr. $\frac{2}{3}$ Thlr. weggenommen werden; was bleibt übrig? $\frac{2}{15}$ Thlr.

Ferner: S. hat $\frac{3}{4}$ Thlr., von dieſen verzehrt er $\frac{5}{9}$ Thaler; was hat er noch baar? $\frac{7}{39}$ Thlr.

Ferner: Wenn von $\frac{9}{10}$ einer Summe $\frac{11}{16}$ hinweg kommen; wie viel Antheil von der Summe bleibt Reſt? $\frac{17}{80}$ der Summe.

Ferner: Wenn von 8 Thalern $\frac{3}{8}$ Thlr. ſubtrahirt werden; was bleibt? $7\frac{5}{8}$ Thlr.

$$8 - \frac{3}{8} = 7 + \frac{5}{8}.$$

Hier wird von 8 Eins weggenommen. Dieſe Eins ſind $\frac{8}{8}$. Und daher ſagt man: $\frac{3}{8}$ von $\frac{8}{8}$ bleiben $\frac{5}{8}$, und weil Eins von 8 hinweggekommen; ſo iſt aus $8 - 1 = 7$ worden.

Oder:

Oder: (Hauptnenner 8)

$\frac{8}{1}$	8	64
$\frac{3}{8}$	1	3
		61

$\frac{61}{8} = 7\frac{5}{8}$

Ferner: Es ſind $654\frac{2}{3}$ Thaler in der Caſſe, davon ſollen $456\frac{1}{2}$ Thaler ausgezahlet werden; was wird noch in Caſſe bleiben? $198\frac{1}{6}$ Thlr.

(Hauptnenner 6)

$654\frac{2}{3}$	2	4
$456\frac{1}{2}$	3	3
$198\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$

Abgekürzt: (Hauptnenner 6)

$6.5.4\frac{2}{3}$	4
— $4\;5\;6\frac{1}{2}$	3
$1\;9\;8\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ferner: Wenn von $12\frac{3}{8}$ Thalern baar $8\frac{2}{3}$ Thlr. weggegeben werden; was bleibt Reſt? $3\frac{17}{24}$ Thlr.

(Hauptnenner 24)

$12.\frac{3}{8}$	9
$8\;\frac{2}{3}$	16
$3\frac{17}{24}$	$\frac{17}{24}$

Oder: (Hauptnenner 24)

		24 }
$12.\frac{3}{8}$	3	9 }
$8\;\frac{2}{3}$	8	16
$3\frac{17}{24}$		$\frac{17}{24}$

Anmerkung.

Weil $\frac{2}{3} = 16$ von $\frac{3}{8} = 9$ nicht können ſubtrahiret werden, ſo wird bey der 12 Eins weggenommen. Dieſes gilt nach dem Hauptnenner 24, und alsdann ſubtrahirt man, wie in ganzen und benannten Zahlen.

Ferner: Es ſind in Caſſe 384 Thlr. $9\frac{2}{3}$ pf. Davon ſind ausgegeben worden 195 Thlr. 13 gr. $8\frac{3}{4}$ pf. Was iſt noch übrig? 188 Thlr. 11 gr. $\frac{11}{12}$ pf.

Fünfter Abſchnitt.

Die Diviſion in Brüchen, mit Brüchen, gemiſchten und mehrerleinamigen Zahlen.

§. 87.

Der Quotient eines Bruches durch einen Bruch iſt entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch oder eine gemiſchte Zahl. Man erhält den Quotienten aber als eine ganze Zahl, wenn die gegebenen Brüche gleiche Nenner haben, und des Diviſors Zähler in des Dividendi Zähler aufgeht. Verſchieden kann auch der Quotient ſeyn, wenn man eine ganze oder gemiſchte Zahl durch einen Bruch dividiret. In jedem Falle aber zeigt er auch hier an, wie vielmal der Diviſor im Dividend enthalten iſt.

Da nun die Diviſion der Multiplikation entgegengeſetzt iſt, ſo werden auch bei der Diviſion die Fälle, aber in entgegengeſetzter Art eintreten, wie bei der Multiplikation (§. 83.).

Dividirt man daher einen Bruch durch einen andern, ſo kann der Fall eintreten, daß der Quotient größer wird, als das Dividendum; auf eine ähnliche Art auch, wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt wird. Denn man denke ſich die Sache ſo, wie bei der Multiplikation, ſo laſſen ſich dieſe Fälle ſehr leicht rechtfertigen. So iſt $\frac{2}{5}$ in $\frac{12}{17}$, $\frac{30}{17}$ oder $1\frac{13}{17}$ mal enthalten.

Anmer-

Anmerkung.

Wäre das Dividendum 8, der Diviſor aber 2, ſo wäre der Quotient = 4; wird hingegen 8 durch 1 dividirt, ſo iſt der Quotient = 8. Da nun der Quotient (§. 52.) doppelt ſo groß wird, wenn der Diviſor zweimal kleiner iſt, ſo muß nothwendig der Quotient von 8 : $\frac{1}{2}$ größer als 8, folglich 16 ſeyn, denn die Hälfte von 1 iſt wirklich in 8 zweimal öftrer enthalten, als 1 ſelbſt. Wendet man dies gehörig auf die vorkommenden Fälle an, ſo wird ſich der Quotient immer aus dem Begriffe der Diviſion beurtheilen und folglich auch mit Gewißheit beſtimmen laſſen.

Daß übrigens Quotienten auch durch Multiplikation erhalten werden, folgt aus §. 64. Auch kann man die Diviſion der Brüche durch Linien erläutern.

§. 88.

Aufgabe.

Einen Bruch durch einen andern Bruch, oder einen Bruch durch eine ganze Zahl, und eine ganze Zahl durch einen Bruch, desgleichen auch eine mehrerleinamige Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

Auflöſung.

1) Sind Brüche mit Brüchen zu dividiren, die gleiche Nenner haben, ſo dividirt man mit dem Zähler des Diviſors in den Zähler des Dividenden, und wofern ein Reſt bleibt, ſo ſetzt man dieſen in Bruch, und der Reſt wird der Zähler, der Zähler des Diviſors aber der Nenner des neuen Bruchs.

2) Sind Brüche von verſchiedenen Nennern zu dividiren; ſo kehrt man den Diviſor um, ſo, daß der Zähler an die Stelle des Nenners, und der Nenner an die Stelle des Zählers geſetzet wird, und multiplicirt beide mit einander, wie in der Lehre der Multiplikation mit ganzen Zah-

 len

len (§. 42 und 43.) gezeigt worden; ſo giebt das Produkt den verlangten Quotienten.

Da dieſe Regel **allgemein** iſt, und die übrigen nur auf beſtimmte Fälle paſſen, ſo kann man ſie als die **Hauptregel** für die Diviſion der Brüche betrachten.

3) Sind aber ganze Zahlen ſtatt des Diviſors vorhanden, mit welchen die Brüche ſollen dividirt werden; ſo multiplicirt man allein in den Nenner, und ſetzt den Zähler unverändert über das Factum.

Beiſpiele zu den verſchiedenen Fällen:

1) Einen Bruch in einen Bruch zu dividiren, wenn beide **gleiche** Nenner haben. Z. B. man dividire $\frac{27}{32}$ in $\frac{3}{32}$; was iſt der **Quotient**? 9 Ganze.

$$\frac{3}{32} : \frac{27}{32} = 9 \text{ mal; denn } 3 . 9 = 27$$

$$\text{oder } \frac{3}{32} : \frac{27}{32} = \frac{3 : 27}{32} = 9.$$

$$\text{Ferner: } \frac{7}{30} : \frac{19}{30} = 2\frac{5}{7}; \text{ denn } 7 : \frac{19}{5} \,|= 2 + \frac{5}{7}$$

$\frac{3}{8}$ Rthlr. in $\frac{5}{8}$ Rthlr. | wievielmal iſt dies möglich? $1\frac{2}{3}$ mal.

2) Brüche mit Brüchen von verſchiedenen Nennern zu dividiren.

Anmerkung.

Bei dieſen und allen folgenden Aufgaben kann man ſich auch der Vortheile bedienen, davon bereits (§ 75 und in der Anmerkung) Erwähnung geſchehen, ſo bald der Diviſor umgekehrt geſetzt worden. Z. B.

Man

Man dividire $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$, und der Quotient iſt $= 1\frac{1}{8}$.

Denn $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Ferner: Dividirt man $\frac{7}{30}$ in $\frac{77}{900}$, ſo kommt $\frac{11}{30}$.

$$\frac{30}{7} : \frac{77}{900}\ \frac{11}{30} = \frac{11}{30}.$$

$\frac{3}{4}$ Rthlr. in $\frac{9}{14}$ Rthlr. wievielmal findet man dieſe? $\frac{6}{7}$ mal.

Denn $\frac{3}{4} : \frac{9}{14}$ umgekehrt: $\frac{42}{3} \cdot \frac{9 \cdot 3}{14 \cdot 7} = \frac{6}{7}$.

Wenn $6\frac{5}{8}$ Rthlr. durch $\frac{3}{4}$ dividirt wird, wie groß iſt der Quotient? $8\frac{5}{6}$ Rthlr.

Denn $\frac{4}{3} \cdot \frac{53}{8 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 3}{6} = 8\frac{5}{6}$ Thaler.

Ferner theilet man $\frac{2}{3}$ in $\frac{5}{6}$, und man erhält $1\frac{1}{4}$.

Denn $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{62} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

3) Eine ganze oder auch gemiſchte Zahl durch einen Bruch zu dividiren. Z. B. 19 Thlr. durch $\frac{7}{30}$, ſo hat man $81\frac{3}{7}$ Thlr.

Denn $\frac{30}{7} \cdot \frac{19}{1} = \frac{570}{7} = 81\frac{3}{7}$.

Ferner: Wenn $9\frac{1}{12}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt wird, ſo erhält man $13\frac{5}{8}$ Thlr.

Denn $\frac{2}{3} : 9\frac{1}{12} = \frac{2}{3} : \frac{109}{12} = \frac{3}{2} \cdot \frac{109}{124} = \frac{109}{8} = 13\frac{5}{8}$.

Ferner: $\frac{3}{4}$ von 25 Thaler wieviel betragen dieſe? $33\frac{1}{3}$ Thaler.

Wieviel mal iſt $\frac{1}{24}$ in $16\frac{3}{4}$ enthalten? 402 mal.

Wie oft hat man $\frac{1}{3}$ in 24? 72 mal.

4) Brüche mit ganzen Zahlen und ganze Zahlen mit Brüchen zu dividiren: Z. B. Man theile $\frac{19}{30}$ in 6 Theile. Der Quotient iſt $\frac{19}{180}$.

$$6 : \frac{19}{30} = \frac{19}{180}.$$

Hier wird mit den Ganzen nur der Nenner des Bruchs multipliciret, und der Zähler bleibt unverändert.

Desgleichen: man theile $\frac{3}{8}$ einer Heide in 5 Theile; was kommt auf einen Theil? $\frac{3}{40}$.

Ein Drittel von einem Viertel Tannenſaamen, wieviel beträgt es in Scheffeln? $\frac{1}{12}$ Scheffel. Denn $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$.

Desgleichen: Ein Förſter ſoll von $\frac{6}{7}$ ſeiner Einkünfte den dritten Theil abgeben; wie groß iſt dieſer? $\frac{2}{7}$.

$$\frac{1}{3} : \frac{6 \cdot 2}{7} = \frac{2}{7}.$$

Ferner: $\frac{36}{55}$ in 9. Was kommt? $\frac{4}{55}$.

5) Eine gemiſchte durch eine ganze Zahl zu dividiren. Z. B. Man theile $741\frac{6}{7}$ Thlr. in 3 Theile; was kommt? $247\frac{2}{7}$ Thaler.

$$3 : 741\frac{6}{7}$$
$$12$$

$247\frac{2}{7}$ Thaler.

Wenn $4\frac{3}{4}$ Rthlr. in 7 gleiche Theile getheilt werden, wieviel beträgt ein ſolcher Theil? $\frac{5}{8}$ Rthlr.

Denn $7 : 4\frac{3}{8} = 7 : \frac{35}{8} = \frac{7}{1} : \frac{35}{8} = \frac{7}{1} : \frac{35}{8} = \frac{5}{8}$.

Des-

Desgleichen wenn für 9 Stämme Holz $7\frac{2}{3}$ Thlr. bezahlt werden; was wird für Einen gezahlet? d. i. $\frac{1}{9}$ von $7\frac{2}{3}$ Rthlr. iſt $\frac{23}{27}$ Rthlr.

Wieviel beträgt der 136 Theil von $249\frac{1}{3}$ Rthlr.? $1\frac{5}{6}$ Rthlr.

Denn $136 : 249\frac{1}{3} = \frac{1}{136} \cdot \frac{748}{3} = \frac{748}{408} = 1\frac{340}{408}$

oder, wenn man $\frac{340}{408} \Big| \frac{5}{6}$ (68), alſo $1\frac{5}{6}$.

Wieviel beträgt die Hälſte von $27\frac{1}{9}$ Rthlr. d. i. $\frac{1}{2} : 27\frac{1}{4}$ iſt $13\frac{5}{8}$ Rthlr.

Denn $\frac{1}{2} : 27\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{109}{4} = \frac{109}{8} = 13\frac{5}{8}$.

Ferner: Wenn 9 Perſonen ſich in $635\frac{2}{3}$ Mfl. theilen ſollen; wie groß iſt der neunte Theil? $70\frac{17}{27}$ Mfl.

Denn $9 : 635\frac{2}{3} = \frac{9}{1} : \frac{1907}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1907}{3} = \frac{1907}{27}$ $= 70\frac{17}{27}$.

Endlich: Acht Perſonen theilen ſich in $2620\frac{44}{45}$ Thaler; was kommt auf jede Perſon? $327\frac{28}{45}$ Mfl.

```
  8   :   2620 44/45
 45       ----------
----      13144
 360      10480
          ----------
 360  :   117944 | 327 224/360 | 28/45 Mfl.
           972                (8)
            22
```

§. 89.

Ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner, beide für ſich betrachtet, ſchon Brüche ſind, nennt man einen gebrochenen Bruch; oder man kann überhaupt Brüche dieſer Art Brüche aus Brüchen nennen. So iſt $\frac{5}{8}$ aus $\frac{3}{7}$ ein Bruch aus einem Bruche, oder ein gebrochener

Bruch, und wird entweder ſo $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ oder $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$ geſchrieben. Haben dergleichen 1 zum Zähler, oder ſind dieſe gleich, ſo kann man ſie auch mit drei Zahlzeichen ſchreiben; z. B. $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2}$, ſo $\frac{\frac{1}{2}}{4}$.

§. 90.

Ein gebrochener Bruch $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}}$ iſt mit dem Quotienten $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ einerlei.

Denn $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{3} : \frac{8}{7}$, und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ iſt auch $= \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{3} : \frac{8}{7}$ (§. 88.); alſo auch $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$.

§. 91.

Aufgabe.

Brüche aus Brüchen in einfache Brüche zu verwandeln.

Auflöſung.

1) Multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, ſo giebt das erſte Produkt den Zähler, das andere aber den Nenner des einfachen Bruchs. Kann man überdies den Bruch aufheben, ſo erhält man den einfachen Bruch durch kleine Zahlzeichen ausgedrückt. So iſt z. B. $\frac{1}{4}$ aus $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$ aus $\frac{3}{7} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$. Eben ſo $\frac{1}{3}$ aus $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. So auch $\frac{3}{5}$ aus $\frac{5}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

2) Geht bei dergleichen Brüchen der Zähler des einen im Nenner des andern auf, ſo kann man dividiren, und man erhält den einfachen Bruch in kleinen Zahlen.

Z. B.

Z. B. $\frac{3}{5}$ aus $\frac{5}{6} = \frac{3\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; oder $\frac{7}{9}$ aus $\frac{3}{4}$ $= \frac{7\cdot\cancel{3}}{3\,\cancel{9}\cdot 4} = \frac{7}{12}$.

Ein anderes Beiſpiel.

Ein gewiſſer Gutsbeſitzer hat an einem Walde $\frac{7}{20}$ zu ſäen Antheil. Dieſer tritt einem Andern von ſeinem Antheile $\frac{45}{56}$ ab; und dieſer einem Dritten von dem ſeinigen $\frac{80}{81}$; der Dritte dem Vierten von dem ſeinigen $\frac{13}{22}$; und der Vierte überläßt endlich noch einem Fünften $\frac{24}{25}$ von ſeinem Antheile; die Frage iſt nun, was für einen Antheil der Erſte noch an dem ganzen Walde habe, damit ihm derſelbe könne ausgemeſſen und zugetheilet werden? Man findet $\frac{26}{165}$.

Man multiplicire auch hier alle Zähler und alle Nenner; ſo erhält man im erſten Produkte den Zähler, im andern aber den Nenner des einfachen Bruchs; nämlich: $\frac{7}{20}\cdot\frac{45}{56}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{13}{22}\cdot\frac{24}{25} = \frac{7862400}{49896000}$. Werden nun Zähler und Nenner mit 302400, als dem gemeinen Maße dividirt, ſo erhält man $= \frac{26}{165}$.

Fünf-

Fünftes Kapitel.

Von den Decimaleintheilungen überhaupt und den Decimalbrüchen insbeſondere.

Erſter Abſchnitt.

Die Decimaleintheilungen.

§. 92.

Alle Meßgeſchäfte, wovon in der praktiſchen Mathematik gehandelt und in Geſchäften Gebrauch gemacht wird, gründen ſich auf eine angenommene Größe, die das Maß genannt wird, von welchem man einen anſchaulichen Begriff mit der Vorausſetzung haben muß, daß das Maß und die zu meſſende Größe von einerlei Art ſind. So mißt man z. B. Linien mit Linien, Flächen mit Flächen, Körper mit Körper, Gewichte durch Gewichte. Auf eine ähnliche Art beſtimmt man den Werth der Metalle oder des Geldes durch Münzen, und jede Art derſelben durch eine Münze, die man als Maß oder als die Einheit annimmt. Alle Zahlenwerthe werden durch eine Größe dieſer Art, d. i. durch die Einheit oder durch Eins ausgedrückt und gemeſſen.

Da nun die verſchiedenen Arten von Größen, deren Werth man angeben und durch Zahlen ausdrücken kann, oder die man meſſen ſoll, von ſo verſchiedener Größe vor-

kommen,

kommen, als ſie theils die Natur darbietet, theils die Ausübung bedarf; ſo hat man auch das Maß für eine jede Art, der Größe nach eingerichtet. Daher mißt man Entfernungen verſchiedener Oerter von einander durch Meilen, kleinere Diſtanzen durch Ruthen, noch kleinere durch Fuße oder Schuhe ꝛc. Größere Geldſummen werden durch Thaler, kleinere durch Groſchen, noch kleinere durch Pfennige ausgedrückt oder gemeſſen.

Um nun in einem Maße, für jede Art von Größen, größere und kleinere Theile, die wiederum als Einheiten oder Maße gebraucht werden können, zu haben, hat man das für die Einheit allgemein angenommene Maß, entweder in eine gewiſſe Anzahl kleinerer Theile getheilt, oder man hat dieſe Einheit mehreremale genommen, ſo daß man im erſten Falle Maße für kleinere, im letzten aber Maße für größere Größen erhalten hat.

So iſt z. B. zur Beſtimmung der Länge oder Entfernung eines Gegenſtandes vom andern eine gewiſſe Länge, die man Fuß oder Schuh nennt, zum Maße angenommen worden; Ruthen enthalten einen Fuß eine gewiſſe Menge mal, ſo wie Meilen wiederum die Ruthe. Auf eben die Art iſt ein Zoll ein gewiſſer Theil vom Fuße ꝛc. Iſt der Thaler die Einheit zur Beſtimmung von Geldſummen, ſo iſt ein gewiſſer Theil eines Thalers, nämlich ein Groſchen das Maß zur genauen Beſtimmung des Werthes kleinerer Summen. Und ſo verhält es ſich bei Gewichten, bei den Flächen- und Körpermaßen, die letztern mögen nun feſte oder flüſſige Körper betreffen, oder unter dieſer oder einer andern Geſtalt vorkommen.

Unter den Eintheilungen der erwähnten und andern in Geſchäften und Künſten vorkommenden Maße, iſt eine beim Längen- und Höhenmaße dem Meßkünſtler vorzüglich merkwürdig, nämlich die zehntheilige oder die Decimaleintheilung. Dieſe Eintheilung

lung beruht auf einerlei Geſetzen mit unſerm Zahlenſyſteme, der Dekadik, und gewährt daher den Vortheil einer leichten und zeiterſparenden Reduktion, oder Verwandlung der Maße von kleinern Namen oder niedrigern Werthen, in Maße von größern Namen oder höhern Werthen, und ſo auch umgekehrt, indem die Reduktionszahl in beiden Fällen zehn, oder ein Produkt von zehn in zehn iſt, und vermittelſt welcher man jede Zahl leicht und kurz multipliciren und dividiren kann (§. 41 und 55 — 58.). Ein Maß ſo eingetheilt, nennt man daher auch ein Decimalmaß.

§. 93.

Nach dieſer Eintheilung betrachtet man die Ruthe als das Ganze, und die von ihr abhängenden kleinern Längen- und Höhenmaße als Theile, und es enthält demnach eine Ruthe 10 Fuß, ein Fuß 10 Zolle, ein Zoll 10 Linien, eine Linie 10 Skrupel. Wenn es die Umſtände erfordern, ſo kann man den Skrupel (ein ſchon ſehr kleines Längenmaß) abermals in gleiche 10 Theile, jeden dieſer Theile aufs neue in 10 andere theilen, und ſo kann man überhaupt die Theilung ſo weit fortſetzen, als es nöthig iſt. Um die Namen dieſer Maße zu ſparen, hat man folgende Zeichen eingeführt: Ruthe wird mit Null (°), Fuß mit einem Strich (^{I}), Zoll mit zwei (^{II}), Linien mit drei Strichen (^{III}), Skrupel aber mit (^{IV}) bezeichnet. Die folgenden kleinern Theile ſind Zehntheile vom Skrupel und werden mit (^{V}) bezeichnet ꝛc. Demnach hieße die Zahl $45^{\circ}\,7^{I}\,8^{II}\,5^{III}\,3^{IV}$, 45 Ruthen, 7 Fuß oder Schuhe, 8 Zoll, 5 Linien und 3 Skrupel. Demnach iſt der Fuß der 10te, der Zoll der 100ſte, die Linie der 1000ſte, der Skrupel der 10000ſte, der zehnte Theil eines Skrupels aber der 100000ſte Theil einer Ruthe. Auch kann man Decimallängenruthe mit R, Fuß mit F, Zoll mit Z, Linie mit L, und Skrupel mit S bezeichnen.

Anmer-

Anmerkung.

An manchen Oertern trift man die Eintheilung des zehntheiligen Längenmaßes unter folgenden Namen an: die Werkleute theilen die Ruthe $(^{\circ})$ in 10 Schuhe (Fuße) $(^{I})$, den Schuh in 10 Zolle $(^{II})$, den Zoll in 10 Grane oder Gewerke $(^{III})$, (die Länge eines Gerſtenkorns) den Gran in 10 Linien oder Haarbreiten $(^{IV})$, die Haarbreite in 10 Skrupel $(^{V})$; demnach iſt nach dieſer Eintheilung der Schuh der 10te, der Zoll der 100ſte, der Gran der 1000ſte, die Linie der 10000ſte, der Skrupel aber der 100000ſte Theil einer Ruthe.

§. 94.

Die Größe aller Flächen wird durch ein Maß ausgedrückt, welches ſelbſt eine Fläche iſt, oder ſich auf eine Fläche, nämlich auf ein Quadrat gründet, daher man auch dieſes Maß das Flächen- und im beſondern Sinne, das Quadratmaß nennt. Man hat das Quadrat zur Grundlage dieſes Maßes unter andern um deswillen gelegt, weil die Ausdehnung deſſelben nach Länge und Breite gleich iſt. Ungeachtet man mit dem Quadratmaße nicht unmittelbar mißt, ſo wird doch alles bei der Beſtimmung der Größe der Flächen, durch Rechnung auf dieſes Maß zurückgeführt. Theilt man nun die Seite eines Quadrats von einer Ruthe in 10 gleiche Theile, und eben ſo auch die Breite deſſelben, welche der Länge gleich iſt: ſo erhält man, nach gezogenen Theilungslinien 100 Quadrate, wovon jedes ein Quadratfuß heißt. Wird der Quadratfuß auf eine ähnliche Art eingetheilt, ſo erhält man 100 Quadratzoll, und ſo fort, auf den Quadratzoll 100 Quadratlinien, auf eine Quadratlinie 100 Quadratſkrupel ꝛc. Bleiben die Zeichen die vorigen (§. 93.), ſo darf man nur jedem dieſer Zeichen ein $^{\square}$, beifügen, und man lieſt die Zahl $12^{\square 0}\ 46^{\square I}\ 17^{\square II}\ 26^{\square III}\ 18^{\square IV}$, 12 Quadratruthen, 46 Quadratfuß, 17 Quadratzoll, 26 Quadratlinien, 18 Quadratſkrupel.

Legt man die letztere in §. 93. angegebene Bezeichnungsart zum Grunde, ſo darf man nur jedem Buchſtaben ein ^{q}, oder das Zahlzeichen 2 oben anhängen, und R^q oder R^2 heißt Decimal-Quadratruthe, F^q oder F^2 Quadratfuß, Z^q oder Z^2 Quadratzoll, L^q oder L^2 Quadratlinie, und S^q oder S^2 Quadratſkrupel. Es gehen demnach 100 Quadratfuß auf 1 Quadratruthe, oder 10000 Quadratzoll, oder 1000000 Quadratlinien, oder 100000000 Quadratſkrupel. Die übrigen, etwa noch nöthigen kleinern Eintheilungen wird man von ſelbſt finden.

§. 95.

Die Körper werden zwar nach ihrer Länge, Breite und Höhe (Dicke oder Tiefe) mit dem Längenmaße wie die Längen ſelbſt gemeſſen, aber in einem Maße berechnet, in welchem auch ihr Inhalt oder ihre körperliche Größe angegeben wird, welches ſelbſt ein Körper iſt, oder ſich auf einen Körper, nämlich auf einen Kubus oder Würfel gründet, daher man auch dieſes Maß das körperliche und im beſondern Sinne, das Kubikmaß nennt. Da der Würfel unter allen Körpern am meiſten bekannt und regulär iſt, indem er gleiche Länge und Breite in der Grundfläche und eine eben ſo große Höhe hat, ſo paßte derſelbe am ſchicklichſten zum Maßkörper. Theilt man die Seite eines Würfels von einer Ruthe in der Länge, in 10 gleiche Theile, und auf eben die Art auch die Breite, ſo hat man 100 Quadratfuße in der Grundfläche; wird nun die Höhe, die ebenfalls der Länge einer Ruthe gleicht, auch in 10 Theile getheilt, ſo erhält man in einem ſolchen Würfel 1000 Kubikfuße. Jeder Kubikfuß hat nach dieſer Eintheilung 1000 Kubikzolle; jeder Kubikzoll 1000 Kubiklinien; jede Kubiklinie aber 1000 Kubikſkrupel. Bleiben die Zeichen, wie ſie §. 93. angegeben ſind für die Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. ſo darf man nur dies Beiwort Kubikmaß durch ein ^{c} dazuſetzen, oder

jedes Zeichen mit einem kleinen Würfel verſehen. Man lieſt demnach 126^{co} 427^{cI} 304^{cII} 219^{cIII} 209^{cIV}, 126 Kubikruthen, 427 Kubikfuß, 304 Kubikzoll, 219 Kubiklinien, 209 Kubikſkrupel. Legt man die am Ende §. 93. angeführte Bezeichnungsart, nämlich R, F ꝛc zum Grunde, ſo fügt man jedem Buchſtaben oben ein ^{c} oder das Zahlzeichen ^{3} bei, nämlich R^{q} oder R^{3} Kubikruthe, F^{c} oder F^{3} Kubikfuß, Z^{c} oder Z^{3} Kubikzoll, L^{c} oder L^{3} Kubiklinie, S^{c} oder S^{3} Kubikſkrupel. Es gehen demnach 1000 Kubikfuß auf 1 Kubikruthe, oder 1000000 Kubikzoll, oder 1000000000 Kubiklinien, oder 1000000000000 Kubikſkrupel.

§. 96.

Aufgabe.

Eine Menge Skrupel in Ruthen u. ſ. w. auszudrücken, ſie mögen nun im Decimal Längen- oder Quadrat- oder Kubikmaße gegeben ſeyn, d. i. Maße mit kleinern, auf Maße mit größern Namen zu bringen.

Auflöſung.

Man dividire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl. Hierbei ſind folgende Fälle zu merken:

1) Decimal- Längenmaße. Die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 10.

Wieviel betragen z. B. 582013 Skrupel in Ruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $58^{0}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; denn 582013 Skrupel : $10 = 58^{0}\ 2013^{IV}$; $2013^{IV} : 10 = 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; $0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV} : 10 = 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; $1^{III}3^{IV} : 10 = 1^{III}3^{IV}$; folglich $58^{0}2^{I}1^{III}3^{IV}$. Statt aller Diviſionen hat man hier nur nöthig, jeder Zahl das ihr zukommende Zeichen zu geben. So ſetzt man

gleich ſtatt 582013 Skrupel, weil unter 0 3 Reſt bleibt und 1 nicht dividirt, $58^{\circ}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$.

2) Decimalquadratmaß. Die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 100. Wieviel betragen z. B. 1219081436 Quadratſkrupel, in Quadratruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $12R^{q}\ 19F^{q}\ 8Z^{q}\ 14L^{q}\ 36S^{q}$. Denn hier darf man nur von der Rechten zur Linken immer zwei Zahlzeichen für den kleinern und ſo ſort für darauf folgende größere Namen abſchneiden, und das dazu gehörige Zeichen beiſetzen.

3) Decimalkubikmaß. Bei dieſem iſt die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen 1000. Wieviel betragen z. B. 9216103046145 Kubikſkrupel, in Kubikruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $9R^{c}\ 216F^{c}\ 103Z^{c}\ 46L^{c}\ 145S^{c}$; denn wenn man hier von der Rechten zur Linken immer drei Zahlzeichen für den kleinern und ſofort für den darauf folgenden größern Namen abſchneidet, ſo iſt es eben ſo viel als wenn man mit 1000 dividirt hätte.

§. 97.

Aufgabe.

Eine Menge Ruthen, Fuße ꝛc. in Skrupeln auszudrücken, ſie mögen nun im Decimal- Längen- oder Quadrat- oder Kubikmaße gegeben ſeyn, d. i. Maße mit größern, auf Maße mit kleinern Namen zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl.

Auch

Auch hier ergeben ſich folgende Fälle:

1) Decimallängenmaß. Die Reduktionszahl oder der Multiplikator zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 10.

Wieviel betragen z. B. $58^{\circ}\ 2^{I}\ 1^{II}\ 3^{IV}$, in Skrupeln? 582013 Skrupel. Multiplicirt man wirklich, ſo iſt die Rechnung dieſe:

$$\begin{array}{l} 58^{\circ} \\ \underline{\quad 10^{I} = 1^{\circ}} \\ 582^{I} \\ \underline{\quad\quad 10^{II} = 1^{I}} \\ 5820^{II} \\ \underline{\quad\quad 10^{III} = 1^{II}} \\ 58201^{III} \\ \underline{\quad\quad\quad 10^{IV} = 1^{III}} \\ 582013 \text{ Skrupel.} \end{array}$$

Statt des Multiplicirens darf man nur alle Zeichen, bis auf das niedrigſte weglaſſen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt $58^{\circ}\ 2^{I}\ 1^{III}\ 3^{IV} = 582013$ Skrupel, wobei man Acht haben muß, ob Zahlzeichen von irgend einem Werthe fehlen, die dann durch Nullen erſetzt werden, wie dies der Fall im gegenwärtigen Beiſpiel mit den Zollen iſt.

2) Decimalquadratmaß. Die Reduktionszahl zweier unmittelbar auf einander folgenden Maßabtheilungen iſt 100.

Wieviel betragen z. B. $12R^{q}\ 19F^{q}\ 8Z^{q}\ 14L^{q}\ 36S^{q}$, in Skrupel? $1219081436S^{q}$. Multiplicirt man wirklich, ſo iſt die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{l} 12\ R^q \\ \underline{\quad 100^{I} = 1^{0}} \\ 1219\ F^q \\ \underline{\quad\quad 100^{II} = 1'} \\ 121908\ Z^q \\ \underline{\quad\quad\quad 100^{III} = 1''} \\ 12190814\ L^q \\ \underline{\quad\quad\quad\quad 100^{IV} = 1'''} \\ 1219081436 \text{ Quadratſkrupel.} \end{array}$$

Statt des Multiplicirens darf man auch hier nur alle Zeichen bis auf das niedrigſte weglaſſen, und die leeren Stellen, wie hier z. B. bei den Zollen mit Null ausfüllen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt die Zahl z. B. $12\ R^q\ 19\ F^q\ 8\ Z^q\ 14\ L^q\ 36\ S^q = 1219081436\ S^q$.

3) Decimalkubikmaß.

Die Reduktionszahl zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 1000.

Wieviel betragen z. B. $9\ R^c\ 216\ F^c\ 103\ Z^c\ 46\ L^c\ 145\ S^c$ in Skrupeln? $9216103046145\ S^c$. Die Rechnung wird auf dieſe Art wirklich verrichtet:

$$\begin{array}{l} 9\ R^c \\ \underline{1000^{I} = 1^{0}} \\ 9216\ F^c \\ \underline{\quad\quad 1000^{II} = 1'} \\ 9216103\ Z^c \\ \underline{\quad\quad\quad 1000^{III} = 1''} \\ 9216103046\ L^c \\ \underline{\quad\quad\quad\quad 1000^{IV} = 1'''} \\ 9216103046145 \text{ Kubikſkrupel.} \end{array}$$

Statt des Multiplicirens darf man auch bei dieſem Maße nur alle Zeichen bis auf das niedrigſte weglaſſen und

und die leeren Stellen mit Null füllen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt die Zahl z. B. 9 R^c 216 F^c 103 Z^c 46 L^c 145 S^c = 9216103046145 S^c.

Anmerkung.

Andere Maßeintheilungen und davon abhängende Reduktionen kommen in der Folge vor.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche.

§. 98.

Denkt man ſich bei der im erſten Abſchnitte erwähnten Decimaleintheilung des Längenmaßes die Ruthe als das Ganze, aber in 10 oder 100 oder 1000 ꝛc. gleiche Theile getheilt, ſo erhält man Fuße, Zolle, Linien ꝛc. als Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 ꝛc. Auf eine ähnliche Art iſt bei dem Decimalquadratmaße, wenn die Ruthe das Ganze iſt, der Fuß, Zoll, Linie ꝛc. ein Bruch mit dem Nenner 100, 10000, 1000000 ꝛc. ſo wie bei dem Decimalkubikmaße, die Fuße, Zolle, Linien ꝛc. Brüche ſind mit den Nennern 1000, 1000000, 1000000000 ꝛc. mit der Vorausſetzung, daß die Ruthe das Ganze oder die Einheit ausdrückt.

Brüche dieſer Art, oder bei welchen die Einheit entweder in 10, oder in 100, oder in 1000 ꝛc. gleiche Theile getheilt iſt, und außer dieſer keine andere Eintheilung vorkommt, nennt man (aus eben dem Grunde, wie die Maße §. 92.) zehntheilige, oder Decimalbrüche. Dieſe Brüche haben demnach keine andern Nenner als zehn, oder Produkte von zehn in zehn. Da nun 10 = 1 . 10; 100 = 1 . 100 u. ſ. w., ſo iſt der Nenner jedesmal Eins oder 1 mit einer oder mehrern Nullen (§. 41.) So ſind

 ſol-

folgende Brüche Decimalbrüche, z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{425}{100}$, $\frac{2645}{10}$ u. ſ. w. Weil aber die letztern beiden unächte Brüche ſind, ſo iſt noch eine Diviſion mit den Nennern möglich, und nach der Diviſion erhält der Zähler des ächten Bruchs ſo viel Zahlzeichen, als der Nenner Nullen hat, nämlich $\frac{425}{100} = 4 + \frac{25}{100}$; $\frac{2645}{10} = 264 + \frac{5}{10}$ (§. 58.); demnach läßt ſich in jedem Falle bei den Decimalbrüchen der Nenner beſtimmen, ohne daß man ihn ausdrücklich ſchreibt, wie dies bei den gemeinen Brüchen in jedem Falle geſchehen muß, denn er hat ſo viele Nullen, als der Zähler Zahlzeichen hat, mit einer vor die Nullen geſetzten Eins. Damit man aber bei Decimalbrüchen die Zähler von den ganzen Zahlen, die auch bisweilen mit den Decimalbrüchen verbunden ſind, unterſcheiden kann, weil man die Nenner wegläßt, ſo ſetzt man zwiſchen die ganze Zahl und den Zähler des Decimalbruchs ein Komma, und ſchreibt übrigens die Brüche wie ganze Zahlen. Alſo iſt $\frac{425}{100} = 4 + \frac{25}{100} = 4,25$; $\frac{2645}{10} = 264 + \frac{5}{10} = 264,5$ u. ſ. w. Sind keine ganzen Zahlen mit den Decimalbrüchen verbunden, d. i. ſind die Brüche ächte Brüche, ſo ſetzt man links, vor die Zahlzeichen des Zählers, eine Null mit dem Komma. Hierdurch iſt man davor geſichert, in keinem Falle einen Decimalbruch als eine ganze Zahl zu leſen oder zu gebrauchen; z. B. $\frac{27}{100} = 0,27$; $\frac{409}{1000} = 0,409$ ꝛc. Fehlen bei den Decimalbrüchen Stellen, oder Decimalordnungen, in welchen kein Zahlzeichen ſteht, ſo werden die fehlenden mit Nullen, gerade ſo, wie bei ganzen Zahlen, ausgefüllt, welches auch der Fall in den erſten Stellen zur Linken ſeyn kann. So ſchreibt man anſtatt $\frac{1}{100}$ den Decimalbruch 0,01; an ſtatt $\frac{1}{1000} = 0,001$.

§. 99.

Da die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen, oder mit unſerm Decimalſyſteme (§. 92.) überein-

kommen,

kommen, ſo werden die Werthe der Stellen auf eine ähnliche Art, wie bei ganzen Zahlen, beſtimmt, nämlich nach dem Geſetze, daß die Zahlzeichen der Decimalbrüche in der erſten Stelle nach dem Komma von der Linken zur Rechten, Zehntheile der Einheit, in der zweiten, Hunderttheile der Einheit, in der dritten Tauſendtheile der Einheit u. ſ. w. gelten; eben ſo, wie die erſte Stelle nach den Einern, bei den ganzen Zahlen Zehner, die zweite, Hunderte, und die dritte, Tauſende ꝛc. enthält.

Bezeichnet 4 die Ganzen, und 1 den ächten Decimalbruch, der mit 4 verbunden iſt, ſo kann man in folgender Tabelle den Werth von 1 in den verſchiedenen Stellen auf dieſe Art leicht überſehen:

4,	Ganze		
4,1	—	und	1 Zehntheil.
4,01	—	—	1 Hunderttheil.
4,001	—	—	1 Tauſendtheil.
4,0001	—	—	1 Zehntauſendtheil.
4,00001	—	—	1 Hunderttauſendtheil.
4,000001	—	—	1 Milliontheil ꝛc.

Eben ſo ſind:

0,	Ganze		
0,2	—	und	2 Zehntheile.
0,02	—	—	2 Hunderttheile.
0,002	—	—	2 Tauſendtheile.
0,0002	—	—	2 Zehntauſendtheile ꝛc.

Hiernach läßt ſich auch die Regel feſtſetzen, nach welcher man einen Decimalbruch ſchreibt, wenn ſowohl ſein Zähler, als auch der Nenner durch Worte

Worte ausgedrückt werden, nämlich: Man ſetzt das Zahlzeichen der kleinſten Theile der Einheit im Zähler, d. i. das Zahlzeichen des Zählers mit dem höchſten Namen um ſo viele Stellen von der Stelle der Einer, oder (wenn keine Ganzen vorhanden ſind) von der Null mit dem Komma nach der Rechten zu, als der Nenner Nullen hat. Soll man z. B. ſechs und dreißig tauſend, fünf hundert und vier Milliontheile ſchreiben, ſo geſchieht es alſo:

0, * * * * * *

In dieſe Stellen ſetzt man nun die der vorgeſchriebenen Zahl zugehörigen Zahlzeichen, nämlich:

0,036504.

§. 100.

Da die erſte Stelle nach den Einern der ganzen ahl oder überhaupt nach dem Komma gegen die Rechte zu, Zehntheile, die zweite, Hunderttheile u. ſ. w. der Einheit enthält, folglich die Einheit in der erſten Stelle in 10, in der zweiten in 100, in der dritten in 1000 gleiche Theile getheilt iſt: ſo haben die Zahlzeichen in der erſten Stelle von der Linken gegen die Rechte angerechnet, einen zehnmal kleinern Werth als die Einer; die Zahlzeichen in der zweiten Stelle, einen hundertmal kleinern, als die Einer, oder einen zehnmal kleinern Werth als die Zahlzeichen in der erſten Stelle u. ſ. w., und gehören demnach zu verſchiedenen, aber abnehmenden Decimalordnungen auf eben die Art, wie die Zahlzeichen der ganzen Zahlen zu verſchiedenen, aber zunehmenden Decimalordnungen gehören.

So iſt die Zahl 12,450678 $= \frac{12450678}{1000000} = 12\frac{450678}{1000000} = 12 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{7}{100000} + \frac{8}{1000000}$.

§. 101.

§. 101.

Iſt die Stelle der Einer in der ganzen Zahl durch das Komma beſtimmt 0, oder dem Decimalbruche eine 0 mit dem Komma vorangeſeßt, ſo kann man demſelben rechter Hand ſo viele Nullen beifügen, als man will, ohne daß der Werth des Bruches geändert wird; denn dadurch wird nicht nur der Zähler, ſondern auch der Nenner entweder mit 10 oder 100 u. ſ. w. multiplicirt, welches aber den Werth des Bruchs nicht ändert (§. 65.)

So iſt z. B. 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 d. i. $\frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{400}{1000} = \frac{4000}{10000}$.

Demnach kann man auf eine ſehr leichte Art Decimalbrüche unter einerlei Benennung bringen, indem man nur denjenigen Zählern, die weniger Decimalſtellen haben, als die übrigen, rechter Hand ſo viele Nullen beizufügen nöthig hat, daß ſie alsdenn eben ſo viele Zahlzeichen und Nullen haben, als die Zähler mit der größten Anzahl der Decimalſtellen. Sind z. B. die Brüche 0,5; 0,45; 0,205; 0,00456 gegeben; ſo iſt der größte Nenner 100000, folglich hat man durch Beiſetzung der Nullen rechter Hand, anſtatt

0,5	=	0,50000
0,45	=	0,45000
0,205	=	0,20500
0,00456	=	0,00456

Auf eine ähnliche Art kann man auch jede ganze Zahl wie einen Decimalbruch und zwar unter jedem gegebenen oder beliebigen Nenner ausdrücken. So iſt z. B. 4 = 4,0 = $\frac{40}{10}$; 4 = 4,00 = $\frac{400}{100}$; 4 = 4,000 = $\frac{4000}{1000}$ u. ſ. w.

§. 102.

Will man den Namen irgend einer Decimalſtelle im Zähler eines Decimalbruchs ſuchen, ſo zähle man die Ei-

ner der ganzen Zahl, oder wenn keine vorhanden, die Null als die erſte Stelle, und ſuche ſo, wie bei ganzen Zahlen, nur hier von der Linken zur Rechten, die Tauſendtheile in der vierten, die Milliontheile in der ſiebenten Stelle u. ſ. w.

Anmerkung.

Erfindung und Gebrauch der Decimalbrüche rühren aus dem 15ten Jahrhunderte her. Ein Deutſcher, Regiomontan aus Königsberg in Franken, entwickelte ſie, und machte ihre Anwendung bekannt. Sie nützen nicht bloß dem Geometer, ſondern ihr Gebrauch erſtreckt ſich auch auf andere Fälle im praktiſchen Rechnungsweſen.

I.

Die Addition.

§. 103.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genaunte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu addiren.

Auflöſung.

Man ſetze die Zahlzeichen der ganzen Zahlen ſowohl als der Decimalbrüche, ſo unter einander, daß die von einerlei Ordnung oder aus einerlei Stelle untereinander in eine Reihe zu ſtehen kommen, addire, wie bei ganzen Zahlen (§. 33.) und ſetze das Komma zwiſchen die ganze Zahl und den Decimalbruch.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.	4,508
	12,1068
	4,215
	126,2
Summe	147,0298

Nach

Nach §. 101. ſollten die Brüche unter einerlei Benennung gebracht werden, nämlich:

$$\begin{array}{r} 4,5080 \\ 12,1068 \\ 4,2150 \\ 126,2000 \\ \hline \text{Summe } 147,0298 \end{array}$$

Da die Zähler derjenigen Brüche, welche weniger Zahlzeichen als die übrigen haben, wenn ſie unter einerlei Benennung gebracht worden, rechter Hand Nullen erhalten, Nullen aber nicht addiren; ſo iſt es gleichgültig, ob man ſie unter einerlei Benennung bringt oder nicht, und dieſe Operation wird auch dadurch ſchon entbehrlich gemacht, daß die Decimaltheile, welche zu einerlei Ordnung gehören, wie im erſten Beiſpiele, in eine Reihe untereinander ſind geſetzt worden; demnach kann man ſich in der Ausübung der erſtern kürzern Art zu addiren, bedienen.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Ein Förſter habe z. B. ſeinen Forſt nach Länge und Breite ausgemeſſen, und gefunden, daß derſelbe an der öſtlichen Breite $42^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}\ 7^{III}\ 8^{IV}$, an der ſüdlichen Länge $987^{\circ}\ 6^{I}\ 5^{II}\ 9^{III}\ 7^{IV}$, an der gegenüberliegenden nördlichen Länge $2136^{\circ}\ 9^{I}\ 7^{II}\ 7^{III}$, und endlich an der weſtlichen Breite $59^{\circ}\ 7^{I}\ 6^{II}\ 3^{III}\ 9^{IV}$ gehalten habe. Die Frage iſt, wieviel der Umfang des Forſtes betrage? $3226^{\circ}\ 9^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}\ 4^{IV}$;

nämlich:
$$\begin{array}{r} 42,5678^{IV} \\ 987,6597 \\ 2136,9770 \\ 59,7639 \\ \hline \text{Summe } 3226,9084 \end{array}$$
Ruthen (§. 98.)

d. i.

d. i. $3226^{0}\ 9^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}\ 4^{IV}$, weil hier die Ruthen als ganze Zahlen, die Fuße, Zolle, Linien und Skrupel aber als Decimalbrüche betrachtet werden können.

b) Quadratmaße.

Ein Landwirth hat ſeine Breite gemeſſen, und die Größe des Inhalts im Quadratmaße und zwar Stückweiſe ſo gefunden, daß ſie halte $847\ R^q\ 34\ F^q + 1190\ R^q + 139\ R^q\ 95\ F^q\ 60\ Z^q + 729\ R^q\ 34\ F^q$; was beträgt der ganze Inhalt? $2906\ R^q\ 63\ F^q\ 60\ Z^q$;

nämlich: 847,34
1190,
139,9560
729,34

Summe 2906,6360 Quadratruthen (§. 98.)

d. i. 2906 Quadratruthen, 63 Quadratfuß und 60 Quadratzolle.

c) Kubikmaße.

Ein Förſter hat den körperlichen Inhalt von vier Eichen, die in ſeinem Forſte ſtehen, berechnet, und gefunden, daß die 1ſte $3002\ F^c\ 901\ Z^c\ 483\ L^c$; die 2te $138\ F^c\ 831\ Z^c$; die 3te $320\ F^c$, und die 4te $873\ F^c\ 810\ Z^c\ 207\ L^c$ gehalten: wieviel betragen ſie zuſammen an Holzbeſtande in Kubikmaße? $4335\ F^c\ 542\ Z^c\ 690\ L^c$;

nämlich: 3002,901483
138,831
320,
873,810207

4335,542690 Kubikruthen (§. 98.)

d. i. weil die Ganzen Fuße heißen 4335 Kubikfuße, 542 Kubikzolle, 690 Kubiklinien.

Wenn man die Decimalbrüche nach §. 101. unter einerlei Benennung bringt, ſo darf man nur die Zähler addiren,

diren, und den gemeinſchaftlichen Nenner behalten. Da aber dadurch die fehlenden Stellen in den Zählern nur Nullen bekommen, ſo wird auch die Summe gefunden, wenn man nur diejenigen Zahlzeichen der Zähler, die zu einerlei Benennung gehören, addirt; demnach iſt, da in jedem Falle dieſes Verfahren befolgt worden, die gefundene Summe richtig.

II.

Die Multiplikation.

§. 104.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu multipliciren.

Auflöſung.

Man ſetzt den Multiplikator unter das Multiplikandum, wie bei den ganzen Zahlen, und multiplicirt. Dem Produkte giebt man ſo viele Decimalſtellen als beide Faktoren zuſammen genommen enthalten. Gehen aber den Decimalſtellen in den Faktoren Nullen voran, und mangeln vielleicht auch die ganzen Zahlen völlig, ſo erhält man bisweilen im Produkte weniger Decimalſtellen, als beide Faktoren zuſammengenommen enthalten; in dieſem Falle ſetzt man an die Decimalſtellen des Produkts linker Hand ſo viele Nullen, bis man die gehörige Anzahl der Decimalſtellen erhalten hat, und ſetzt überdies in Ermangelung der ganzen Zahlen, noch eine Null mit dem Komma voran.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.

```
         6,4 23
           0,25
        -------
         32 1 15
        1 28 4 6
        --------
Produkt 1,60 5 75
```

ferner:

```
         0,0002 3
              4,6
        ---------
             13 8
             92
        ---------
Produkt 0,0 0105 8
```

Endlich:

```
  1,2 5
    1,6
  -----
   75 0
  1 25
  -----
  2,00 0 = 2.
```

2) In genannten Zahlen.

a) Långenmaße.

Soll man 232 Ruthen 3 Fuß 4 Zoll 5 Linien und 4 Skrupel, mit 0,234 multipliciren, ſo erhålt man im Produkte 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien und 8 Skrupel, und überdies noch $\frac{236}{1000}$ eines Skrupels, die man auf folgende Art bezeichnen 2^{v} 3^{vi} 6^{vii}, aber auch ganz weglaſſen kann, weil ſo kleine Theile des Långenmaßes in der Ausübung wenig bedeuten;

nåmlich: $232{,}3\,454^{iv}$

```
          232,3 454
              0,234
         -----------
           929 3 816
          6 970 3 62
        46 469 0 8
        -------------
Produkt 54,368 8 236 Ruthen.
```

d. i. 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien 8 Skrupel und $\frac{236}{1000}$ eines Skrupels, die man weglåßt und alſo nur 54^{0} 3^{I} 6^{II} 8^{III} 8^{IV} = 54,3688 Ruthen behålt.

b) Qua-

b) Quadratmaße.

Eine Forſtbreite iſt 20 R^q 23 F^q 10 Z^q lang, und 9 R^q 87 F^q 60 Z^q breit; wie groß iſt der Flächeninhalt? Wenn man dieſen Inhalt findet, wenn Länge und Breite in einander multiplicirt werden: ſo iſt derſelbe 199 R^q 80 F^q 13 Z^q 56 L^q;

nämlich:
```
        20,2310
         9,8760
      ---------
        121 386
      1 416 17
     16 1848
    182 079
   ------------
    199,80135600 Quadratruthen (§ 93.)
```

d. i. 199 Quadratruthen, 80 Quadratfuß, 13 Quadratzolle und 56 Quadratlinien.

c) Kubikmaße.

Es iſt ein Einlaß Flößholz aufgeſchlichtet worden, deſſen Länge 21 R 4 F, die Breite 2 R 8 F, die Höhe aber nur 6 F beträgt; wie groß iſt der körperliche Inhalt?

Findet man dieſen Inhalt, wenn man ein Produkt aus der Länge, Breite und Höhe der gegebenen Maße macht; ſo iſt derſelbe 35 R^c 952 F^c. Soll man nun angeben, wieviel Holz in Klaftern aus dieſem Einlaſſe aufgeſetzt werden können, wenn die Klafter zu 121 Kubikfuß, bei einer 6 Fuß großen Scheitlänge gerechnet wird; ſo erhält man die Klafterzahl, wenn man mit 121 in 35 R^c 952 F^c dividirt, und die Anzahl der Klaftern beträgt 297, und überdies noch 15 Kubikfuß; nämlich:

```
21,4 Ruthen Länge.
 2,8  —    Breite.
───────
 171 2
 428
───────
 59,92 Quadratruthen Grundfläche.
   0,6 Ruthen, d. i. 6 Fuß Höhe.
───────
35,952 Kubikinhalt.
```

Dieſe 35 R^c^ 952 F^c^ ſind gleich 35952 Kubikfuß, die Ruthe zu 1000 Fuß gerechnet;

```
alſo    121) 35952 | 297 Klaftern.
             242..
             ─────
             1175.
             1089.
             ─────
               862
               847
             ─────
                15 Kubikfuß.
```

Durch das Produkt der Zähler, welches nach den Begriffen der Multiplikation in ganzen Zahlen iſt geſucht worden, hat man auch das Produkt der Nenner gefunden, welches in jedem Falle ſo viele Nullen hat, als beide Zähler zuſammen genommen Zahlzeichen haben, d. i. Eins mit einer ſolchen Reihe rechter Hand daran hängender Nullen, weil jeder Nenner für ſich ſo viele Nullen hat, als ſein Zähler Zahlzeichen enthält; demnach iſt das gefundene Produkt das richtige.

III.

Die Subtraktion.

§. 105.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu ſubtrahiren.

Auf-

Auflöſung.

Man ſetze die Zahlzeichen der ganzen Zahlen ſowohl, als auch der Decimalbrüche eben ſo, wie bei der Addition (§. 103.) untereinander, daß die von einerlei Ordnung oder einerlei Stelle untereinander in eine Reihe zu ſtehen kommen, ſubtrahire die kleinere Zahl von der größern und ſetze das Komma zwiſchen die ganze Zahl und den Decimalbruch.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.	12,4578	Oder:	24,053200
	8,1250		6,594067
Differenz	4,3328		17,459133

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Man ſubtrahire $34^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}\ 7^{III}\ 8^{IV} = 34,5678$ Ruthen, von $98^{\circ}\ 7^{I}\ 6^{II}\ 5^{III}\ 4^{IV} = 98,7654$ Ruthen; die Differenz iſt $64^{\circ}\ 1^{I}\ 9^{II}\ 7^{III}\ 6^{IV} = 64,1976$ Ruthen, nämlich:

	98,7654
	34,5678
Differenz	64,1976 Ruthen

Desgleichen: Ein Forſtbedienter ſoll von einer Länge von $11^{\circ}\ 7^{I}\ 4^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 11,7428$ Ruthen, eine andere von $3^{\circ}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 3,2028$ Ruthen Länge ſubtrahiren; wie groß iſt der Reſt? 8,54 Ruthen, nämlich:

$$\begin{array}{r} 11,7428 \\ 3,2028 \\ \hline 8,5400 \end{array}$$ Ruthen

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 4 Zoll.

b) Quadratmaße.

Ein Stück Acker mit Holz bewachſen, hält 75 R^q 30 F^q. Davon werden verkauft 49 R^q 95 F^q 43 Z^q; wie groß iſt der Reſt? 25 R^q 34 F^q 57 Z^q.

$$\begin{array}{r} 75{,}3000 \\ \underline{49{,}9543} \\ 25{,}3457 \end{array}$$ Quadratruthen.

d. i. 25 Quadratruthen, 34 Quadratfuß, 57 Quadratzoll.

c) Kubikmaße.

Es ſind 85 R^c 754 F^c 324 Z^c an Flößholz aufgeſchlichtet worden. Von dieſen aber hat man nach und nach an Klaftern aufgeſetzet, 52 R^c 154 F^c; wie viel iſt noch zu Klaftern vorräthig? 33 R^c 600 F^c 324 Z^c.

$$\begin{array}{r} 85{,}754324 \\ \underline{52{,}154000} \\ 33{,}600324 \end{array}$$ Kubikruthen.

d. i. 33 Kubikruthen, 600 Kubikfuß, 324 Kubikzoll.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 104, wenn man hier Subtraktion, ſtatt dort Addition ſetzt.

Anmerkung.

Auch bei den Decimalbrüchen dient die Subtraktion der Addition, und die Addition der Subtraktion zur Probe.

IV.

Die Diviſion.

§. 106.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu dividiren.

Auf=

Aufloͤſung.

1) In ungenannten Zahlen.

Hierbei kommen folgende Unterſuchungen vor:

a) Ob das Dividendum eben ſo viele Decimalſtellen hat, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man an daſſelbe ſo viele Nullen rechtet Hand ſetzen, bis beide eine gleiche Anzahl haben.

b) Ob, wenn man beide gegebene Zahlen als ganze betrachtet, das Dividendum groͤßer iſt, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man, wenn es an Stellen fehlt, an das Dividendum auch in dieſem Falle ſo viele Nullen rechter Hand ſetzen, als erforderlich ſind, damit man wirklich dividiren kann.

Nach dieſen Betrachtungen und der erforderlichen Zurichtung der Zahlen zum Dividiren, dividire man wie bey ganzen Zahlen, und hoͤre da auf, wo man aufhoͤren wuͤrde, wenn die Zahlen ganze Zahlen waͤren; gebe aber dem Quotienten von der Rechten zur Linken ſo viele Decimalſtellen als uͤbrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der Anzahl im Dividend ſubtrahirt.

Die verſchiedenen, bey dieſer Diviſion vorkommenden Faͤlle, werden am leichteſten durch Beiſpiele erlaͤutert.

Erſter Fall: $8^{0}4'4''8''' : 9^{0}6'$, d. i. 8, 448 : 9, 6

```
9,6) 8,448 | 0,88
     7 68
     ----
      768
      768
      ---
        0
```

 Hier

Hier dividiret man auf folgende Art: 9 in 8 oder, wenn man die Zahlen als ganze anſieht, 96 in 84 hat man 0 im Quotienten; nimmt man nun zum Dividend das folgende Zahlzeichen 4, ſo hat man 96 in 844, 8 mal u. ſ. w. woraus man ſieht, wie man ſich überhaupt zu verhalten hat, wenn der Diviſor größer iſt, als das Dividendum.

Zweiter Fall: 6,495 : 2573,4.

```
2573,4)  6,4950 | 0,002
          5 1468
    Reſt  1 3482
```

d. i. 2573 in 6, hat man 0 Ganze; 2573 in 64 hat man 0 Zehntheile; 2573 in 649, 0 Hunderttheile; 2573 in 6495 aber 2 Tauſendtheile. Da nun der Diviſor noch 4 Zehntheile auſſer der ganzen Zahl hat, ſo ſetzt man an das Dividendum 0 um die fehlende Stelle zu ergänzen, und dividirt als wenn die Zahlen hießen 25734 in 64950.

Dritter Fall: 5,49 : 2,57

```
2,57)  5,49 | 2
       5 14
 Reſt    35
```

Vierter Fall: 0,42 : 8,41

```
8,41)  0,4200 | 0,04
         3364
   Reſt   836
```

d. i.

d. i. 8 in 0 hat man 0 Ganze; 8 in 4, 0 Zehntheile; 8 in 42, 4 Hunderttheile. Da nun der Diviſor überdies noch 2 Decimalſtellen, das Dividendum aber keine mehr hat, ſo giebt man demſelben noch 2 Nullen, und dividirt wie bey ganzen Zahlen, nämlich 841 in 4200, und erhält den Quotient.

Fünfter Fall: 15,8 : 6,247

```
6,247) 15,800 | 4
       12 494
       ------
        3 306
```

Hier ſagt man 6 in 15, 2 mal. Da aber das Dividendum nur eine, der Diviſor hingegen drei Decimalſtellen hat, ſo giebt man dem Dividend noch 2 Nullen, und findet eben ſo 6247 in 15800, 2 mal, wo denn die Zahl 2 natürlich Ganze bezeichnen muß.

Sechſter Fall: 86,29 : 431,416

```
431,416) 86,2900 | 0,2
         86 2832
         -------
        Reſt  68
```

d. i. 431 in 86 hat man 0 Ganze; 431 aber in 862, 2 Zehntheile. Da nun dem Dividend gegen den Diviſor noch 2 Decimalſtellen fehlen, ſo ergänzt man ſie durch Nullen und dividirt wie 431416 in 862900.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Eine Länge von 27 R 5 F = 27, 5 ſoll in 3,2 Theile getheilt, d. i. mit 3,2 dividirt werden; wie groß iſt der Quotient? 8 R 5 F 9 Z 3 L 7 S 5 Q = 8,59375 Ruthen.

3,2) 27,500000 | 8,59375
256.....
190....
160....
300...
288 ..
120..
96..
240.
224.
160
160
0

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 9 Zoll, 3 Linien, 7 Skrupel und 5 Zehntheile vom Skrupel.

b) Quadratmaße.

Der Flächeninhalt einer mit Holz beſtandenen Horſt beträgt 26 R^q 26 F^q 80 Z^q = 26,2680 Quadratruthen; die Länge hingegen macht 4 R 34 F = 4,34 Ruthen. Wird nun die Breite gefunden, wenn man mit der Länge in die Fläche dividirt; wie groß iſt dieſe Breite: 6 R 0 F 5 Z 2 L 5 S 5 Q.

4,34) 26,268000 | 6,0525 Ruthen.
2604 ..
2280..
2170..
1100.
878.
2220
2170
50

d. i. 6 Ruthen, 0 Fuß, 5 Zoll, 2 Linien, 5 Skrupel, 5 Zehntheile vom Skrupel.

c) Körpermaße.

Der körperliche Inhalt von einem Satze Holz beträgt 20 Kubikruthen 976 Kubikfuß = 20,976 Kubikruthen. Die Fläche dieſes Satzes aber 4 Quadratruthen 56 Quadratfuß = 4,56 Quadratruthen. Wird nun die Höhe des Satzes gefunden, wenn man mit der Fläche (Grundfläche) in den körperlichen Inhalt dividirt; wie groß iſt dieſe Höhe? 4 R 6 F.

```
4,56) 20,976 | 4,6 Ruthen
      1824
      ----
       2736
       2736
       ----
          0
```

d. i. 4 Ruthen 6 Fuß.

Durch das Zuſetzen der Nullen im Dividend, wo es nämlich nöthig iſt, werden die Brüche in ihrem Werthe nicht geändert und können überdies wie ganze Zahlen betrachtet werden; demnach ſind die verſchiedenen Fälle der Diviſion ſchon durch die gemeine Diviſion bewieſen (§ 55).

So iſt im erſten Falle $8,448 : 9,6 = \frac{8448}{1000} : \frac{96}{10} = \frac{8448 . 10}{96 . 1000} = \frac{8448}{96} . \frac{1}{100} = 0,88$. Auf eben dieſe Art laſſen ſich auch die andern Fälle beweiſen.

§. 107.

In den Fällen, wo ein Reſt bleibt, kann man den Quotient noch genauer, d. i. in mehreren Decimaltheilen finden, wenn man demſelben eine oder mehrere Nullen beifügt und weiterfort dividirt (wie in N. 2. lit. a und b); hier-

hierdurch wird der Werth des Decimalbruchs nicht geändert, weil man, wenn der Zähler eine oder mehrere Nullen erhält, auch zugleich den Nenner mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicirt. Die Diviſion kann man dann ſo lange fortſetzen, bis alles aufgeht, oder bis man aus andern Gründen überzeugt iſt, daß der Quotient für den Gebrauch Genauigkeit genug hat. *Bliebe zuletzt* dennoch ein Reſt, ſo könnte man dieſen als einen Bruch an den Diviſor ſetzen, in welchem der Zähler der Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt mit ſo vielen rechter Hand angeſetzten Nullen, als man im Quotienten bis dahin Decimalſtellen erhalten hat.

Es ſey z. B. 5,49 : 2,57

```
2,57) 5,49 | 2,136186 + 198/257000000
      5 14
      ----
        350
        257
        ---
         930
         771
         ---
         1590
         1542
         ----
           480
           257
           ---
           2230
           2056
           ----
            1740
            1542
            ----
Reſt         198
```

Den Reſt $\frac{198}{257000000}$ oder $\frac{198}{257}$ Milliontheile kann man weglaſſen, ohne daß man Unrichtigkeiten befürchten darf; denn würde 198 bis zu 257 ergänzt, ſo wäre $\frac{257}{257}$ ein Milliontheil, und aus den im Quotient befindlichen 6 Millio-

6 Milliontheilen würden nun 7. Wäre der Fall der, daß die 2 Ganze, Ruthen hießen, ſo hätte man im Decimalbruche noch 1 Fuß, 3 Zoll, 6 Linien, 1 Skrupel, 8 Zehntheile und 6 Hunderttheile eines Skrupels; folglich wären $\frac{198}{257}$ Hunderttheile eines Skrupels, die alſo in der Ausübung in keine Betrachtung kommen können. In den meiſten Fällen kann man die Diviſion mit Sicherheit mit der dritten, oder doch höchſtens mit der vierten Decimalſtelle, endigen.

§. 108.

Iſt das Dividendum eine ganze Zahl, der Diviſor aber eine ganze Zahl mit einem angehängten Decimalbruche, alſo eine gemiſchte Zahl, und die Diviſion geht da nicht auf, wo man bey der gemeinen Diviſion aufhört zu dividiren; ſo hängt man auch hier an den Reſt ſo viele Nullen, als man nöthig zu haben glaubt, oder fügt dem jedesmaligen Reſte eine Null bei und dividirt. Hat man nicht gleich anfänglich die Ganzen im Quotient marquirt, ſo erhält der Quotient ſo viele Decimalſtellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der an den Reſt geſetzten Anzahl, ſubtrahirt. So iſt z. B. 5432 : 2,4 der Quotient 2263,33 .... wo denn die Punkte noch folgende Decimaltheile bezeichnen.

§. 109.

Einen ächten Decimalbruch oder eine gemiſchte Decimalzahl multiplicirt und dividirt man mit 10, 100, 1000, 10000 u. ſ. w. wenn man bei der Multiplikation das Komma des Multiplikandums ſo viele Stellen gegen die rechte Hand, und bei der Diviſion, das Komma des Dividendums ſo viele Stellen gegen die linke Hand zurückt, als im erſten Falle der Multiplikator, und im zweiten Falle der Diviſor Nullen neben der Eins hat.

Wird z. B. 12,45967 mit 10000 multiplicirt, ſo iſt das Produkt = 124596,7; mit 1000 iſt das Produkt = 12459,67; mit 100 iſt es = 1245,967; mit 10 aber = 124,5967.

Denn 12,45967
10000
―――――――――――
124596,70000 (§. 104).

d. i. 124596,7 = 124596,70000 weil die Nullen rechter Hand den Werth des Decimalbruchs nicht ändern. Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch die andern Fälle dieſer Art von Multiplikation darthun.

Wird aber z. B. 124596,7 mit 10000 dividirt, ſo iſt der Quotient = 12,45967; mit 1000 iſt der Quotient 124,5967; mit 100 iſt er = 1245,967, mit 10 aber = 12459,67;

Denn 124596,7 | 12,45967 (§. 106.
10000) 10000
―――――
24596
20000
―――――
45967
40000
―――――
59670
50000
―――――
96700
90000
―――――
67000
60000
―――――
70000
70000
―――――
0

Auf

Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch hier die übrigen Fälle dieſer Diviſion darthun. Da Multiplikation und Diviſion einander aufheben, und die gefundenen Reſultate gerade einander entgegengeſetzt ſind, ſo hat das Verfahren ſeine Richtigkeit.

Weil nun Multiplikationen und Diviſionen der Decimalbrüche mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. in der Ausübung nicht ſelten vorkommen, ſo kann man mit vieler Zeiterſparung die Produkte und Quotienten nach den gegebenen Regeln beſtimmen, ohne daß man nöthig hat, wirklich zu multipliciren und zu dividiren.

Anmerkung.

Auch die Diviſion dient der Multiplikation, ſo wie die Multiplikation der Diviſion bei Decimalbrüchen zur Probe.

V.

Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

§. 110.

Durch die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche bezweckt man, einen gemeinen Bruch entweder vollkommen genau, oder beinahe in einem Decimalbruche auszudrücken, ſo, daß man in beiden Fällen, den Werth des einen für den Werth des andern ſetzen kann, ohne in der Ausübung fehlerhafte Folgen zu befürchten oder zu veranlaſſen.

Da nun in der Ausübung ſehr häufig gemeine Brüche vorkommen, die wegen des zehntheiligen Maßes, als Decimalbrüche ausgedrückt werden müſſen, ſo iſt es nöthig gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandeln zu können.

§. 111.

§. 111.

Aufgabe.

Gemeine ungenannte und genannte Brüche, ächte und unächte in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflöſung.

Man ſetze an den Zähler des gemeinen Bruchs rechter Hand ein Komma, und nach demſelben ſo viele Nullen als man für nöthig findet, oder ſetze, wenn ein Reſt bleibt, dieſem jedesmaligen Reſte rechter Hand eine Null bei und dividire.

1) **Ungenannte Zahlen.**

a) ächte gemeine Brüche, die vollkommen in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

2)		4)		5)	
10	0,5	30	0,75	40	0,8
10		28		40	
0		20		0	
		20			
		0			

d. i. $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$.

b) ächte gemeine Brüche, die nur beinahe in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$ u. ſ. w.

3) 10 | 0,333...	3) 20 | 0,666...	9) 20 | 0,222...
9	18	18
10	20	20
9	18	18
10	20	20
9	18	18
Reſt 1	Reſt 2	Reſt 2

Hieraus ſieht man deutlich, daß die Diviſion ohne Ende fortgeſetzt werden kann, und der gefundene Decimalbruch doch nie genau ſo groß wird, als der gemeine, wenn man den Reſt wegläßt; denn der Reſt mit einer rechter Hand beigefügten Null iſt in keinem der gegenwärtigen Fälle ein Produkt, welches einen Faktor 3 oder 9 hat, in welchem Falle erſt die Diviſion aufgehen würde. Die Reſte $\frac{\frac{1}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{9}}{1000}$ ſind entweder ſchon ſo klein, daß man ſie in der Ausübung aus der Acht laſſen kann, oder ſie können doch in jedem Falle ſo klein gemacht werden, wenn man nur die Diviſion fortſetzt. Im allgemeinen aber iſt $0,333\ldots < \frac{1}{3}$; $0,666\ldots < \frac{2}{3}$; $0,222\ldots < \frac{2}{9}$: hingegen iſt $0,333\frac{\frac{1}{3}}{1000} = \frac{1}{3}$; $0,666\frac{\frac{2}{3}}{1000} = \frac{2}{3}$; $0,222\frac{\frac{2}{9}}{1000} = \frac{2}{9}$.

c) unächte Brüche und gemiſchte Decimalzahlen.

Wie groß iſt z. B. $2\frac{3}{4}$ in Decimaltheilen ausgedrückt? Man verwandele die gemiſchte Zahl in einen unächten Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch.

$2\frac{3}{4}$
$\frac{11}{4}$

Legt man die letztere in §. 93. angegebene Bezeichnungsart zum Grunde, ſo darf man nur jedem Buchſtaben ein ^{q}, oder das Zahlzeichen 2 oben anhängen, und R^q oder R^2 heißt Decimal-Quadratruthe, F^q oder F^2 Quadratfuß, Z^q oder Z^2 Quadratzoll, L^q oder L^2 Quadratlinie, und S^q oder S^2 Quadratſkrupel. Es gehen demnach 100 Quadratfuß auf 1 Quadratruthe, oder 10000 Quadratzoll, oder 1000000 Quadratlinien, oder 100000000 Quadratſkrupel. Die übrigen, etwa noch nöthigen kleinern Eintheilungen wird man von ſelbſt finden.

§. 95.

Die Körper werden zwar nach ihrer Länge, Breite und Höhe (Dicke oder Tiefe) mit dem Längenmaße wie die Längen ſelbſt gemeſſen, aber in einem Maße berechnet, in welchem auch ihr Inhalt oder ihre körperliche Größe angegeben wird, welches ſelbſt ein Körper iſt, oder ſich auf einen Körper, nämlich auf einen Kubus oder Würfel gründet, daher man auch dieſes Maß das körperliche und im beſondern Sinne, das Kubikmaß nennt. Da der Würfel unter allen Körpern am meiſten bekannt und regulär iſt, indem er gleiche Länge und Breite in der Grundfläche und eine eben ſo große Höhe hat, ſo paßte derſelbe am ſchicklichſten zum Maßkörper. Theilt man die Seite eines Würfels von einer Ruthe in der Länge, in 10 gleiche Theile, und auf eben die Art auch die Breite, ſo hat man 100 Quadratfuße in der Grundfläche; wird nun die Höhe, die ebenfalls der Länge einer Ruthe gleicht, auch in 10 Theile getheilt, ſo erhält man in einem ſolchen Würfel 1000 Kubikfuße. Jeder Kubikfuß hat nach dieſer Eintheilung 1000 Kubikzolle; jeder Kubikzoll 1000 Kubiklinien; jede Kubiklinie aber 1000 Kubikſkrupel. Bleiben die Zeichen, wie ſie §. 93. angegeben ſind für die Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. ſo darf man nur dies Beiwort Kubikmaß durch ein ^{c} dazuſetzen, oder

jedes

jedes Zeichen mit einem kleinen Würfel verſehen. Man liest demnach 126^{co} 427^{ci} 304^{cii} 219^{ciii} 209^{civ}, 126 Kubikruthen, 427 Kubikfuß, 304 Kubikzoll, 219 Kubiklinien, 209 Kubikſkrupel. Legt man die am Ende §. 93. angeführte Bezeichnungsart, nämlich R, F rc zum Grunde, ſo fügt man jedem Buchſtaben oben ein ^{c} oder das Zahlzeichen ^{3} bei, nämlich R^c oder R^3 Kubikruthe, F^c oder F^3 Kubikfuß, Z^c oder Z^3 Kubikzoll, L^c oder L^3 Kubiklinie, S^c oder S^3 Kubikſkrupel. Es gehen demnach 1000 Kubikfuß auf 1 Kubikruthe, oder 1000000 Kubikzoll, oder 1000000000 Kubiklinien, oder 1000000000000 Kubikſkrupel.

§. 96.

Aufgabe.

Eine Menge Skrupel in Ruthen u. ſ. w. auszudrücken, ſie mögen nun im Decimal Längen- oder Quadrat- oder Kubikmaße gegeben ſeyn, d. i. Maße mit kleinern, auf Maße mit größern Namen zu bringen.

Auflöſung.

Man dividire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl. Hierbei ſind folgende Fälle zu merken:

1) Decimal-Längenmaße. Die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 10.

Wieviel betragen z. B. 582013 Skrupel in Ruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $58^{0}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; denn 582013 Skrupel : $10 = 58^{0}\ 2013^{IV}$; $2013^{IV} : 10 = 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; $0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV} : 10 = 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$; $1^{III} 3^{IV} : 10 = 1^{III} 3^{IV}$; folglich $58^{0}\ 2^{I}\ 1^{III}\ 3^{IV}$. Statt aller Diviſionen hat man hier nur nöthig, jeder Zahl das ihr zukommende Zeichen zu geben. So ſetzt man

 gleich

gleich ſtatt 582013 Skrupel, weil unter 0 3 Reſt bleibt und 1 nicht dividirt, $58^{o}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 1^{III}\ 3^{IV}$.

2) Decimalquadratmaß. Die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 100. Wieviel betragen z. B. 1219081436 Quadratſkrupel, in Quadratruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $12R^{q}\ 19F^{q}\ 8Z^{q}\ 14L^{q}\ 36S^{q}$. Denn hier darf man nur von der Rechten zur Linken immer zwei Zahlzeichen für den kleinern und ſo fort für darauf folgende größere Namen abſchneiden, und das dazu gehörige Zeichen beiſetzen.

3) Decimalkubikmaß. Bei dieſem iſt die Reduktionszahl oder der Diviſor zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen 1000. Wieviel betragen z. B. 9216103046145 Kubikſkrupel, in Kubikruthen und kleinern Theilen ausgedrückt? $9R^{c}$ $216F^{c}\ 103Z^{c}\ 46L^{c}\ 145S^{c}$; denn wenn man hier von der Rechten zur Linken immer drei Zahlzeichen für den kleinern und ſofort für den darauf folgenden größern Namen abſchneidet, ſo iſt es eben ſo viel als wenn man mit 1000 dividirt hätte.

§. 97.

Aufgabe.

Eine Menge Ruthen, Fuße ꝛc. in Skrupeln auszudrücken, ſie mögen nun im Decimal⸗ Längen⸗ oder Quadrat⸗ oder Kubikmaße gegeben ſeyn, d. i. Maße mit größern, auf Maße mit kleinern Namen zu bringen.

Auflöſung.

Man multiplicire die gegebene Zahl mit der Reduktionszahl.

Auch

Auch hier ergeben ſich folgende Fälle:

1) **Decimallängenmaß.** Die Reduktionszahl oder der Multiplikator zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 10.

Wieviel betragen z. B. $58^{\circ}\ 2^{I}\ 1^{II}\ 3^{IV}$, in Skrupeln? 582013 Skrupel. Multiplicirt man wirklich, ſo iſt die Rechnung dieſe:

$$
\begin{array}{l}
58^{\circ} \\
\quad 10^{I} = 1^{\circ} \\
\hline
582^{I} \\
\quad 10^{II} = 1^{I} \\
\hline
5820^{II} \\
\quad 10^{III} = 1^{II} \\
\hline
58201^{III} \\
\quad 10^{IV} = 1^{III} \\
\hline
582013 \text{ Skrupel.}
\end{array}
$$

Statt des Multiplicirens darf man nur alle Zeichen, bis auf das niedrigſte weglaſſen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt $58^{\circ}\ 2^{I}\ 1^{III}\ 3^{IV} = 582013$ Skrupel, wobei man Acht haben muß, ob Zahlzeichen von irgend einem Werthe fehlen, die dann durch Nullen erſetzt werden, wie dies der Fall im gegenwärtigen Beiſpiel mit den Zollen iſt.

2) **Decimalquadratmaß.** Die Reduktionszahl zweier unmittelbar auf einander folgenden Maßabtheilungen iſt 100.

Wieviel betragen z. B. $12R^{q}\ 19F^{q}\ 8Z^{q}\ 14L^{q}\ 36S^{q}$, in Skrupel? $1219081436S^{q}$. Multiplicirt man wirklich, ſo iſt die Rechnung folgende:

$$
\begin{array}{l}
12\ R^q \\
\quad 100^{I} = 1^{0} \\
\hline
1219\ F^q \\
\quad\quad 100^{II} = 1' \\
\hline
121908\ Z^q \\
\quad\quad\quad 100^{III} = 1'' \\
\hline
12190814\ L^q \\
\quad\quad\quad\quad 100^{IV} = 1''' \\
\hline
\end{array}
$$

1219081436 Quadratſkrupel.

Statt des Multiplicirens darf man auch hier nur alle Zeichen bis auf das niedrigſte weglaſſen, und die leeren Stellen, wie hier z. B. bei den Zollen mit Null ausfüllen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt die Zahl z. B. 12 R^q 19 F^q 8 Z^q 14 L^q 36 S^q = 1219081436 S^q.

3) Decimalkubikmaß.

Die Reduktionszahl zweier unmittelbar auf einander folgender Maßabtheilungen iſt 1000.

Wieviel betragen z. B. 9 R^c 216 F^c 103 Z^c 46 L^c 145 S^c in Skrupeln? 9216103046145 S^c. Die Rechnung wird auf dieſe Art wirklich verrichtet:

$$
\begin{array}{l}
9\ R^c \\
1000^{I} = 1^{0} \\
\hline
9216\ F^c \\
\quad\quad 1000^{II} = 1' \\
\hline
9216103\ Z^c \\
\quad\quad\quad 1000^{III} = 1'' \\
\hline
9216103046\ L^c \\
\quad\quad\quad\quad 1000^{IV} = 1''' \\
\hline
\end{array}
$$

9216103046145 Kubikſkrupel.

Statt des Multiplicirens darf man auch bei dieſem Maße nur alle Zeichen bis auf das niedrigſte weglaſſen und

und die leeren Stellen mit Null füllen, ſo hat man die geſuchte Zahl. So iſt die Zahl z. B. 9 R^c^ 216 F^c^ 103 Z^c^ 46 L^c^ 145 S^c^ = 9216103046145 S^c^.

Anmerkung.

Andere Maßeintheilungen und davon abhängende Reduktionen kommen in der Folge vor.

Zweiter Abſchnitt.

Die Decimalbrüche.

§. 98.

Denkt man ſich bei der im erſten Abſchnitte erwähnten Decimaleintheilung des Längenmaßes die Ruthe als das Ganze, aber in 10 oder 100 oder 1000 ꝛc. gleiche Theile getheilt, ſo erhält man Fuße, Zolle, Linien ꝛc. als Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000 ꝛc. Auf eine ähnliche Art iſt bei dem Decimalquadratmaße, wenn die Ruthe das Ganze iſt, der Fuß, Zoll, Linie ꝛc. ein Bruch mit dem Nenner 100, 10000, 1000000 ꝛc. ſo wie bei dem Decimalkubikmaße, die Fuße, Zolle, Linien ꝛc. Brüche ſind mit den Nennern 1000, 1000000, 1000000000 ꝛc. mit der Vorausſetzung, daß die Ruthe das Ganze oder die Einheit ausdrückt.

Brüche dieſer Art, oder bei welchen die Einheit entweder in 10, oder in 100, oder in 1000 ꝛc. gleiche Theile getheilt iſt, und außer dieſer keine andere Eintheilung vorkommt, nennt man (aus eben dem Grunde, wie die Maße §. 92.) zehntheilige, oder Decimalbrüche. Dieſe Brüche haben demnach keine andern Nenner als zehn, oder Produkte von zehn in zehn. Da nun 10 = 1 . 10; 100 = 1 . 100 u. ſ. w., ſo iſt der Nenner jedesmal Eins oder 1 mit einer oder mehrern Nullen (§. 41.) So ſind

folgende Brüche *Decimalbrüche*, z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{425}{100}$, $\frac{2645}{10}$ u. ſ. w. Weil aber die letztern beiden *unächte* Brüche ſind, ſo iſt noch eine Diviſion mit den Nennern möglich, und nach der Diviſion erhält der Zähler des ächten Bruchs ſo viel Zahlzeichen, als der Nenner Nullen hat, nämlich $\frac{425}{100} = 4 + \frac{25}{100}$; $\frac{2645}{10} = 264 + \frac{5}{10}$ (§. 58.); demnach läßt ſich in jedem Falle bei den Decimalbrüchen der Nenner beſtimmen, ohne daß man ihn ausdrücklich ſchreibt, wie dies bei den gemeinen Brüchen in jedem Falle geſchehen muß, *denn er hat ſo viele Nullen, als der Zähler Zahlzeichen hat, mit einer vor die Nullen geſetzten Eins.* Damit man aber bei Decimalbrüchen die Zähler von den ganzen Zahlen, die auch bisweilen mit den Decimalbrüchen verbunden ſind, unterſcheiden kann, weil man die Nenner wegläßt, ſo ſetzt man zwiſchen die ganze Zahl und den Zähler des Decimalbruchs ein *Komma*, und ſchreibt übrigens die Brüche wie ganze Zahlen. Alſo iſt $\frac{425}{100} = 4 + \frac{25}{100} = 4, 25$; $\frac{2645}{10} = 264 + \frac{5}{10} = 264,5$ u. ſ. w. Sind keine ganzen Zahlen mit den Decimalbrüchen verbunden, d. i. ſind die Brüche ächte Brüche, ſo ſetzt man *links*, vor die Zahlzeichen des Zählers, eine *Null mit dem Komma*. Hierdurch iſt man davor geſichert, in keinem Falle einen Decimalbruch als eine ganze Zahl zu leſen oder zu gebrauchen; z. B. $\frac{27}{100} = 0, 27$; $\frac{409}{1000} = 0, 409$ ꝛc. *Fehlen* bei den Decimalbrüchen *Stellen*, oder *Decimalordnungen*, in welchen kein Zahlzeichen ſteht, ſo werden die fehlenden mit Nullen, gerade ſo, wie bei ganzen Zahlen, ausgefüllt, welches auch der Fall in den erſten Stellen zur Linken ſeyn kann. So ſchreibt man anſtatt $\frac{1}{100}$ den Decimalbruch 0,01; an ſtatt $\frac{1}{1000} = 0,001$.

§. 99.

Da die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen, oder mit unſerm Decimalſyſteme (§. 92.) übereinkommen,

kommen, ſo werden die Werthe der Stellen auf eine ähnliche Art, wie bei ganzen Zahlen, beſtimmt, nämlich nach dem Geſetze, daß die Zahlzeichen der Decimalbrüche in der erſten Stelle nach dem Komma von der Linken zur Rechten, Zehntheile der Einheit, in der zweiten, Hunderttheile der Einheit, in der dritten Tauſendtheile der Einheit u. ſ. w. gelten; eben ſo, wie die erſte Stelle nach den Einern, bei den ganzen Zahlen Zehner, die zweite, Hunderte, und die dritte, Tauſende ꝛc. enthält.

Bezeichnet 4 die Ganzen, und 1 den ächten Decimalbruch, der mit 4 verbunden iſt, ſo kann man in folgender Tabelle den Werth von 1 in den verſchiedenen Stellen auf dieſe Art leicht überſehen:

4,	Ganze		
4,1	—	und	1 Zehntheil.
4,01	—	—	1 Hunderttheil.
4,001	—	—	1 Tauſendtheil.
4,0001	—	—	1 Zehntauſendtheil.
4,00001	—	—	1 Hunderttauſendtheil.
4,000001	—	—	1 Milliontheil ꝛc.

Eben ſo ſind:

0,	Ganze		
0,2	—	und	2 Zehntheile.
0,02	—	—	2 Hunderttheile.
0,002	—	—	2 Tauſendtheile.
0,0002	—	—	2 Zehntauſendtheile ꝛc.

Hiernach läßt ſich auch die Regel feſtſetzen, nach welcher man einen Decimalbruch ſchreibt, wenn ſowohl ſein Zähler, als auch der Nenner durch

Worte ausgedrückt werden, nämlich: Man ſetzt das Zahlzeichen der kleinſten Theile der Einheit im Zähler, d. i. das Zahlzeichen des Zählers mit dem höchſten Namen um ſo viele Stellen von der Stelle der Einer, oder (wenn keine Ganzen vorhanden ſind) von der Null mit dem Komma nach der Rechten zu, als der Nenner Nullen hat. Soll man z. B. ſechs und dreißig tauſend, fünf hundert und vier Milliontheile ſchreiben, ſo geſchieht es alſo:

0, * * * * * *

In dieſe Stellen ſetzt man nun die der vorgeſchriebenen Zahl zugehörigen Zahlzeichen, nämlich:

0,036504.

§. 100.

Da die erſte Stelle nach den Einern der ganzen ahl oder überhaupt nach dem Komma gegen die Rechte zu, Zehntheile, die zweite, Hunderttheile u. ſ. w. der Einheit enthält, folglich die Einheit in der erſten Stelle in 10, in der zweiten in 100, in der dritten in 1000 gleiche Theile getheilt iſt: ſo haben die Zahlzeichen in der erſten Stelle von der Linken gegen die Rechte angerechnet, einen zehnmal kleinern Werth als die Einer; die Zahlzeichen in der zweiten Stelle, einen hundertmal kleinern, als die Einer, oder einen zehnmal kleinern Werth als die Zahlzeichen in der erſten Stelle u. ſ. w., und gehören demnach zu verſchiedenen, aber abnehmenden Decimalordnungen auf eben die Art, wie die Zahlzeichen der ganzen Zahlen zu verſchiedenen, aber zunehmenden Decimalordnungen gehören.

So iſt die Zahl 12,450678 $= \frac{12450678}{1000000} = 12\frac{450678}{1000000} = 12 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{7}{100000} + \frac{8}{1000000}$.

§. 101.

§. 101.

Iſt die Stelle der Einer in der ganzen Zahl durch das Komma beſtimmt 0, oder dem Decimalbruche eine 0 mit dem Komma vorangeſetzt, ſo kann man demſelben rechter Hand ſo viele Nullen beifügen, als man will, ohne daß der Werth des Bruches geändert wird; denn dadurch wird nicht nur der Zähler, ſondern auch der Nenner entweder mit 10 oder 100 u. ſ. w. multiplicirt, welches aber den Werth des Bruchs nicht ändert (§. 65.)

So iſt z. B. 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 d. i. $\frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{400}{1000} = \frac{4000}{10000}$.

Demnach kann man auf eine ſehr leichte Art Decimalbrüche unter einerlei Benennung bringen, indem man nur denjenigen Zählern, die weniger Decimalſtellen haben, als die übrigen, rechter Hand ſo viele Nullen beizufügen nöthig hat, daß ſie alsdenn eben ſo viele Zahlzeichen und Nullen haben, als die Zähler mit der größten Anzahl der Decimalſtellen. Sind z. B. die Brüche 0,5; 0,45; 0,205; 0,00456 gegeben; ſo iſt der größte Nenner 100000, folglich hat man durch Beiſetzung der Nullen rechter Hand, anſtatt

0,5	=	0,50000
0,45	=	0,45000
0,205	=	0,20500
0,00456	=	0,00456

Auf eine ähnliche Art kann man auch jede ganze Zahl wie einen Decimalbruch und zwar unter jedem gegebenen oder beliebigen Nenner ausdrücken. So iſt z. B. 4 = 4,0 = $\frac{40}{10}$; 4 = 4,00 = $\frac{400}{100}$; 4 = 4,000 = $\frac{4000}{1000}$ u. ſ. w.

§. 102.

Will man den Namen irgend einer Decimalſtelle im Zähler eines Decimalbruchs ſuchen, ſo zähle man die Ei-

ner der ganzen Zahl, oder wenn keine vorhanden, die Null als die erſte Stelle, und ſuche ſo, wie bei ganzen Zahlen, nur hier von der Linken zur Rechten, die Tauſendtheile in der vierten, die Milliontheile in der ſiebenten Stelle u. ſ. w.

Anmerkung.

Erfindung und Gebrauch der Decimalbrüche rühren aus dem 15ten Jahrhunderte her. Ein Deutſcher, Regiomontan aus Königsberg in Franken, entwickelte ſie, und machte ihre Anwendung bekannt. Sie nützen nicht bloß dem Geometer, ſondern ihr Gebrauch erſtreckt ſich auch auf andere Fälle im praktiſchen Rechnungsweſen.

I.

Die Addition.

§. 103.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genaunte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu addiren.

Auflöſung.

Man ſetze die Zahlzeichen der ganzen Zahlen ſowohl als der Decimalbrüche, ſo unter einander, daß die von einerlei Ordnung oder aus einerlei Stelle untereinander in eine Reihe zu ſtehen kommen, addire, wie bei ganzen Zahlen (§. 33.) und ſetze das Komma zwiſchen die ganze Zahl und den Decimalbruch.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.	4,508
	12,1068
	4,215
	126,2
Summe	147,0298

Nach

Nach §. 101. ſollten die Brüche unter einerlei Benennung gebracht werden, nämlich:

4,5080
12,1068
4,2150
126,2000

Summe 147,0298

Da die Zähler derjenigen Brüche, welche weniger Zahlzeichen als die übrigen haben, wenn ſie unter einerlei Benennung gebracht worden, rechter Hand Nullen erhalten, Nullen aber nicht addiren; ſo iſt es gleichgültig, ob man ſie unter einerlei Benennung bringt oder nicht, und dieſe Operation wird auch dadurch ſchon entbehrlich gemacht, daß die Decimaltheile, welche zu einerlei Ordnung gehören, wie im erſten Beiſpiele, in eine Reihe untereinander ſind geſetzt worden; demnach kann man ſich in der Ausübung der erſtern kürzern Art zu addiren, bedienen.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Ein Förſter habe z. B. ſeinen Forſt nach Länge und Breite ausgemeſſen, und gefunden, daß derſelbe an der öſtlichen Breite $42^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}\ 7^{III}\ 8^{IV}$, an der ſüdlichen Länge $987^{\circ}\ 6^{I}\ 5^{II}\ 9^{III}\ 7^{IV}$, an der gegenüberliegenden nördlichen Länge $2136^{\circ}\ 9^{I}\ 7^{II}\ 7^{III}$, und endlich an der weſtlichen Breite $59^{\circ}\ 7^{I}\ 6^{II}\ 3^{III}\ 9^{IV}$ gehalten habe. Die Frage iſt, wieviel der Umfang des Forſtes betrage? $3226^{\circ}\ 9^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}\ 4^{IV}$;

nämlich: $42{,}5678^{IV}$
987,6597
2136,9770
59,7639

Summe 3226,9084 Ruthen (§. 98.)

d. i. $3226^{\circ}\ 9^{I}\ 6^{II}\ 8^{III}\ 4^{IV}$, weil hier die Ruthen als ganze Zahlen, die Fuße, Zolle, Linien und Skrupel aber als Decimalbrüche betrachtet werden können.

b) Quadratmaße.

Ein Landwirth hat ſeine Breite gemeſſen, und die Größe des Inhalts im Quadratmaße und zwar Stückweiſe ſo gefunden, daß ſie halte 847 R^q 34 F^q + 1190 R^q + 139 R^q 95 F^q 60 Z^q + 729 R^q 34 F^q; was beträgt der ganze Inhalt? 2906 R^q 63 F^q 60 Z^q;

nämlich: 847,34
1190,
139,9560
729,34

Summe 2906,6360 Quadratruthen (§. 98.)

d. i. 2906 Quadratruthen, 63 Quadratfuß und 60 Quadratzolle.

c) Kubikmaße.

Ein Förſter hat den körperlichen Inhalt von vier Eichen, die in ſeinem Forſte ſtehen, berechnet, und gefunden, daß die 1ſte 3002 F^c 901 Z^c 483 L^c; die 2te 138 F^c 831 Z^c; die 3te 320 F^c, und die 4te 873 F^c 810 Z^c 207 L^c gehalten: wieviel betragen ſie zuſammen an Holzbeſtande in Kubikmaße? 4335 F^c 542 Z^c 690 L^c;

nämlich: 3002,901483
138,831
320,
873,810207

4335,542690 Kubikruthen (§. 98.)

d. i. weil die Ganzen Fuße heißen 4335 Kubikfuße, 542 Kubikzolle, 690 Kubiklinien.

Wenn man die Decimalbrüche nach §. 101. unter einerlei Benennung bringt, ſo darf man nur die Zähler adbiren,

diren, und den gemeinſchaftlichen Nenner behalten. Da aber dadurch die fehlenden Stellen in den Zählern nur Nullen bekommen, ſo wird auch die Summe gefunden, wenn man nur diejenigen Zahlzeichen der Zähler, die zu einerlei Benennung gehören, addirt; demnach iſt, da in jedem Falle dieſes Verfahren befolgt worden, die gefundene Summe richtig.

II.

Die Multiplikation.

§. 104.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu multipliciren.

Auflöſung.

Man ſetzt den Multiplikator unter das Multiplikandum, wie bei den ganzen Zahlen, und **multiplicirt**. Dem Produkte giebt man ſo viele Decimalſtellen als beide Faktoren zuſammen genommen enthalten. Gehen aber den Decimalſtellen in den Faktoren Nullen voran, und mangeln vielleicht auch die ganzen Zahlen völlig, ſo erhält man bisweilen im Produkte weniger Decimalſtellen, als beide Faktoren zuſammengenommen enthalten; in dieſem Falle ſetzt man an die Decimalſtellen des Produkts linker Hand ſo viele Nullen, bis man die gehörige Anzahl der Decimalſtellen erhalten hat, und ſetzt überdies in Ermangelung der ganzen Zahlen, noch eine Null mit dem Komma voran.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.

```
          6,423
           0,25
        -------
          32115
         12846
        -------
Produkt 1,60575
```

ferner:

```
        0,00023
            4,6
        -------
            138
            92
        -------
Produkt 0,001058
```

Endlich:

```
 1,25
  1,6
 ----
  750
 125
 ----
2,000 = 2.
```

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Soll man 232 Ruthen 3 Fuß 4 Zoll 5 Linien und 4 Skrupel, mit 0,234 multipliciren, ſo erhält man im Produkte 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien und 8 Skrupel, und überdies noch $\frac{235}{1000}$ eines Skrupels, die man auf folgende Art bezeichnen 2^{v} 3^{vi} 6^{vii}, aber auch ganz weglaſſen kann, weil ſo kleine Theile des Längenmaßes in der Ausübung wenig bedeuten;

nämlich:

```
        232,3454^iv
          0,234
        ----------
          9293816
         6970362
        4646908
        ----------
Produkt 54,3688236 Ruthen.
```

d. i. 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien 8 Skrupel und $\frac{235}{1000}$ eines Skrupels, die man wegläßt und alſo nur 54^{0} 3^{I} 6^{II} 8^{III} 8^{IV} = 54,3688 Ruthen behält.

b) Qua-

b) Quadratmaße.

Eine Forſtbreite iſt 20 R^q 23 F^q 10 Z^q lang, und 9 R^q 87 F^q 60 Z^q breit; wie groß iſt der Flächeninhalt? Wenn man dieſen Inhalt findet, wenn Länge und Breite in einander multiplicirt werden: ſo iſt derſelbe 199 R^q 80 F^q 13 Z^q 56 L^q;

nämlich:

```
        20,2310
         9,8760
      ---------
        121 386
      1 416 17
     16 1848
    182 079
    -----------
    199,80135600
```

199,80135600 Quadratruthen (§ 98.)

d. i. 199 Quadratruthen, 80 Quadratfuß, 13 Quadratzolle und 56 Quadratlinien.

c) Kubikmaße.

Es iſt ein Einlaß Flößholz aufgeſchlichtet worden, deſſen Länge 21 R 4 F, die Breite 2 R 8 F, die Höhe aber nur 6 F beträgt; wie groß iſt der körperliche Inhalt?

Findet man dieſen Inhalt, wenn man ein Produkt aus der Länge, Breite und Höhe der gegebenen Maße macht; ſo iſt derſelbe 35 R^c 952 F^c. Soll man nun angeben, wieviel Holz in Klaftern aus dieſem Einlaſſe aufgeſetzt werden können, wenn die Klafter zu 121 Kubikfuß, bei einer 6 Fuß großen Scheitlänge gerechnet wird; ſo erhält man die Klafterzahl, wenn man mit 121 in 35 R^c 952 F^c dividirt, und die Anzahl der Klaftern beträgt 297, und überdies noch 15 Kubikfuß; nämlich:

21,4	Ruthen Länge.
2,8	— Breite.
171 2	
428	
59,92	Quadratruthen Grundfläche.
0,6	Ruthen, d. i. 6 Fuß Höhe.
35,952	Kubikinhalt.

Dieſe 35 R^c 952 F^c ſind gleich 35952 Kubikfuß, die Ruthe zu 1000 Fuß gerechnet;

also 121) 35952 | 297 Klaftern.
242..
1175.
1089.
862
847
15 Kubikfuß.

Durch das Produkt der Zähler, welches nach den Begriffen der Multiplikation in ganzen Zahlen iſt geſucht worden, hat man auch das Produkt der Nenner gefunden, welches in jedem Falle ſo viele Nullen hat, als beide Zähler zuſammen genommen Zahlzeichen haben, d. i. Eins mit einer ſolchen Reihe rechter Hand daran hängender Nullen, weil jeder Nenner für ſich ſo viele Nullen hat, als ſein Zähler Zahlzeichen enthält; demnach iſt das gefundene Produkt das richtige.

III.

Die Subtraktion.

§. 105.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu ſubtrahiren.

Auf-

Aufløſung.

Man ſetze die Zahlzeichen der ganzen Zahlen ſowohl, als auch der Decimalbrüche eben ſo, wie bei der Addition (§. 103.) untereinander, daß die von einerlei Ordnung oder einerlei Stelle untereinander in eine Reihe zu ſtehen kommen, ſubtrahire die kleinere Zahl von der größern und ſetze das Komma zwiſchen die ganze Zahl und den Decimalbruch.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.	12,4578	Oder:	24,053200
	8,1250		6,594067
Differenz	4,3328		17,459133

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Man ſubtrahire $34^{0}\ 5^{I}\ 6^{II}\ 7^{III}\ 8^{IV} = 34,5678$ Ruthen, von $98^{0}\ 7^{I}\ 6^{II}\ 5^{III}\ 4^{IV} = 98,7654$ Ruthen; die Differenz iſt $64^{0}\ 1^{I}\ 9^{II}\ 7^{III}\ 6^{IV} = 64,1976$ Ruthen, nämlich:

	98,7654
	34,5678
Differenz	64,1976 Ruthen

Desgleichen: Ein Forſtbedienter ſoll von einer Länge von $11^{0}\ 7^{I}\ 4^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 11,7428$ Ruthen, eine andere von $3^{0}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 3,2028$ Ruthen Länge ſubtrahiren; wie groß iſt der Reſt? 8,54 Ruthen, nämlich:

11,7428
3,2028
8,5400 Ruthen

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 4 Zoll.

b) Quadratmaße.

Ein Stück Acker mit Holz bewachſen, hält 75 R^q 30 F^q. Davon werden verkauft 49 R^q 95 F^q 43 Z^q; wie groß iſt der Reſt? 25 R^q 34 F^q 57 Z^q.

$$\begin{array}{r} 75{,}3000 \\ 49{,}9543 \\ \hline 25{,}3457 \end{array}$$ Quadratruthen.

d. i. 25 Quadratruthen, 34 Quadratfuß, 57 Quadratzoll.

c) Kubikmaße.

Es ſind 85 R^c 754 F^c 324 Z^c an Flößholz aufgeſchlichtet worden. Von dieſen aber hat man nach und nach an Klaftern aufgeſetzet, 52 R^c 154 F^c; wie viel iſt noch zu Klaftern vorräthig? 33 R^c 600 F^c 324 Z^c.

$$\begin{array}{r} 85{,}754324 \\ 52{,}154000 \\ \hline 33{,}600324 \end{array}$$ Kubikruthen.

d. i. 33 Kubikruthen, 600 Kubikfuß, 324 Kubikzoll.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 104, wenn man hier Subtraktion, ſtatt dort Addition ſetzt.

Anmerkung.

Auch bei den Decimalbrüchen dient die Subtraktion der Addition, und die Addition der Subtraktion zur Probe.

IV. Die Diviſion.

§. 106. Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu dividiren.

Auf=

Auflöſung.

1) In ungenannten Zahlen.

Hierbei kommen folgende Unterſuchungen vor:

a) Ob das Dividendum eben ſo viele Decimalſtellen hat, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man an daſſelbe ſo viele Nullen rechter Hand ſetzen, bis beide eine gleiche Anzahl haben.

b) Ob, wenn man beide gegebene Zahlen als ganze betrachtet, das Dividendum größer iſt, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man, wenn es an Stellen fehlt, an das Dividendum auch in dieſem Falle ſo viele Nullen rechter Hand ſetzen, als erforderlich ſind, damit man wirklich dividiren kann.

Nach dieſen Betrachtungen und der erforderlichen Zurichtung der Zahlen zum Dividiren, dividire man wie bey ganzen Zahlen, und höre da auf, wo man aufhören würde, wenn die Zahlen ganze Zahlen wären; gebe aber dem Quotienten von der Rechten zur Linken ſo viele Decimalſtellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der Anzahl im Dividend ſubtrahirt.

Die verſchiedenen, bey dieſer Diviſion vorkommenden Fälle, werden am leichteſten durch Beiſpiele erläutert.

Erſter Fall: $8^{0}4'4''8''' : 9^{0}6'$, d. i. 8, 448 : 9, 6

```
9,6) 8,448 | 0,88
     7 68
     ----
      768
      768
     ----
        0
```

 Hier

Hier dividiret man auf folgende Art: 9 in 8 oder, wenn man die Zahlen als ganze anſieht, 96 in 84 hat man 0 im Quotienten; nimmt man nun zum Dividend das folgende Zahlzeichen 4, ſo hat man 96 in 844; 8 mal u. ſ. w. woraus man ſieht, wie man ſich überhaupt zu verhalten hat, wenn der Diviſor größer iſt, als das Dividendum.

Zweiter Fall: 6,495 : 2573,4.

```
2573,4)  6,4950 | 0,002
         5 1468
  Reſt   1 3482
```

d. i. 2573 in 6, hat man 0 Ganze; 2573 in 64 hat man 0 Zehntheile; 2573 in 649, 0 Hunderttheile; 2573 in 6495 aber 2 Tauſendtheile. Da nun der Diviſor noch 4 Zehntheile auſſer der ganzen Zahl hat, ſo ſetzt man an das Dividendum 0 um die fehlende Stelle zu ergänzen, und dividirt als wenn die Zahlen hießen 25734 in 64950.

Dritter Fall: 5,49 : 2,57

```
2,57)  5,49 | 2
       5 14
Reſt     35
```

Vierter Fall: 0,42 : 8,41

```
8,41)  0,4200 | 0,04
         3364
  Reſt    836
```

d. i.

d. i. 8 in 0 hat man 0 Ganze; 8 in 4, 0 Zehntheile; 8 in 42, 4 Hunderttheile. Da nun der Diviſor überdies noch 2 Decimalſtellen, das Dividendum aber keine mehr hat, ſo giebt man demſelben noch 2 Nullen, und dividirt wie bey ganzen Zahlen, nämlich 841 in 4200, und erhält den Quotient.

Fünfter Fall: 15,8 : 6,247

6,247) 15,800 | 4
12 494
3 306

Hier ſagt man 6 in 15, 2 mal. Da aber das Dividendum nur eine, der Diviſor hingegen drei Decimalſtellen hat, ſo giebt man dem Dividend noch 2 Nullen, und findet eben ſo 6247 in 15800, 2 mal, wo denn die Zahl 2 natürlich Ganze bezeichnen muß.

Sechſter Fall: 86,29 : 431,416

431,416) 86,2900 | 0,2
86 2832
Reſt 68

d. i. 431 in 86 hat man 0 Ganze; 431 aber in 862, 2 Zehntheile. Da nun dem Dividend gegen den Diviſor noch 2 Decimalſtellen fehlen, ſo ergänzt man ſie durch Nullen und dividirt wie 431416 in 862900.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Eine Länge von 27 R 5 F = 27,5 ſoll in 3,2 Theile getheilt, d. i. mit 3,2 dividirt werden; wie groß iſt der Quotient? 8 R 5 F 9 Z 3 L 7 S 5 Q = 8,59375 Ruthen.

```
3,2) 27,500000 | 8,59375
     256.....
     ---
      190....
      160....
      ---
       300...
       288 ..
       ---
        120..
         96..
        ---
        240.
        224.
        ---
         160
         160
         ---
           0
```

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 9 Zoll, 3 Linien, 7 Skrupel und 5 Zehntheile vom Skrupel.

b) Quadratmaße.

Der Flächeninhalt einer mit Holz beſtandenen Horſt beträgt 26 R□ 26 F□ 80 Z□ = 26,2680 Quadratruthen; die Länge hingegen macht 4 R 34 F = 4,34 Ruthen. Wird nun die Breite gefunden, wenn man mit der Länge in die Fläche dividirt; wie groß iſt dieſe Breite: 6 R 0 F 5 Z 2 L 5 S 5 Q.

```
4,34) 26,268000 | 6,0525 Ruthen.
      2604   ..
      ----
        2280..
        2170..
        ----
         1100.
          878.
         ----
          2220
          2170
          ----
            50
```

d. i. 6 Ruthen, 0 Fuß, 5 Zoll, 2 Linien, 5 Skrupel, 5 Zehntheile vom Skrupel.

c) Körpermaße.

Der körperliche Inhalt von einem Satze Holz beträgt 20 Kubikruthen 976 Kubikfuß = 20,976 Kubikruthen. Die Fläche dieſes Satzes aber 4 Quadratruthen 56 Quadratfuß = 4,56 Quadratruthen. Wird nun die Höhe des Satzes gefunden, wenn man mit der Fläche (Grundfläche) in den körperlichen Inhalt dividirt; wie groß iſt dieſe Höhe? 4 R 6 F.

```
4,56) 20,976 | 4,6 Ruthen
      1824
      ----
       2736
       2736
       ----
          0
```

d. i. 4 Ruthen 6 Fuß.

Durch das Zuſetzen der Nullen im Dividend, wo es nämlich nöthig iſt, werden die Brüche in ihrem Werthe nicht geändert und können überdies wie ganze Zahlen betrachtet werden; demnach ſind die verſchiedenen Fälle der Diviſion ſchon durch die gemeine Diviſion bewieſen (§ 55).

So iſt im erſten Falle 8, 448 : 9,6 = $\frac{8448}{1000}$: $\frac{96}{10}$ = $\frac{8448.10}{96.1000}$ = $\frac{8448}{96}$. $\frac{1}{100}$ = 0,88. Auf eben dieſe Art laſſen ſich auch die andern Fälle beweiſen.

§. 107.

In den Fällen, wo ein Reſt bleibt, kann man den Quotient noch genauer, d. i. in mehreren Decimaltheilen finden, wenn man demſelben eine oder mehrere Nullen beifügt und weiterfort dividirt (wie in N. 2. lit. a und b); hier-

hierdurch wird der Werth des Decimalbruchs nicht geändert, weil man, wenn der Zähler eine oder mehrere Nullen erhält, auch zugleich den Nenner mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicirt. Die Diviſion kann man dann ſo lange fortſetzen, bis alles aufgeht, oder bis man aus andern Gründen überzeugt iſt, daß der Quotient für den Gebrauch Genauigkeit genug hat. Bliebe zuletzt dennoch ein Reſt, ſo könnte man dieſen als einen Bruch an den Diviſor ſetzen, in welchem der Zähler der Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt mit ſo vielen rechter Hand angeſetzten Nullen, als man im Quotienten bis dahin Decimalſtellen erhalten hat.

Es ſey z. B. 5,49 : 2,57

```
2,57)  5,49 | 2,136186 + 198/257000000
       514
       ---
        350
        257
        ---
         930
         771
         ---
         1590
         1542
         ----
           480
           257
           ---
          2230
          2056
          ----
           1740
           1542
           ----
   Reſt     198
```

Den Reſt $\frac{198}{257000000}$ oder $\frac{198}{257}$ Milliontheile kann man weglaſſen, ohne daß man Unrichtigkeiten befürchten darf; denn würde 198 bis zu 257 ergänzt, ſo wäre $\frac{257}{257}$ ein Milliontheil, und aus den im Quotient befindlichen 6 Millio-

6 Milliontheilen würden nun 7. Wäre der Fall der, daß die 2 Ganze, Ruthen hießen, ſo hätte man im Decimalbruche noch 1 Fuß, 3 Zoll, 6 Linien, 1 Skrupel, 8 Zehntheile und 6 Hunderttheile eines Skrupels; folglich wären $\frac{198}{257}$ Hunderttheile eines Skrupels, die alſo in der Ausübung in keine Betrachtung kommen können. In den meiſten Fällen kann man die Diviſion mit Sicherheit mit der dritten, oder doch höchſtens mit der vierten Decimalſtelle, endigen.

§. 108.

Iſt das Dividendum eine ganze Zahl, der Diviſor aber eine ganze Zahl mit einem angehängten Decimalbruche, alſo eine gemiſchte Zahl, und die Diviſion geht da nicht auf, wo man bey der gemeinen Diviſion aufhört zu dividiren; ſo hängt man auch hier an den Reſt ſo viele Nullen, als man nöthig zu haben glaubt, oder fügt dem jedesmaligen Reſte eine Null bei und dividirt. Hat man nicht gleich anfänglich die Ganzen im Quotient marquirt, ſo erhält der Quotient ſo viele Decimalſtellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der an den Reſt geſetzten Anzahl, ſubtrahirt. So iſt z. B. 5432 : 2,4 der Quotient 2263,33 .... wo denn die Punkte noch folgende Decimaltheile bezeichnen.

§. 109.

Einen ächten Decimalbruch oder eine gemiſchte Decimalzahl multiplicirt und dividirt man mit 10, 100, 1000, 10000 u. ſ. w. wenn man bei der Multiplikation das Komma des Multiplikandums ſo viele Stellen gegen die rechte Hand, und bei der Diviſion, das Komma des Dividendums ſo viele Stellen gegen die linke Hand zurückt, als im erſten Falle der Multiplikator, und im zweiten Falle der Diviſor Nullen neben der Eins hat.

Wird z. B. 12,45967 mit 10000 multiplicirt, ſo iſt das Produkt = 124596,7; mit 1000 iſt das Produkt = 12459,67; mit 100 iſt es = 1245,967; mit 10 aber = 124,5967.

Denn 12,45967
10000
12 4596,70000 (§. 104).

d. i. 124596,7 = 124596,70000 weil die Nullen rechter Hand den Werth des Decimalbruchs nicht ändern. Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch die andern Fälle dieſer Art von Multiplikation darthun.

Wird aber z. B. 124596,7 mit 10000 dividirt, ſo iſt der Quotient = 12,45967; mit 1000 iſt der Quotient 124,5967; mit 100 iſt er = 1245,967, mit 10 aber = 12459,67;

Denn 124596,7 | 12,45967 (§. 106.
10000) 10000
24596
20000
45967
40000
59670
50000
96700
90000
67000
60000
70000
70000
0

Auf

Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch hier die übrigen Fälle dieſer Diviſion darthun. Da Multiplikation und Diviſion einander aufheben, und die gefundenen Reſultate gerade einander entgegengeſetzt ſind, ſo hat das Verfahren ſeine Richtigkeit.

Weil nun Multiplikationen und Diviſionen der Decimalbrüche mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. in der Ausübung nicht ſelten vorkommen, ſo kann man mit vieler Zeiterſparung die Produkte und Quotienten nach den gegebenen Regeln beſtimmen, ohne daß man nöthig hat, wirklich zu multipliciren und zu dividiren.

Anmerkung.

Auch die Diviſion dient der Multiplikation, ſo wie die Multiplikation der Diviſion bei Decimalbrüchen zur Probe.

V.

Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

§. 110.

Durch die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche bezweckt man, einen gemeinen Bruch entweder vollkommen genau, oder beinahe in einem Decimalbruche auszudrücken, ſo, daß man in beiden Fällen, den Werth des einen für den Werth des andern ſetzen kann, ohne in der Ausübung fehlerhafte Folgen zu befürchten oder zu veranlaſſen.

Da nun in der Ausübung ſehr häufig gemeine Brüche vorkommen, die wegen des zehntheiligen Maßes, als Decimalbrüche ausgedrückt werden müſſen, ſo iſt es nöthig gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandeln zu können.

§. 111.

§. 111.

Aufgabe.

Gemeine ungenannte und genannte Brüche, ächte und unächte in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflöſung.

Man ſetze an den Zähler des gemeinen Bruchs rechter Hand ein Komma, und nach demſelben ſo viele Nullen als man für nöthig findet, oder ſetze, wenn ein Reſt bleibt, dieſem jedesmaligen Reſte rechter Hand eine Null bei und dividire.

1) Ungenannte Zahlen.

a) ächte gemeine Brüche, die vollkommen in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

2) 10 | 0,5	4) 30 | 0,75	5) 40 | 0,8
10	28	40
0	20	0
	20	
	0	

d. i. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{4}{5} = 0,8$.

b) ächte gemeine Brüche, die nur beinahe in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$ u. ſ. w.

3) 10 | 0,333...	3) 20 | 0,666...	9) 20 | 0,222...
9	18	18
10	20	20
9	18	18
10	20	20
9	18	18
Reſt 1	Reſt 2	Reſt 2

Hieraus ſieht man deutlich, daß die Diviſion ohne Ende fortgeſetzt werden kann, und der gefundene Decimalbruch doch nie genau ſo groß wird, als der gemeine, wenn man den Reſt wegläßt; denn der Reſt mit einer rechter Hand beigefügten Null iſt in keinem der gegenwärtigen Fälle ein Produkt, welches einen Faktor 3 oder 9 hat, in welchem Falle erſt die Diviſion aufgehen würde. Die Reſte $\frac{\frac{1}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{9}}{1000}$ ſind entweder ſchon ſo klein, daß man ſie in der Ausübung aus der Acht laſſen kann, oder ſie können doch in jedem Falle ſo klein gemacht werden, wenn man nur die Diviſion fortſetzt. Im allgemeinen aber iſt $0,333\ldots < \frac{1}{3}$; $0,666\ldots < \frac{2}{3}$; $0,222\ldots < \frac{2}{9}$: hingegen iſt $0,333\frac{\frac{1}{3}}{1000} = \frac{1}{3}$; $0,666\frac{\frac{2}{3}}{1000} = \frac{2}{3}$; $0,222\frac{\frac{2}{9}}{1000} = \frac{2}{9}$.

c) unächte Brüche und gemiſchte Decimalzahlen.

Wie groß iſt z. B. $2\frac{1}{4}$ in Decimaltheilen ausgedrückt? Man verwandele die gemiſchte Zahl in einen unächten Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch.

$2\frac{1}{4}$
$\frac{11}{4}$

$\frac{2\frac{3}{4}}{\frac{11}{4}}$

```
4) 11 | 2,75
    8
   ---
    30
    28
   ---
     20
     20
     --
      0
```

Demnach, da 2,75 = $2\frac{3}{4}$ iſt, ſo kann man auch die ganze Zahl ungeändert laſſen, und bloß den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln. Jeden unächten Bruch kann man daher auch in eine gemiſchte Zahl verwandeln, und den an ganzen Zahlen befindlichen ächten gemeinen Bruch, in einen Decimalbruch verwandeln; dem man nur nach der Verwandlung die ganze Zahl mit dem Komma vorſetzt.

2) Genannte Zahlen ſie mögen nun ächte oder unächte Brüche oder gemiſchte Zahlen ſeyn.

a) Längenmaße.

Wie viel betragen $\frac{5}{12}$ der Länge einer Ruthe, in kleinern Theilen, als Fuße, Zolle ꝛc.? $4^{I}\ 1^{II}\ 6^{III}\ 6^{IV}$ = 0,4166... Ruthen.

```
12) 50 | 0,4166...
    48
    --
     20
     12
     --
      80
      72
      --
      80
      72
      --
Reſt   8
```

d. i. $\frac{5}{12} = 0,4166 \ldots$ oder $0,4166\frac{\frac{8}{12}}{10000}$ Ruthen = 4 Fuß 1 Zoll 6 Linien 6 Skrupel.

b) Quadratmaße.

Wie viel beträgt der Werth von $\frac{4}{7}$ Quadratruthe in kleinern Theilen, oder im Decimalbruche? 57 F^q 14 Z^q 28 L^q = 0,571428 Quadratruthen.

```
7) 40 | 0,571428...
   35
   --
    50
    49
    --
     10
      7
     --
      30
      28
      --
       20
       14
       --
        60
        56
        --
  Reſt   4
```

d. i. $\frac{4}{7} = 0,571428 \ldots$ oder $0,571428\frac{\frac{4}{7}}{1000000}$ Quadratruthen = 57 Quadratfuß 14 Quadratzoll 28 Quadratlinien.

c) Kubikmaße.

Wie viel beträgt der Werth von $\frac{3}{11}$ Kubikruthe in kleinern Theilen, oder im Decimalbruche? 272 F^c 727 Z^c 272 L^c = 0,272727272 Kubikruthen.

11) 30 | 0,272727272...

```
30
22
—
 80
 77
 —
  30
  22
  —
   80
   77
   —
    30
    22
    —
     80
     77
     —
      30
      22
      —
       80
       77
       —
        30
        22
        —
   Reſt  8
```

d. i. $\frac{3}{11}$ Kubikr. = 0,272727272... oder 0,272727272 $+\frac{\frac{8}{11}}{1000000000}$ Kubikruthen = 272 Kubikfuße 727 Kubikzolle 272 Kubiklinien.

Anmerkung.

Der Gebrauch dieſer Decimalbrüche in der Geometrie wird ihre Nutzbarkeit und Unentbehrlichkeit noch mehr beſtätigen.

Sechſtes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt.

§. 112.

Eine **Quadratzahl** entſteht, wenn man eine Zahl mit ihr ſelbſt multiplicirt; eine **Kubikzahl** hingegen, wenn man die Quadratzahl abermals mit der Zahl multiplicirt, woraus jene entſtanden iſt. So giebt z. B. die Zahl 4 mit ihr ſelbſt multiplicirt 16, folglich iſt 16 die Quadratzahl von 4; 16 aber mit 4 multiplicirt, giebt 64, alſo iſt 64 die Kubikzahl von 4. Die der Quadratzahl zum Grunde liegende Zahl, heißt die **Quadratwurzel**, ſo wie die, welche der Kubikzahl zum Grunde liegt, die **Kubikwurzel** heißt.

So iſt z. B. 4 die Quadratwurzel von 16; ſo wie 4 die Kubikwurzel von 64.

Demnach iſt eine Zahl **quadriren** nichts anders, als ſie mit ihr ſelbſt multipliciren, d. i. ihre Quadratzahl angeben, und eine Zahl **kubiren heißt**, ihr Quadrat mit der Wurzel multipliciren, d. i. ihre Kubikzahl angeben.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B. 6,423
0,25
―――――
32115
12846
―――――
Produkt 1,60575

ferner: 0,00023
4,6
―――――
138
92
―――――
Produkt 0,001058

Endlich: 1,25
1,6
―――――
750
125
―――――
2,000 = 2.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Soll man 232 Ruthen 3 Fuß 4 Zoll 5 Linien und 4 Skrupel, mit 0,234 multipliciren, ſo erhält man im Produkte 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien und 8 Skrupel, und überdies noch $\frac{236}{1000}$ eines Skrupels, die man auf folgende Art bezeichnen 2^{v} 3^{vi} 6^{vii}, aber auch ganz weglaſſen kann, weil ſo kleine Theile des Längenmaßes in der Ausübung wenig bedeuten;

nämlich: $232{,}3454^{iv}$
0,234
―――――
9293816
6970362
4646908
―――――
Produkt 54,3688236 Ruthen.

d. i. 54 Ruthen 3 Fuß 6 Zoll 8 Linien 8 Skrupel und $\frac{236}{1000}$ eines Skrupels, die man wegläßt und alſo nur 54^{0} 3^{I} 6^{II} 8^{III} 8^{IV} = 54,3688 Ruthen behält.

b) Quadratmaße.

Eine Forſtbreite iſt 20 R^q 23 F^q 10 Z^q lang, und 9 R^q 87 F^q 60 Z^q breit; wie groß iſt der Flächeninhalt? Wenn man dieſen Inhalt findet, wenn Länge und Breite in einander multiplicirt werden: ſo iſt derſelbe 199 R^q 80 F^q 13 Z^q 56 L^q;

nämlich: 20,2310
9,8760

121 386
1 416 17
16 1848
182 079

199,80135600 Quadratruthen (§. 98.)

d. i. 199 Quadratruthen, 80 Quadratfuß, 13 Quadratzolle und 56 Quadratlinien.

c) Kubikmaße.

Es iſt ein Einlaß Flößholz aufgeſchlichtet worden, deſſen Länge 21 R 4 F, die Breite 2 R 8 F, die Höhe aber nur 6 F beträgt; wie groß iſt der körperliche Inhalt?

Findet man dieſen Inhalt, wenn man ein Produkt aus der Länge, Breite und Höhe der gegebenen Maße macht; ſo iſt derſelbe 35 R^c 952 F^c. Soll man nun angeben, wieviel Holz in Klaftern aus dieſem Einlaſſe aufgeſetzt werden können, wenn die Klafter zu 121 Kubikfuß, bei einer 6 Fuß großen Scheitlänge gerechnet wird; ſo erhält man die Klafterzahl, wenn man mit 121 in 35 R^c 952 F^c dividirt, und die Anzahl der Klaftern beträgt 297, und überdies noch 15 Kubikfuß; nämlich:

21,4 Ruthen Länge.
2,8 — Breite.

1712
428

59,92 Quadratruthen Grundfläche.
0,6 Ruthen, d. i. 6 Fuß Höhe.

35,952 Kubikinhalt.

Dieſe 35 R^{c} 952 F^{c} ſind gleich 35952 Kubikfuß, die Ruthe zu 1000 Fuß gerechnet;

alſo 121) 35952 | 297 Klaftern.
242 . .
1175 .
1089 .
862
847
15 Kubikfuß.

Durch das Produkt der Zähler, welches nach den Begriffen der Multiplikation in ganzen Zahlen iſt geſucht worden, hat man auch das Produkt der Nenner gefunden, welches in jedem Falle ſo viele Nullen hat, als beide Zähler zuſammen genommen Zahlzeichen haben, d. i. Eins mit einer ſolchen Reihe rechter Hand daran hängender Nullen, weil jeder Nenner für ſich ſo viele Nullen hat, als ſein Zähler Zahlzeichen enthält; demnach iſt das gefundene Produkt das richtige.

III.

Die Subtraktion.

§. 105.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu ſubtrahiren.

Auf-

Aufloſung.

Man ſetze die Zahlzeichen der ganzen Zahlen ſowohl, als auch der Decimalbrüche eben ſo, wie bei der Addition (§. 103.) untereinander, daß die von einerlei Ordnung oder einerlei Stelle untereinander in eine Reihe zu ſtehen kommen, ſubtrahire die kleinere Zahl von der größern und ſetze das Komma zwiſchen die ganze Zahl und den Decimalbruch.

1) In ungenannten Zahlen.

Es ſei z. B.	12,4578	Oder:	24,053200
	8,1250		6,594067
Differenz	4,3328		17,459133

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Man ſubtrahire $34^{\circ}\ 5^{I}\ 6^{II}\ 7^{III}\ 8^{IV} = 34,5678$ Ruthen, von $98^{\circ}\ 7^{I}\ 6^{II}\ 5^{III}\ 4^{IV} = 98,7654$ Ruthen; die Differenz iſt $64^{\circ}\ 1^{I}\ 9^{II}\ 7^{III}\ 6^{IV} = 64,1976$ Ruthen, nämlich:

	98,7654
	34,5678
Differenz	64,1976 Ruthen

Desgleichen: Ein Forſtbedienter ſoll von einer Länge von $11^{\circ}\ 7^{I}\ 4^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 11,7428$ Ruthen, eine andere von $3^{\circ}\ 2^{I}\ 0^{II}\ 2^{III}\ 8^{IV} = 3,2028$ Ruthen Länge ſubtrahiren; wie groß iſt der Reſt? 8,54 Ruthen, nämlich:

11,7428
3,2028
8,5400 Ruthen

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 4 Zoll.

b) Quadratmaße.

Ein Stück Acker mit Holz bewachſen, hält 75 R^q 30 F^q. Davon werden verkauft 49 R^q 95 F^q 43 Z^q; wie groß iſt der Reſt? 25 R^q 34 F^q 57 Z^q.

$$\begin{array}{r} 75,3000 \\ 49,9543 \\ \hline 25,3457 \end{array}$$ Quadratruthen.

d. i. 25 Quadratruthen, 34 Quadratfuß, 57 Quadratzoll.

c) Kubikmaße.

Es ſind 85 R^c 754 F^c 324 Z^c an Flößholz aufgeſchlichtet worden. Von dieſen aber hat man nach und nach an Klaftern aufgeſetzet, 52 R^c 154 F^c; wie viel iſt noch zu Klaftern vorräthig? 33 R^c 600 F^c 324 Z^c.

$$\begin{array}{r} 85,754324 \\ 52,154000 \\ \hline 33,600324 \end{array}$$ Kubikruthen.

d. i. 33 Kubikruthen, 600 Kubikfuß, 324 Kubikzoll.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 104, wenn man hier Subtraktion, ſtatt dort Addition ſetzt.

Anmerkung.

Auch bei den Decimalbrüchen dient die Subtraktion der Addition, und die Addition der Subtraktion zur Probe.

IV.

Die Diviſion.

§. 106.

Aufgabe.

Ganze Zahlen mit Decimalbrüchen, ungenannte und genannte, d. i. gemiſchte Zahlen dieſer Art zu dividiren.

Auf=

Aufloſung.

1) In ungenannten Zahlen.

Hierbei kommen folgende Unterſuchungen vor:

a) Ob das Dividendum eben ſo viele Decimalſtellen hat, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man an daſſelbe ſo viele Nullen rechter Hand ſetzen, bis beide eine gleiche Anzahl haben.

b) Ob, wenn man beide gegebene Zahlen als ganze betrachtet, das Dividendum größer iſt, als der Diviſor; wo nicht, ſo muß man, wenn es an Stellen fehlt, an das Dividendum auch in dieſem Falle ſo viele Nullen rechter Hand ſetzen, als erforderlich ſind, damit man wirklich dividiren kann.

Nach dieſen Betrachtungen und der erforderlichen Zurichtung der Zahlen zum Dividiren, dividire man wie bey ganzen Zahlen, und höre da auf, wo man aufhören würde, wenn die Zahlen ganze Zahlen wären; gebe aber dem Quotienten von der Rechten zur Linken ſo viele Decimalſtellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der Anzahl im Dividend ſubtrahirt.

Die verſchiedenen, bey dieſer Diviſion vorkommenden Fälle, werden am leichteſten durch Beiſpiele erläutert.

Erſter Fall: $8^{0}4^{\prime}4^{\prime\prime}8^{\prime\prime\prime} : 9^{0}6^{\prime}$, d. i. 8, 448 : 9, 6

```
9,6) 8,448 | 0,88
     7 68
     ----
      768
      768
     ----
        0
```

Hier dividiret man auf folgende Art: 9 in 8 oder, wenn man die Zahlen als ganze anſieht, 96 in 84 hat man 0 im Quotienten; nimmt man nun zum Dividend das folgende Zahlzeichen 4, ſo hat man 96 in 844, 8 mal u. ſ. w. woraus man ſieht, wie man ſich überhaupt zu verhalten hat, wenn der Diviſor größer iſt, als das Dividendum.

Zweiter Fall: 6,495 : 2573,4.

2573,4) 6,4950 | 0,002
5 1468
Reſt 1 3482

d. i. 2573 in 6, hat man 0 Ganze; 2573 in 64 hat man 0 Zehntheile; 2573 in 649, 0 Hunderttheile; 2573 in 6495 aber 2 Tauſendtheile. Da nun der Diviſor noch 4 Zehntheile auſſer der ganzen Zahl hat, ſo ſetzt man an das Dividendum 0 um die fehlende Stelle zu ergänzen, und dividirt als wenn die Zahlen hießen 25734 in 64950.

Dritter Fall: 5,49 : 2,57

2,57) 5,49 | 2
5 14
Reſt 35

Vierter Fall: 0,42 : 8,41

8,41) 0,4200 | 0,04
3364
Reſt 836

d. i.

d. i. 8 in 0 hat man 0 Ganze; 8 in 4, 0 Zehntheile; 8 in 42, 4 Hunderttheile. Da nun der Diviſor überdies noch 2 Decimalſtellen, das Dividendum aber keine mehr hat, ſo giebt man demſelben noch 2 Nullen, und dividirt wie bey ganzen Zahlen, nämlich 841 in 4200, und erhält den Quotient.

Fünfter Fall: 15,8 : 6,247

```
6,247)  15,800 | 4
        12494
        -----
         3306
```

Hier ſagt man 6 in 15, 2 mal. Da aber das Dividendum nur eine, der Diviſor hingegen drei Decimalſtellen hat, ſo giebt man dem Dividend noch 2 Nullen, und findet eben ſo 6247 in 15800, 2 mal, wo denn die Zahl 2 natürlich Ganze bezeichnen muß.

Sechſter Fall: 86,29 : 431,416

```
431,416)  86,2900 | 0,2
          86 2832
          -------
          Reſt 68
```

d. i. 431 in 86 hat man 0 Ganze; 431 aber in 862, 2 Zehntheile. Da nun dem Dividend gegen den Diviſor noch 2 Decimalſtellen fehlen, ſo ergänzt man ſie durch Nullen und dividirt wie 431416 in 862900.

2) In genannten Zahlen.

a) Längenmaße.

Eine Länge von 27 R 5 F = 27, 5 ſoll in 3,2 Theile getheilt, d. i. mit 3,2 dividirt werden; wie groß iſt der Quotient? 8 R 5 F 9 Z 3 L 7 S 5 Q = 8,59375 Ruthen.

```
3,2) 27,500000 | 8,59375
     256.....
     ---
      190....
      160....
      ---
       300...
       288 ..
       ---
        120..
         96..
        ---
        240.
        224.
        ---
         160
         160
         ---
           0
```

d. i. 8 Ruthen, 5 Fuß, 9 Zoll, 3 Linien, 7 Skrupel und 5 Zehntheile vom Skrupel.

b) Quadratmaße.

Der Flächeninhalt einer mit Holz beſtandenen Horſt beträgt 26 R□ 26 F□ 80 Z□ = 26,2680 Quadratruthen; die Länge hingegen macht 4 R 34 F = 4,34 Ruthen. Wird nun die Breite gefunden, wenn man mit der Länge in die Fläche dividirt; wie groß iſt dieſe Breite: 6 R 0 F 5 Z 2 L 5 S 5 Q.

```
4,34) 26,268000 | 6,0525 Ruthen.
      2604  ..
      ----
       2280..
       2170..
       ----
        1100.
         878.
        ----
        2220
        2170
        ----
          50
```

d. i. 6 Ruthen, 0 Fuß, 5 Zoll, 2 Linien, 5 Skrupel, 5 Zehntheile vom Skrupel.

c) Körpermaße.

Der körperliche Inhalt von einem Satze Holz beträgt 20 Kubikruthen 976 Kubikfuß = 20,976 Kubikruthen. Die Fläche dieſes Satzes aber 4 Quadratruthen 56 Quadratfuß = 4,56 Quadratruthen. Wird nun die Höhe des Satzes gefunden, wenn man mit der Fläche (Grundfläche) in den körperlichen Inhalt dividirt; wie groß iſt dieſe Höhe? 4 R 6 F.

```
4,56) 20,976 | 4,6 Ruthen
      18 24
      -----
       2 736
       2 736
       -----
           0
```

d. i. 4 Ruthen 6 Fuß.

Durch das Zuſetzen der Nullen im Dividend, wo es nämlich nöthig iſt, werden die Brüche in ihrem Werthe nicht geändert und können überdies wie ganze Zahlen betrachtet werden; demnach ſind die verſchiedenen Fälle der Diviſion ſchon durch die gemeine Diviſion bewieſen (§ 55).

So iſt im erſten Falle 8, 448 : 9,6 = $\frac{8448}{1000}$: $\frac{96}{10}$ = $\frac{8448.10}{96.1000}$ = $\frac{8448}{96} \cdot \frac{1}{100}$ = 0,88. Auf eben dieſe Art laſſen ſich auch die andern Fälle beweiſen.

§. 107.

In den Fällen, wo ein Reſt bleibt, kann man den Quotient noch genauer, d. i. in mehreren Decimaltheilen finden, wenn man demſelben eine oder mehrere Nullen beifügt und weiterfort dividirt (wie in N. 2. lit. a und b);

hierdurch wird der Werth des Decimalbruchs nicht geändert, weil man, wenn der Zähler eine oder mehrere Nullen erhält, auch zugleich den Nenner mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicirt. Die Diviſion kann man dann ſo lange fortſetzen, bis alles aufgeht, oder bis man aus andern Gründen überzeugt iſt, daß der Quotient für den Gebrauch Genauigkeit genug hat. Bliebe zuletzt dennoch ein Reſt, ſo könnte man dieſen als einen Bruch an den Diviſor ſetzen, in welchem der Zähler der Reſt, der Nenner aber der Diviſor iſt mit ſo vielen rechter Hand angeſetzten Nullen, als man im Quotienten bis dahin Decimalſtellen erhalten hat.

Es ſey z. B. 5,49 : 2,57

2,57) 5,49 | $2{,}136186 + \frac{198}{257000000}$
514
———
350
257
———
930
771
———
1590
1542
———
480
257
———
2230
2056
———
1740
1542
———
Reſt 198

Den Reſt $\frac{198}{257000000}$ oder $\frac{198}{257}$ Milliontheile kann man weglaſſen, ohne daß man Unrichtigkeiten befürchten darf; denn würde 198 bis zu 257 ergänzt, ſo wäre $\frac{257}{257}$ ein Millientheil, und aus den im Quotient befindlichen 6 Millio-

6 Milliontheilen würden nun 7. Wäre der Fall der, daß die 2 Ganze, Ruthen hießen, ſo hätte man im Decimalbruche noch 1 Fuß, 3 Zoll, 6 Linien, 1 Skrupel, 8 Zehntheile und 6 Hunderttheile eines Skrupels; folglich wären $\frac{198}{257}$ Hunderttheile eines Skrupels, die alſo in der Ausübung in keine Betrachtung kommen können. In den meiſten Fällen kann man die Diviſion mit Sicherheit mit der dritten, oder doch höchſtens mit der vierten Decimalſtelle, endigen.

§. 108.

Iſt das Dividendum eine ganze Zahl, der Diviſor aber eine ganze Zahl mit einem angehängten Decimalbruche, alſo eine gemiſchte Zahl, und die Diviſion geht da nicht auf, wo man bey der gemeinen Diviſion aufhört zu dividiren; ſo hängt man auch hier an den Reſt ſo viele Nullen, als man nöthig zu haben glaubt, oder fügt dem jedesmaligen Reſte eine Null bei und dividirt. Hat man nicht gleich anfänglich die Ganzen im Quotient marquirt, ſo erhält der Quotient ſo viele Decimalſtellen als übrig bleiben, wenn man die Anzahl derſelben im Diviſor von der an den Reſt geſetzten Anzahl, ſubtrahirt. So iſt z. B. 5432 : 2,4 der Quotient 2263,33 .... wo denn die Punkte noch folgende Decimaltheile bezeichnen.

§. 109.

Einen ächten Decimalbruch oder eine gemiſchte Decimalzahl multiplicirt und dividirt man mit 10, 100, 1000, 10000 u. ſ. w. wenn man bei der Multiplikation das Komma des Multiplikandums ſo viele Stellen gegen die rechte Hand, und bei der Diviſion, das Komma des Dividendums ſo viele Stellen gegen die linke Hand zurückt, als im erſten Falle der Multiplikator, und im zweiten Falle der Diviſor Nullen neben der Eins hat.

Wird z. B. 12,45967 mit 10000 multiplicirt, ſo iſt das Produkt = 124596,7; mit 1000 iſt das Produkt = 12459,67; mit 100 iſt es = 1245,967; mit 10 aber = 124,5967.

```
Denn  12,45967
          10000
      ------------
      12 4596,70000  (§. 104).
```

d. i. 124596,7 = 124596,70000 weil die Nullen rechter Hand den Werth des Decimalbruchs nicht ändern. Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch die andern Fälle dieſer Art von Multiplikation darthun.

Wird aber z. B. 124596,7 mit 10000 dividirt, ſo iſt der Quotient = 12,45967; mit 1000 iſt der Quotient 124,5967; mit 100 iſt er = 1245,967, mit 10 aber = 12459,67;

```
Denn   124596,7 | 12,45967 (§. 106.
10000) 10000
       ------
        24596
        20000
        ------
         45967
         40000
         ------
          59670
          50000
          ------
           96700
           90000
           ------
            67000
            60000
            ------
             70000
             70000
             ------
                 0
```

Auf

Auf eine ähnliche Art laſſen ſich auch hier die übrigen Fälle dieſer Diviſion darthun. Da Multiplikation und Diviſion einander aufheben, und die gefundenen Reſultate gerade einander entgegengeſetzt ſind, ſo hat das Verfahren ſeine Richtigkeit.

Weil nun Multiplikationen und Diviſionen der Decimalbrüche mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. in der Ausübung nicht ſelten vorkommen, ſo kann man mit vieler Zeiterſparung die Produkte und Quotienten nach den gegebenen Regeln beſtimmen, ohne daß man nöthig hat, wirklich zu multipliciren und zu dividiren.

Anmerkung.

Auch die Diviſion dient der Multiplikation, ſo wie die Multiplikation der Diviſion bei Decimalbrüchen zur Probe.

V.

Die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

§. 110.

Durch die Verwandelung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche bezweckt man, einen gemeinen Bruch entweder vollkommen genau, oder beinahe in einem Decimalbruche auszudrücken, ſo, daß man in beiden Fällen, den Werth des einen für den Werth des andern ſetzen kann, ohne in der Ausübung fehlerhafte Folgen zu befürchten oder zu veranlaſſen.

Da nun in der Ausübung ſehr häufig gemeine Brüche vorkommen, die wegen des zehntheiligen Maßes, als Decimalbrüche ausgedrückt werden müſſen, ſo iſt es nöthig gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandeln zu können.

§. 111.

§. 111.

Aufgabe.

Gemeine ungenannte und genannte Brüche, ächte und unächte in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflöſung.

Man ſetze an den Zähler des gemeinen Bruchs rechter Hand ein Komma, und nach demſelben ſo viele Nullen als man für nöthig findet, oder ſetze, wenn ein Reſt bleibt, dieſem jedesmaligen Reſte rechter Hand eine Null bei und dividire.

1) Ungenannte Zahlen.

a) ächte gemeine Brüche, die vollkommen in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

```
2) 10 | 0,5      4) 30 | 0,75     5) 40 | 0,8
   10               28               40
   --               --               --
    0               20                0
                    20
                    --
                     0
```

d. i. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{4}{5} = 0,8$.

b) ächte gemeine Brüche, die nur beinahe in Decimalbrüche verwandelt werden können. Es ſei $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$ u. ſ. w.

3) 10 | 0,333...	3) 20 | 0,666...	9) 20 | 0,222...
9	18	18
10	20	20
9	18	18
10	20	20
9	18	18
Reſt 1	Reſt 2	Reſt 2

Hieraus ſieht man deutlich, daß die Diviſion ohne Ende fortgeſetzt werden kann, und der gefundene Decimalbruch doch nie genau ſo groß wird, als der gemeine, wenn man den Reſt wegläßt; denn der Reſt mit einer rechter Hand beigefügten Null iſt in keinem der gegenwärtigen Fälle ein Produkt, welches einen Faktor 3 oder 9 hat, in welchem Falle erſt die Diviſion aufgehen würde. Die Reſte $\frac{\frac{1}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{3}}{1000}$ und $\frac{\frac{2}{9}}{1000}$ ſind entweder ſchon ſo klein, daß man ſie in der Ausübung aus der Acht laſſen kann, oder ſie können doch in jedem Falle ſo klein gemacht werden, wenn man nur die Diviſion fortſetzt. Im allgemeinen aber iſt $0,333\ldots < \frac{1}{3}$; $0,666\ldots < \frac{2}{3}$; $0,222\ldots < \frac{2}{9}$: hingegen iſt $0,333\frac{\frac{1}{3}}{1000} = \frac{1}{3}$; $0,666\frac{\frac{2}{3}}{1000} = \frac{2}{3}$; $0,222\frac{\frac{2}{9}}{1000} = \frac{2}{9}$.

c) **unächte Brüche und gemiſchte Decimalzahlen.**

Wie groß iſt z. B. $2\frac{1}{4}$ in Decimaltheilen ausgedrückt? Man verwandele die **gemiſchte** Zahl in einen unächten Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch.

$2\frac{1}{4}$

$\frac{11}{4}$

$\frac{2\frac{3}{4}}{\frac{11}{4}}$

```
4) 11 | 2,75
    8
   ---
    30
    28
   ---
     20
     20
    ---
      0
```

Demnach, da $2,75 = 2\frac{3}{4}$ iſt, ſo kann man auch die ganze Zahl ungeändert laſſen, und bloß den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln. Jeden unächten Bruch kann man daher auch in eine gemiſchte Zahl verwandeln, und den an ganzen Zahlen befindlichen ächten gemeinen Bruch, in einen Decimalbruch verwandeln; dem man nur nach der Verwandlung die ganze Zahl mit dem Komma vorſetzt.

2) Genannte Zahlen ſie mögen nun ächte oder unächte Brüche oder gemiſchte Zahlen ſeyn.

a) Längenmaße.

Wie viel betragen $\frac{5}{12}$ der Länge einer Ruthe, in kleinern Theilen, als Fuße, Zolle ꝛc.? $4^{I}\ 1^{II}\ 6^{III}\ 6^{IV} =$ 0,4166... Ruthen.

```
12) 50 | 0,4166...
    48
   ---
    20
    12
   ---
     80
     72
    ---
     80
     72
    ---
Reſt  8
```

d. i. $\frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots$ oder $0{,}4166\frac{\frac{8}{12}}{10000}$ Ruthen = 4 Fuß 1 Zoll 6 Linien 6 Skrupel.

b) Quadratmaße.

Wie viel beträgt der Werth von $\frac{4}{7}$ Quadratruthe in kleinern Theilen, oder im Decimalbruche? 57 F^q 14 Z^q 28 L^q = 0,571428 Quadratruthen.

```
7) 40 | 0,571428...
   35
   --
    50
    49
    --
     10
      7
     --
     30
     28
     --
      20
      14
      --
       60
       56
       --
Reſt    4
```

d. i. $\frac{4}{7} = 0{,}571428\ldots$ oder $0{,}571428\frac{\frac{4}{7}}{1000000}$ Quadratruthen = 57 Quadratfuß 14 Quadratzoll 28 Quadratlinien.

c) Kubikmaße.

Wie viel beträgt der Werth von $\frac{3}{11}$ Kubikruthe in kleinern Theilen, oder im Decimalbruche? 272 F^c 727 Z^c 272 L^c = 0,272727272 Kubikruthen.

11)
```
30 | 0,272727272...
22
--
 80
 77
 --
  30
  22
  --
   80
   77
   --
    30
    22
    --
     80
     77
     --
      30
      22
      --
       80
       77
       --
        30
        22
        --
   Reſt  8
```

d. i. $\frac{3}{11}$ Kubikr. = 0,272727272... oder 0,272727272 + $\frac{\frac{8}{11}}{1000000000}$ Kubikruthen = 272 Kubikfuße 727 Kubikzolle 272 Kubiklinien.

Anmerkung.

Der Gebrauch dieſer Decimalbrüche in der Geometrie wird ihre Nutzbarkeit und Unentbehrlichkeit noch mehr beſtätigen.

Sechstes Kapitel.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen, und der Ausziehung der Wurzeln.

Erſter Abſchnitt.

Von den Quadrat- und Kubikzahlen und ihren Wurzeln überhaupt.

§. 112.

Eine Quadratzahl entſteht, wenn man eine Zahl mit ihr ſelbſt multiplicirt; eine Kubikzahl hingegen, wenn man die Quadratzahl abermals mit der Zahl multiplicirt, woraus jene entſtanden iſt. So giebt z. B. die Zahl 4 mit ihr ſelbſt multiplicirt 16, folglich iſt 16 die Quadratzahl von 4; 16 aber mit 4 multiplicirt, giebt 64, alſo iſt 64 die Kubikzahl von 4. Die der Quadratzahl zum Grunde liegende Zahl, heißt die Quadratwurzel, ſo wie die, welche der Kubikzahl zum Grunde liegt, die Kubikwurzel heißt.

So iſt z. B. 4 die Quadratwurzel von 16; ſo wie 4 die Kubikwurzel von 64.

Demnach iſt eine Zahl quadriren nichts anders, als ſie mit ihr ſelbſt multipliciren, d. i. ihre Quadratzahl angeben, und eine Zahl kubiren heißt, ihr Quadrat mit der Wurzel multipliciren, d. i. ihre Kubikzahl angeben.

Anmerkung.

Ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, nennt man überhaupt eine Potenz oder Dignität, und den Faktor, der ein- oder mehrmal mit ſich ſelbſt multiplicirt, dies Produkt giebt, die Wurzel; alſo ſind Quadrat- und Kubikzahlen Potenzen oder Dignitäten. Die Zahl, welche angiebt, wie viel mal ein Faktor mit ſich ſelbſt multiplicirt, eine Potenz giebt, heißt der Grad der Potenz; daher ſind die Quadratzahlen, Potenzen von dem zweiten, die Kubikzahlen aber, Potenzen von dem dritten Grade.

§. 113.

Heißt a überhaupt die Wurzel, ſo iſt a.a oder aa die Quadratzahl und a.a.a oder aaa die Kubikzahl von der Wurzel a. Statt der Anzahl der gleichen Faktoren, welche multiplicirt die Quadratzahl geben, ſetzt man oben an die Wurzel das Zahlzeichen 2, und ſtatt der Anzahl der gleichen Faktoren, welche multiplicirt die Kubikzahl geben, das Zahlzeichen 3 und nennt dieſes Zahlzeichen den Exponent. So iſt z. B. $4 = 4$; $4^2 = 4 . 4 = 16$; $4^3 = 4 . 4 . 4 = 64$; ſo wie $a = a$; $a^2 = a . a = aa$; $a^3 = a . a . a = aaa$.

Anmerkung.

Unter der Wurzel a muß man ſich nicht eine beſtimmte Zahl, ſondern überhaupt, jede mögliche Zahl denken, weil a ein allgemeines Zeichen einer Größe und jede Zahl ſelbſt eine Größe iſt; folglich kann a als Wurzel alle Zahlenwerthe von 1 bis ohne Ende annehmen, und es müſſen demnach alle mögliche Wurzeln darunter gedacht werden können.

§. 114.

Die Begriffe von den Quadrat- und Kubikzahlen ſind vom Quadrate und dem Würfel, folglich aus der

der Geometrie genommen Quadrat iſt ein Viereck, welches vier rechte Winkel und vier gleiche Seiten hat, alſo überhaupt eine rechtwinklige gleichſeitige Figur. Würfel iſt ein achteckiger Körper, welcher lauter rechte Winkel und gleiche Seiten hat, folglich überhaupt ein rechtwinkliger Körper, deſſen Gränzen Quadrate ſind. Was in der Geometrie Größe der Fläche oder Inhalt des Quadrats heißt, wird in der Arithmetik die Quadratzahl, ſo wie die Seite des Quadrats, die Wurzel genannt. Eben ſo bei dem Würfel. Die körperliche Größe oder der Inhalt deſſelben heißt hier Kubikzahl, und die Seite wird hier die Wurzel genannt; demnach kann man durch die Quadrat- und Kubikzahlen den Inhalt der Quadrate und der Würfel beſtimmen, wenn ihre Seiten gegeben oder bekannt ſind. Denn man darf von der Seite eines Quadrats als Wurzel nur die Quadratzahl, und von der Seite eines Würfels als Wurzel, nur die Kubikzahl machen.

§. 115.

Da es nun in vielen Fällen nöthig iſt, nicht nur aus dem Inhalte eines Quadrats, und aus dem Inhalte eines Würfels, die Seiten zu finden, welche die Größe beider Figuren beſtimmen, ſondern auch, um manche zuſammengeſetzte Lehren der Arithmetik zu verſtehen und darauf ſich beziehende Aufgaben aufzulöſen; ſo muß man im Stande ſeyn, aus jeder gegebenen Quadrat- und Kubikzahl, ſie mag nun den Inhalt eines Quadrats oder eines Würfels, oder den Inhalt jeder andern geometriſchen Figur enthalten, die **Wurzel zu ziehen**. Die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl aber findet man, wenn man die Zahl ſucht, die mir ihr ſelbſt multiplicirt, jene Zahl wieder giebt, und die Kubikwurzel, wenn man die Zahl ſucht, die mit ihrer Quadratzahl multiplicirt, ein Product giebt, ſo groß als jene gegebene Zahl.

Das Zeichen der Wurzel iſt ein r oder √, welches vor die gegebene Zahl geſetzt wird, aus welcher die Wurzel geſucht werden ſoll. Für die Quadratwurzeln ſetzt man *über* r oder √ das Zahlzeichen 2, und für die Kubikwurzeln *über* r oder √ das Zahlzeichen 3. Bei dem Quadratwurzelzeichen kann das Zahlzeichen auch wegbleiben, und beide Ausdrücke $\sqrt[2]{\ }$ und $\sqrt{\ }$ haben eine gleiche Bedeutung. Das über das Wurzelzeichen geſetzte Zahlzeichen heißt *der Exponent der Wurzel*. Durch die Vorſetzung dieſer Zeichen vor die Quadrat- und Kubikzahlen wird die Wurzel nicht wirklich ausgezogen, ſondern nur angedeutet, daß ſie geſucht werden ſoll; demnach heißt $\sqrt[2]{16}$ oder $\sqrt{16}$, die Quadratwurzel aus 16; $\sqrt[3]{64}$ aber die Kubikwurzel aus 64. Allgemein $\sqrt{a^2}$ iſt die Quadratwurzel aus der Quadratzahl von a, und $\sqrt[3]{a^3}$ die Kubikwurzel aus der Kubikzahl von a. Da nun dem Entſtehen der Quadrat- und Kubikzahlen das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln gerade entgegengeſetzt iſt, ſo ſind auch die Exponenten der Quadrat- und Kubikzahlen den Exponenten ihrer Wurzeln entgegengeſetzt; folglich iſt $\sqrt[2]{4^2}=4$; $\sqrt[3]{64}=4$; allgemein $\sqrt[2]{a^2}=a$, und $\sqrt[3]{a^3}=a$: mithin müſſen auch die Regeln, welche man beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln befolgt, dieſen entgegengeſetzt ſeyn, welche man anwendet, wenn man Quadrat- und Kubikzahlen macht. *Alle gleichgroße Wurzeln geben gleichgroße Quadrat- oder Kubikzahlen*; und umgekehrt: *aus gleichen Quadrat- oder Kubikzahlen, ſind auch die dazu gehörigen Wurzeln gleich*. Da nun $4=(3+1)$ iſt, ſo iſt auch $4^2=(3+1)^2$, d. i. $3+1=4$, und alſo iſt auch $(3+1)^2=4^2$. Eben ſo iſt auch $4^3=(3+1)^3$.

§. 116.

Alle Quadrat- und Kubikzahlen, die man durch die Multiplikation irgend einer beſtimmten Zahl erhält, nennt man vollkommen; von unbeſtimmten Zahlen aber, wie z. B. von ſolchen Decimalbrüchen, die ohne Ende fortgehen und zu klein ſind, wenn man den Reſt wegläßt, (wie in §. 111.) unvollkommen. Die beſtimmten Zahlen nennt man Rationalzahlen, die unbeſtimmten aber Irrationalzahlen. Demnach giebt es vollkommene und unvollkommene Quadrat- und Kubikzahlen, und aus eben dieſem Grunde auch rationale und irrationale Quadrat- und Kubikwurzeln.

Die rationalen Wurzeln von 1 bis 9 und die davon gemachten vollkommenen Quadrat- und Kubikzahlen, kann man in eine Tabelle bringen, und ſie nach und nach auswendig lernen.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Unterſucht man dieſe vollkommenen Quadratzahlen, ſo findet man in der Tabelle 1, 4, 9, 16 2c. Aber zwiſchen 1 und 4, liegt 2 und 3. Da nun die Quadratwurzel von 1, Eins iſt und von 4, die Zahl 2: ſo haben 2 und 3 zwar die Wurzel 1, ſo weit ſie in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, aber da die Ausziehung der Wurzel aus dem Reſte, woran man Nullen rechter Hand ſetzt, ohne Ende fortgeführt werden kann, ſo kann man nie vollkommen genau die Größe der Wurzeln aus den Quadratzahlen 2 und 3 angeben. Eben ſo iſt es mit den Zahlen zwiſchen 4 und 9; 9 und 16 2c. Auf eine gleiche Art verhält es ſich mit den Kubikzahlen zwi-

ſchen 1 und 8; 8 und 27; 27 und 64 ꝛc. Demnach macht eine ſolche fortgeſetzte Tabelle die Kenntniß der Quadrat- und Kubikzahlen, eben ſo wenig entbehrlich, als das Ausziehen ihrer Wurzeln. Die Quadrat- und Kubikwurzeln von 10, 100, 1000 ꝛc. kann man leicht in Gedanken finden.

§. 117.

Alle Wurzeln von 1 bis 9 nennt man einfache, alle übrigen aber, zuſammengeſetzte. Jede aus mehrern Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahl, alſo auch jede ſolche Wurzel, kann man ſo betrachten, als wenn ſie aus Zehner und Einer zuſammengeſetzt wäre, auch ſelbſt dann noch, wenn die Menge der Zehner, Hunderte oder Tauſende ꝛc. ausmacht. Demnach wäre 10 als bloße Zahl oder als Wurzel betrachtet, aus 1 Zehner und 0 zuſammengeſetzt, d. i. 10; 12 aber aus 1 Zehner und 2 Einer, weil $10+2=12$ iſt. Eben ſo iſt $426=420$ Zehner $+6$ Einer, weil $420+6=426$ iſt. Und ſo in allen ähnlichen Fällen: $143046=143040+6$, wo denn 143040 die Zehner, 6 aber die Einer anzeigt.

Stellt man ſich die Zehner als den erſten Theil einer Wurzel unter dem allgemeinen Zeichen a vor, ſo machen die Einer den zweiten Theil unter dem allgemeinen Zeichen b aus; demnach kann man, unter dieſer Vorausſetzung, von zuſammengeſetzten Wurzeln auch die Quadrat- und Kubikzahlen theilweiſe machen. So ſei z. B. $12=10+2$ eine Wurzel. Die Quadratzahl iſt

$$\begin{array}{rr} & 10+2 \\ & 10+2 \\ \hline & 10.2+2^2 \\ 10^2+10.2 & \\ \hline \multicolumn{2}{r}{10^2+2(10.2)+2^2} \end{array} \quad \text{Allgemein} \quad \begin{array}{rr} & a+b \\ & a+b \\ \hline & ab+b^2 \\ a^2+ab & \\ \hline \multicolumn{2}{r}{a^2+2ab+b^2} \end{array}$$

Da

$$\begin{array}{lrcl} \text{Da nun} & 10^2 & = & 100 \\ & 2(10.2) & = & 40 \\ & 2^2 & = & 4 \\ \hline \text{ſo iſt} & \multicolumn{3}{l}{10^2 + 2(10.2) + 2^2 = 144 = 12.12.} \end{array}$$

Demnach beſteht eine Quadratzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Quadratzahl des erſten Theils, $10^2 = a^2$, dem doppelten Produkte der beiden Theile in einander $2(10.2) = 2ab$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^2 = b^2$.

Iſt $12 = 10 + 2$ abermals die Wurzel; ſo iſt die Kubikzahl

$$\begin{array}{l} \qquad 10^2 + 2(10.2) + 2^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ \qquad\qquad 10 + 2 \\ \hline \qquad 10^2.2 + 2(10.2^2) + 2^3 \\ 10^3 + 2(10^2.2) + 10.2^2 \\ \hline 10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 \end{array}$$

Und allgemein:

$$\begin{array}{l} \qquad a^2 + 2ab + b^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ \qquad\quad a + b \\ \hline \qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Da nun} & 10^3 & = & 1000 \\ & 3(10^2.2) & = & 600 \\ & 3(10.2^2) & = & 120 \\ & 2^3 & = & 8 \\ \hline \text{ſo iſt} & \multicolumn{3}{l}{10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 = 1728 = 12.12.12} \\ & \multicolumn{3}{l}{\text{oder } 12^2.12 = 1728.} \end{array}$$

Demnach beſteht eine Kubikzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Kubikzahl des erſten

ſchen 1 und 8; 8 und 27; 27 und 64 ꝛc. Demnach macht eine ſolche fortgeſetzte Tabelle die Kenntniß der Quadrat- und Kubikzahlen, eben ſo wenig entbehrlich, als das Ausziehen ihrer Wurzeln. Die Quadrat- und Kubikwurzeln von 10, 100, 1000 ꝛc. kann man leicht in Gedanken finden.

§. 117.

Alle Wurzeln von 1 bis 9 nennt man einfache, alle übrigen aber, zuſammengeſetzte. Jede aus mehrern Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahl, alſo auch jede ſolche Wurzel, kann man ſo betrachten, als wenn ſie aus Zehner und Einer zuſammengeſetzt wäre, auch ſelbſt dann noch, wenn die Menge der Zehner, Hunderte oder Tauſende ꝛc. ausmacht. Demnach wäre 10 als bloße Zahl oder als Wurzel betrachtet, aus 1 Zehner und 0 zuſammengeſetzt, d. i. 10; 12 aber aus 1 Zehner und 2 Einer, weil $10+2=12$ iſt. Eben ſo iſt $426 = 420$ Zehner $+ 6$ Einer, weil $420 + 6 = 426$ iſt. Und ſo in allen ähnlichen Fällen: $143046 = 143040 + 6$, wo denn 143040 die Zehner, 6 aber die Einer anzeigt.

Stellt man ſich die Zehner als den erſten Theil einer Wurzel unter dem allgemeinen Zeichen a vor, ſo machen die Einer den zweiten Theil unter dem allgemeinen Zeichen b aus; demnach kann man, unter dieſer Vorausſetzung, von zuſammengeſetzten Wurzeln auch die Quadrat- und Kubikzahlen theilweiſe machen. So ſei z. B. $12 = 10 + 2$ eine Wurzel. Die Quadratzahl iſt

$$\begin{array}{rl} & 10+2 \\ & 10+2 \\ \hline & 10.2+2^2 \\ 10^2+10.2 & \\ \hline 10^2+2(10.2)+2^2 & \end{array} \quad \text{Allgemein} \quad \begin{array}{rl} & a+b \\ & a+b \\ \hline & ab+b^2 \\ a^2+ab & \\ \hline a^2+2ab+b^2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Da nun } 10^2 & = & 100 \\ 2(10.2) & = & 40 \\ 2^2 & = & 4 \\ \hline \text{ſo iſt } 10^2 + 2(10.2) + 2^2 & = & 144 = 12.12. \end{array}$$

Demnach beſteht eine Quadratzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Quadratzahl des erſten Theils, $10^2 = a^2$, dem doppelten Produkte der beiden Theile in einander $2(10.2) = 2ab$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^2 = b^2$.

Iſt $12 = 10 + 2$ abermals die Wurzel; ſo iſt die Kubikzahl

$$\begin{array}{r} 10^2 + 2(10.2) + 2^2 \text{ (aus dem vor-} \\ 10 + 2 \text{ hergehenden)} \\ \hline 10^2.2 + 2(10.2^2) + 2^3 \\ 10^3 + 2(10^2.2) + 10.2^2 \\ \hline 10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 \end{array}$$

Und allgemein:

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ a + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Da nun } 10^3 & = & 1000 \\ 3(10^2.2) & = & 600 \\ 3(10.2^2) & = & 120 \\ 2^3 & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

ſo iſt $10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 = 1728 = 12.12.12$
oder $12^2.12 = 1728$.

Demnach beſteht eine Kubikzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Kubikzahl des erſten

Theils $10^3 = a^3$, dem dreifachen Produkte der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten $3\,(10^2 . 2) = 3\,a^2 b$, aus dem dreifachen Produkte des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils $3\,(10 . 2^2) = 3\,a b^2$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^3 = b^3$.

Man ſieht hieraus, daß alle Quadrat- und Kubikzahlen durch Hülfe der Multiplikation und Addition, aus ihren Wurzeln entſtehen; folglich werden ſo wohl die Quadrat- als auch die Kubikwurzeln, aus vorgeſchriebenen Quadrat- und Kubikzahlen, durch die der Multiplikation und Addition entgegengeſetzten Rechnungsarten, nämlich durch die Diviſion und Subtraktion, gefunden werden können.

§. 118.

Die Quadrat- und Kubikzahlen werden auch für ſich, ohne Verbindung mit andern Lehren, im Forſtweſen mit Nutzen angewandt, und durch ſie laſſen ſich manche Aufgaben auflöſen, die durch keine andern Rechnungen aufgelöſet werden können:

1) Gebrauch der Quadratzahlen.

Es ſoll in ein Viereck ſo wohl nach der Länge, als auch nach der Breite eine Linienweiſe Baumanpflanzung ſo gemacht werden, daß jede Reihe 88 Stück Bäume ſo erhalte, daß man in gerader Linie durch die Anpflanzung ſehen könne: da die Figur der Anpflanzung ein Quadrat iſt, wieviel Stämme ſind erforderlich, den beſchriebenen Platz zu beſetzen? 7744 Stämme; denn

	88 die Quadratwurzel
	88
	704
	704
Grundfläche	7744 Quadratzahl

2)

2) Gebrauch der Kubikzahlen.

Ein Malter Holz hält auf dem Harzgebirge 48 Leipziger Werkzolle in der Länge, Breite und Höhe. Wieviel Werkzolle machen alſo ſeinen ganzen körperlichen Inhalt aus, d. i. wieviel Würfel, deren jeder 1 Zoll lang, breit und hoch iſt, gehören zu einem Malter Holz, wenn derſelbe als ein dichter Körper betrachtet wird? 110592 Kubikzolle; denn

```
                48 die Kubikwurzel
                48
               ----
               384
              192
              -----
Grundfläche  2304 Quadratzahl
                48
              -----
             18432
             9216
             ------
Körperlicher Inhalt 110592 Kubikzahl in Kubikzollen.
```

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I.

Die Ausziehung der Quadratwurzeln.

§. 119.

Aufgabe.

Aus einer ganzen Zahl, die aus 3 oder 4 Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Aufloſung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke zu in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe zwei Zahlzeichen. In der hochſten Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen ſtehen. So viel nun die gegebene Zahl Klaſſen hat, ſo viel einzelne Zahlzeichen enthält auch die dazu gehörige Wurzel. Die Wurzel der hochſten Klaſſe heiße a, die der niedrigſten aber b, ſo iſt a + b die ganze Wurzel. Es ſei die Zahl 144.

1|44|

2) Nun ſuche man in der Tabelle (§. 116) die Wurzel von 1, oder, wenn man die niedrigſte Klaſſe anfänglich als mit Nullen erfüllt betrachtet, ſtatt aus 1, hier aus 100. Dieſe iſt 10 oder 1 aus 1. Die Wurzel ſetze man in die Stelle des Quotienten, wie bei der Diviſion, die ihr zugehörige Quadratzahl aber a = 100 unter die gegebene Quadratzahl und ſubtrahire

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = 1 & 00 & \\ \hline & 44 & \end{array}$$

3) Im Reſte iſt noch das doppelte Produkt der beiden Theile und die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel enthalten = 2 a b + b²; um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch Diviſion zu finden, mache man den Diviſor, welches, in jedem Falle, die ſchon gefundene Wurzel doppelt genommen, alſo allgemein 2 a iſt. Da nun a = 10 in dieſem Falle, ſo iſt 2 a = 2 . 10 oder 20. Dieſe Zahl ſetze man unter die gebliebene niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl in eine Parentheſe und dividire, ſo erhält man den zweiten Theil der Wurzel, hier 2 oder allgemein b.

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = 1 & 00 & \;\;2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & 44 & \\ & (20) & \end{array}$$

4) Mit dieſem ſo gefundenen zweiten Theil der Wurzel multiplicire man den Diviſor, ſo hat man das doppelte Produkt der beiden Theile in einander, hier 20.2 oder 2ab, und ſetze es unter den Diviſor.

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 44 & 10 = a \\ 1 & 00 & \;\;2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & 44 & \\ & (20) & \\ 2ab = & 40 & \end{array}$$

5) Noch fehlt die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, oder $2 . 2 = 4$ oder b^2. Dieſes Quadrat ſetze man unter die Einer des vorhin gefundenen Produkts, addire dies Quadrat und das in N. 4 gefundene doppelte Produkt der beiden Theile in einander, und ſubtrahire dieſe Summe von dem in N. 3 gebliebenen Reſte. Addirt man endlich die nach einander gefundenen beiden Theile der Wurzel, ſo hat man die Aufgabe aufgelöſet.

$$\begin{array}{r|l|l} a^2 + 2ab + b^2 = 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = 1 & 00 & \;\;2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & 44 & 12 = a + b \\ 2a & (20) & \\ 2ab = & 40 & \\ b^2 = & \;\;4 & \\ \hline & 44 & \\ \hline & \;\;0 & \end{array}$$

§. 120.

Etwas abgekürzt, wenn man die doch unnöthigen Nullen wegläßt, iſt das Verfahren folgendes: Man ſucht nämlich, ohne auf die niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl zu merken, die Wurzel aus der höchſten Klaſſe; dieſe iſt hier 1, und macht davon das Quadrat, hier iſt auch dieſes 1. Nachdem man dieſe Quadratzahl des erſten Theils der Wurzel unter die höchſte Klaſſe, d. i. hier unter 1 geſetzt, ſubtrahirt und keinen Reſt gefunden hat; ſo rückt man die niedrigſte oder überhaupt die folgende Klaſſe der gegebenen Zahl herunter, nimmt den gefundenen erſten Theil der Wurzel doppelt als Diviſor, ſetzt die für dieſen Diviſor gefundene Zahl unter das höchſte Zahlzeichen dieſer Klaſſe und dividirt. Den durch dieſe Diviſion gefundenen zweiten Theil der Wurzel ſetzt man rechter Hand an den Diviſor, d. i. unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergenommenen Klaſſe und multiplicirt dieſen Theil ſo wie den Diviſor mit dem Quotienten, oder dem zweiten Theile der Wurzel. Subtrahirt man dieſes ſo gefundene Produkt von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte, ſo zeigt ſichs, ob abermals ein Reſt bleibt oder nicht. Iſt das *erſte*, ſo iſt die gegebene Zahl eine *unvollkommene Quadratzahl* und die Wurzel *irrational*; iſt aber das *letzte*, ſo iſt ſie *vollkommen* und die gefundene Wurzel *rational*.

$$\begin{array}{rl|ll}
 & & a+b & \\
a^2+2ab+b^2 = 1 & 44 & 1 & 2 \\
a^2 = 1 & & & \\
\hline
2ab+b^2 = & 44 & & \\
2a & (2) & & \\
2ab+b^2 = & 44 & & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

Auf

Auf eine ähnliche Art verfährt man mit der folgenden Zahl. Es ſei 2025 gegeben; wie groß iſt die Quadratwurzel dieſer Zahl? 45.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a+b \\
a^2+2ab+b^2 = 20 & 25 & 4\ \ 5 \\
a^2 = 16 & & \\
\hline
2ab+b^2 = 4 & 25 & \\
2a & (8)5 & \\
2ab+b^2 = 4 & 25 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

§. 121.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 5, 6 oder mehrern Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt; ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel wie in §. 120. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die bis dahin gefundene Wurzel doppelt oder 2mal genommen iſt, wobei nun die ſchon gefundenen beiden Theile der Wurzel a + b für eine, alſo für a genommen werden; ſezt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Kläſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſor folgen, wie bei der Diviſion, unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man wie in §. 120.

für

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon ge-ſundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

```
                                  a + b
Es ſei die Zahl 45 | 42 | 76 | 67 4
             a² = 36 | ..           a + b
2ab + b² =  9 42   ..
            (12)7   ..
2ab + b² =  8 8 9   ..
2ab + b² =   53 76
           (13 4)4
2ab + b² =   53 76
                0
```

Hierbei verfährt man wörtlich ſo: die Wurzel von 45 iſt $6 = a$; $6 . 6 = 36 = a^2$. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor $6 . 2 = 12 = 2a$ und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $7 = b$; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt $127 . 7 = 889 = 2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt $= a$, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl $134 = 2a$ unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals $= b$ wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun $1.1 = 1$; $2.2 = 4$; $3.3 = 9$ iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von $100 = 10000$; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
 67|89|76 | 824 R.
 64|  |
 ---
  389  . .
 (16)2 . .
  324  . .
 ---------
   6576
  (164)4
   6576
 ---------
     0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
  20 Rthlr. 4 gr.
  24
 -------
 4|84 | 22 Perſonen.
 4|
 -------
   84
  (4)2
   84
 -------
   0
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $12R^q\ 81F^q\ 64Z^q$ der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Längenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
 12° | 81' | 64''  |  3° 5' 8'' Längenmaß
  9  |     | ..
 ----
  3 8 1  ..
   (6)5  ..
  3 2 5  ..
 -------------
    5 6 6 4
     (7 0)8
    5 6 6 4
   ---------
       0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10.10 = 100; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt 100.100 = 10000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Auszziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
12 | 26 | 68 | 05 | 76 | 35024
 9 | . .  . .  . .  . .
   326 . . . . . .
   (65 . . . . . .
   325 . . . . . .
       168 . . . .
      (70) . . . .
       16805 . .
       (700) 2 . .
       14004 . .
         280176
        (7004) 4
         280176
              0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
4 | 01 | 60 | 16 | 2004
4 | . .  . .  . .
   . 01 . . . .
   (4)  . . . .
      160 . .
     (40) . .
      16016
     (400) 4
      16016
          0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.       2|85|46 | 168
            1| . .  . .
       ----------
       Reſt 1|85 . .
             (2)6 . .
             156 . .
       ------------
       Reſt  29|46
              (32) 8
             2624
       --------------
       Reſt   322
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d. i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

```
     168
     168
    ----
    1344
   1008
   168
  ------
   28224
     322 der gebliebene Reſt
  ------
   28546 die gegebene Quadratzahl.
```

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119. 125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadrat-

zahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0{,}454276} = 0{,}674$; denn es iſt $\sqrt{0{,}454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0{,}674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0{,}0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine Null zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun dieſe zugeſetzte Null den Werth des Bruchs nicht ändert, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in nr. a.

Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280}$

```
0,|82|80 | 0,90 Wurzel.
  |81|
-------
   1 8 0
  (1 8)
```

§. 130.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen ſind, verwandelt man am ſchicklichſten in Decimalbrüche, und ſucht aus dieſen die Wurzel nach nr. a und b §. 129.

So iſt $\frac{1}{3}$ = 0,333333 . . . §. 111.

```
0,|33|33|33 | 0,577 . . Wurzel.
  |25|
-------
    8 3 3 . .
   (1 0)7 . .
    7 4 9 . .
   -----------
      8 4 3 3
     (1 1 4)7
      8 0 2 9
   -----------
Reſt  4 0 4
```

Hierbei iſt zu merken, daß man, wenn der gemeine Bruch nicht genau oder vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, ſo viele Decimalſtellen ſuchen muß, als es die Genauigkeit der verlangten Wurzel erfordert. Da die Wurzel allemal Längen anzeigt, ſo kommt alles darauf an welchen Namen 0 Ganze haben; das übrige läßt ſich hiernach leicht beſtimmen.

§. 131.

§. 131.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden; ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 128. n. 3.

Wäre z. B. $3\frac{1}{8}$ gegeben, ſo iſt $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$; $\frac{25}{8}$ aber ſind = 3,125 = 3,1250. Nun iſt die Wurzel aus 3,1250 = 1,76 . .

3,|12|50 | 1,76 . .
1
―――
2 12 . .
(2)7 . .
1 89 . .
―――
2350
(34)6
2076
―――
Reſt 274

Eben ſo, wenn 3,4 gegeben iſt. Nun iſt 3,4 = 3,40; alſo iſt die Wurzel = 1,8 . .

3,|40 | 1,8
1
―――
240
(2)8
224
―――
Reſt 16

Oder: 4,25. Die Wurzel iſt 2,0..

```
4,|25 | 2,0..
4 |
---
  25
 (4)
-----
Reſt 25
```

§. 132.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Quadratzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann man dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dies Verfahren iſt die gegebene Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 129—131. iſt bemerkt worden.

Es ſei z. B. die Zahl 2 gegeben.

```
     2 | 1,4142 . . .
     1
    ---
     100
     (2)4
      96
     ----
       400
      (28)1
      -----
       11900
      (282)4
       11296
       -----
        60400
      (2828)2
        56564
       ------
Reſt     3836
```

Da hier, nachdem aus der ganzen Zahl 2 die Wurzel 1 gefunden iſt, ein Reſt = 1 bleibt, dieſem Reſte, ſo wie jedem andern aber eine Klaſſe Nullen zugeſetzt wird, und unter die niedrigſte Null jedesmal das niedrigſte Zahlzeichen vom Quadrate des folgenden Theils der Wurzel geſetzt, und dieſes in keinem Falle o wird, weil von den Wurzeln von 1 bis 9 keine Quadratzahl ſich auf o endigt; ſo folgt, daß die Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortgeſetzt werden kann, ohne daß man die Wurzel ſelbſt vollkommen erhält, wofern man nicht den zuletzt gebliebenen Reſt als einen gebrochenen Bruch beifügt, welches aber von keinem Nutzen iſt. Demnach müſſen auch hier die Umſtände entſcheiden, wenn man die Wurzelausziehung endigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich aber ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Decimal-

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den **erſten** Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

$$\begin{array}{lrrrl} & & & & \overbrace{67}^{a+b}\,4 \\ \text{Es ſei die Zahl} & 45 & 42 & 76 & \underbrace{6\,74}_{a+b} \\ a^2 = & 36 & .. & & \\ \hline 2ab+b^2 = & 9 & 42 & .. & \\ & (12) & 7 & .. & \\ 2ab+b^2 = & 8 & 89 & .. & \\ \hline 2ab+b^2 = & & 53 & 76 & \\ & & (134) & 4 & \\ 2ab+b^2 = & & 53 & 76 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Hierbei verfährt man **wörtlich** ſo: die Wurzel von 45 iſt $6 = a$; $6.6 = 36 = a^2$. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor $6.2 = 12 = 2a$ und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $7 = b$; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt $127.7 = 889 = 2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt $= a$, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl $134 = 2a$ unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals $= b$ wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun $5376 - 5376$ keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun 1.1 = 1; 2.2 = 4; 3.3 = 9 iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von 100 = 10000; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Dies

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
 67|89|76 | 824 R.
 64
 ---
  389
 (16)2
  324
 ---
   6576
  (164)4
   6576
   ---
    0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
   20 Rthlr. 4 gr.
  24
 ---
  4|84 | 22 Perſonen.
  4
 ---
   84
  (4)2
   84
 ---
   0
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $12R^q\ 81F^q\ 64Z^q$ der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Längenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
12° | 81′ | 64″ | 3° 5′ 8″ Längenmaß
 9  |     | ..
---------
  3 8 1 ..
   (6)5 ..
  3 2 5 ..
-----------------
    5 6 6 4
     (7 0)8
    5 6 6 4
-----------------
       0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt $10 . 10 = 100$; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt $100 . 100 = 10000$, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Ausziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
 12|26|68|05|76 | 35024
  9|. . . . . . . .
 ----
   326 . . . . . .
   (65 . . . . . .
   325 . . . . . .
   -----
     168 . . . .
     (70)  . . . .
     -----
     16805 . .
      (700) 2 . .
     14004 . .
     ---------
      280176
       (7004) 4
      280176
      --------
         0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
  4|01|60|16 | 2004
  4|. . . . . .
 ------
   . 01 . . . .
    (4)  . . . .
   ------
      160 . .
     (40)  . .
     -----
     16016
      (400) 4
     16016
     ------
        0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.      2|85|46 | 168
           1| .  ..
      ---------
      Reſt 1|8 5 ..
            (2)6 ..
            1 5 6 ..
      -----------
      Reſt 29|4 6
             (32) 8
             2 6 2 4
      ------------
      Reſt  3 2 2
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d.i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

```
   168
   168
  ----
  1344
 1008
 168
 -----
 28224
   322 der gebliebene Reſt
 -----
 28546 die gegebene Quadratzahl.
```

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119-125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadratzahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0,454276} = 0,674$; denn es iſt $\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0,674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0,0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0,12$.

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine Null zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun dieſe zugeſetzte Null den Werth des Bruchs nicht ändert, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in nr. a.

Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280}$

```
0,|82|80 | 0,90 Wurzel.
  |81|
 ------
   180
  (18)
```

§. 130.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen ſind, verwandelt man am ſchicklichſten in Decimalbrüche, und ſucht aus dieſen die Wurzel nach nr. a und b §. 129.

So iſt $\frac{1}{3} = 0,333333 \ldots$ §. 111.

```
0,|33|33|33 | 0,577 . . Wurzel.
  |25|  |
  ----
   833 . .
  (10)7 . .
   749 . .
  --------
    8433
   (114)7
    8029
  --------
Reſt 404
```

Hierbei iſt zu merken, daß man, wenn der gemeine Bruch nicht genau oder vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, ſo viele Decimalſtellen ſuchen muß, als es die Genauigkeit der verlangten Wurzel erfordert. Da die Wurzel allemal Längen anzeigt, ſo kommt alles darauf an welchen Namen o Ganze haben; das übrige läßt ſich hiernach leicht beſtimmen.

§. 131.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden; ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 128. n. 3.

Wäre z. B. $3\frac{1}{8}$ gegeben, ſo iſt $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$; $\frac{25}{8}$ aber ſind = 3,125 = 3,1250. Nun iſt die Wurzel aus 3,1250 = 1,76 . .

```
3,|12|50 | 1,76 . .
1 |  |
--
2 12 . .
  (2)7 . .
1 89 . .
-----------
   2350
   (3 4)6
   2076
-----------
Reſt 274
```

Eben ſo, wenn 3,4 gegeben iſt. Nun iſt 3,4 = 3,40; alſo iſt die Wurzel = 1,8 . .

```
3,|40 | 1,8
1 |
--
2 40
  (2)8
2 24
-------
Reſt 16
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl 12R^q 81F^q 64Z^q der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Längenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
12° | 81′ | 64″ | 3° 5′ 8″ Längenmaß
 9  |     | ..
---------------
 3 8 1 ..
  (6)5 ..
 3 2 5 ..
---------------
   5 6 6 4
    (7 0)8
   5 6 6 4
---------------
      0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Aufloͤſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10.10 = 100; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt 100.100 = 10000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Ausziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
12|26|68|05|76 | 35024
 9|. . . . . . .
  326 . . . . . .
  (65 . . . . . .
  325 . . . . . .
     168 . . . .
    (70) . . . .
     16805 . .
     (700) 2 . .
     14004 . .
       280176
       (7004) 4
       280176
          0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
4|01|60|16 | 2004
4|. . . . . .
 . 01 . . . . .
  (4) . . . . .
     160 . .
    (40) . .
     16016
    (400) 4
     16016
       0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.      2 | 85 | 46 | 168
           1 |  .    .
      ----------
Reſt  1 | 8 5  .  .
       (2)6    .  .
        1 5 6  .  .
      ------------
Reſt   2 9 | 4 6
          (32) 8
         2 6 2 4
      -------------
Reſt       3 2 2
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d. i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

$$\begin{array}{r l} 168 & \\ 168 & \\ \hline 1344 & \\ 1008 & \\ 168 & \\ \hline 28224 & \\ 322 & \text{der gebliebene Reſt} \\ \hline 28546 & \text{die gegebene Quadratzahl.} \end{array}$$

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119-125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadratzahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0{,}454276} = 0{,}674$; denn es iſt $\sqrt{0{,}454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0{,}674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0{,}0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine Null zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun dieſe zugeſetzte Null den Werth des Bruchs nicht åndert, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in nr. a.

Z. B. $\sqrt{0{,}828} = \sqrt{0{,}8280}$

```
0,|82|80 | 0,90 Wurzel.
  |81|
 ------
    180
   (18)
```

§. 130.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen ſind, verwandelt man am ſchicklichſten in Decimalbrüche, und ſucht aus dieſen die Wurzel nach nr. a und b §. 129.

So iſt $\frac{1}{3}$ = 0,333333 . . . §. 111.

```
0,|33|33|33 | 0,577 . . Wurzel.
  |25|
  ----
    833 . .
   (10)7 . .
    749 . .
   ---------
     8433
    (114)7
     8029
   ---------
Reſt  404
```

Hierbei iſt zu merken, daß man, wenn der gemeine Bruch nicht genau oder vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, ſo viele Decimalſtellen ſuchen muß, als es die Genauigkeit der verlangten Wurzel erfordert. Da die Wurzel allemal Lången anzeigt, ſo kommt alles darauf an welchen Namen 0 Ganze haben; das übrige låßt ſich hiernach leicht beſtimmen.

§. 131.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden; ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 128. n. 3.

Wäre z. B. $3\frac{1}{8}$ gegeben, ſo iſt $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$; $\frac{25}{8}$ aber ſind = 3,125 = 3,1250. Nun iſt die Wurzel aus 3,1250 = 1,76 . .

```
 3,|12|50 | 1,76 . .
 1 |  |
 ---
 2 12 . .
   (2)7 . .
 1 89 . .
 ------------
    2350
   (34)6
    2076
     ----
Reſt  274
```

Eben ſo, wenn 3,4 gegeben iſt. Nun iſt 3,4 = 3,40; alſo iſt die Wurzel = 1,8 . .

```
 3,|40 | 1,8
 1 |
 ---
 2 40
  (2)8
 2 24
  ----
Reſt 16
```

Oder: 4,25. Die Wurzel iſt 2,0..

```
4,|25 | 2,0..
4 |
———
   25
  (4)
———
Reſt 25
```

§. 132.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Quadratzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann man dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dies Verfahren iſt die gegebene Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 129—131. iſt bemerkt worden.

Es

Es ſei z. B. die Zahl 2 gegeben.

```
    2 | 1,4142 . . .
    1
   ----
   100
   (2)4
    96
   -----
     400
    (28)1
   -------
     11 900
    (2 82)4
     11 296
    --------
       60 400
     (28 28)2
       56 564
      -------
Reſt    3 836
```

Da hier, nachdem aus der ganzen Zahl 2 die Wurzel 1 gefunden iſt, ein Reſt = 1 bleibt, dieſem Reſte, ſo wie jedem andern aber eine Klaſſe Nullen zugeſetzt wird, und unter die niedrigſte Null jedesmal das niedrigſte Zahlzeichen vom Quadrate des folgenden Theils der Wurzel geſetzt, und dieſes in keinem Falle 0 wird, weil von den Wurzeln von 1 bis 9 keine Quadratzahl ſich auf 0 endigt; ſo folgt, daß die Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortgeſetzt werden kann, ohne daß man die Wurzel ſelbſt vollkommen erhält, wofern man nicht den zuletzt gebliebenen Reſt als einen gebrochenen Bruch beifügt, welches aber von keinem Nutzen iſt. Demnach müſſen auch hier die Umſtände entſcheiden, wenn man die Wurzelausziehung endigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich aber ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Decimal-

cimalbruch verwandeln, ſo muß man durch Annäherung nach §. 111. ſo viele Decimalſtellen ſuchen, als man nöthig zu haben glaubt. Bleibt nach allen dieſen Unternehmungen beim Wurzelausziehen dennoch ein Reſt, ſo giebt man dieſem ebenfalls eine Klaſſe Nullen, und verfährt wie n. 1. bei den ganzen Zahlen.

Wäre z. B. die gegebene Zahl 0,4253, ſo iſt die Wurzel = 0,65215 . . .

```
0,|42|53 | 0,65215 . . . .
  |36|
 ----
    653
   (12)5
    625
   -----
     2800
    (130)2
     2604
    ------
      19600
     (1304)1
     -------
      655900
     (13042)5
      652125
     --------
        377500 ꝛc.
```

Oder 124,015, ſo iſt die Wurzel = 11,136 ...

```
1|24,|01|50 | 11,136 ...
1|   |  |
-----
 24 ....
(2)1 ....
-----
  301 ..
 (22)1 ..
------
   8050
  (222)3
   6669
   -----
   138100
   (2226)6
   133596
   ------
     450400
```

§. 133.

Aus dieſer Annäherungsmethode die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ſuchen, ſieht man deutlich, wie man ſich verhalten muß, wenn die gegebenen Zahlen genannt ſind, unter verſchiedenen Namen vorkommen und vollkommene Quadratzahlen ſind.

Wäre demnach die Zahl gegeben: 458 Quadratruthen, 4 Quadratzolle und 2 Quadratlinien, ſo ſieht man dieſe Zahl als einen Decimalbruch unter dem Namen Quadratruthen an, ergänzt die fehlenden Decimalſtellen durch Nullen, und ſucht die Quadratwurzel wie aus Decimalbrüchen durch Annäherung, wenn die gegebene Zahl eine unvollkommene Quadratzahl iſt, welche man aber in jedem Falle daran erkennt, wenn ein Reſt bleibt. 458 R^q 4 Z^q 2 L^q = 458° 00′ 04″ 02‴ Quadratmaß, und in einem Decimalbruche ausgedrückt 458,000402 Quadratruthen.

```
                  4|5 8,|00|04|02 | 21,4009
                  4|
                   ------
                    5 8 . . . . . .
                   (4)1 . . . . . .
                   ------
                    1 7 0 0 . . . .
                     (4 2)4 . . . .
                    1 6 9 6 . . . .
                   ----------
                          4 0 4 . .
                        (4 2 8) . .
                        ---------
                          4 0 4 0 2
                         (4 2 8 0)
                         ----------
Anfang der Annäherung    4 0 4 0 2 0 0
                          (4 2 8 0 0)9
                         3 8 5 2 0 8 1
                         -------------
                 Reſt     1 8 8 1 1 9
```

Demnach iſt die Wurzel 21 R 4 F 0 Z 0 L 9 S oder 21 Ruthen, 4 Fuß, 9 Skrupel Längenmaß. Wären die gefundenen 9 Skrupel ein zu kleiner Theil der geſuchten Länge, ſo hätte man die Annäherung nicht nöthig gehabt. Verlangt man aber noch kleinere Theile, ſo ſetzt man die Annäherung fort.

§. 134.

Hat man Tafeln oder Tabellen, welche die vollkommenen Quadratzahlen, von den Wurzeln 1 bis 1000, oder von 1 bis 10000 enthalten, ſo kann man durch Hülfe der erſtern aus den drei, durch Hülfe der letztern aber aus den vier höchſten Klaſſen einer gegebenen Quadratzahl die dazu gehörigen Wurzeln nehmen, die eben ſo großen oder beinahe ſo großen Quadratzahlen von der gegebenen ſubtrahiren, und die noch fehlenden Theile der Wurzel nach der gewöhnlichen Art oder durch Annäherung ſuchen.

Anmer-

Anmerkung.

Der Gebrauch ſolcher Tafeln verkürzt das Rechnen, und führt auf Zeiterſparung. Man findet ſie entweder mit andern mathematiſchen und trigonometriſchen Tafeln verbunden, oder in Lehrbüchern der Mathematik beſonders abgedruckt.

Man ſehe F. Meinerts Lehrbuch der Mathematik, Theil I. Arithmetik, wo Tafeln und Gebrauch zugleich vorkommen.

Beſonders berechnet findet man die Quadratzahlen von den Wurzeln von 1 bis 12000, in Joh. Paul Buchners Tabula Radicum Quadratorum et Cuborum. Nürnberg 1701.

II.

Die Ausziehung der Kubikwurzeln.

§. 135.

Aufgabe.

Aus einer ganzen Zahl, die aus 4 bis 6 Zahlzeichen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke zu, in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe drei Zahlzeichen. Die höchſte oder die erſte Klaſſe zur Linken kann auch Ein oder zwei Zahlzeichen enthalten. So viel nun die gegebene Zahl Klaſſen hat, ſo viel einzelne Zahlzeichen enthält auch die dazu gehörige Wurzel. Auch hier heiße (wie §. 119.) die Wurzel der höchſten Klaſſe a, die der niedrigſten aber b, ſo iſt a + b die ganze Wurzel.

Es ſey die Zahl 1728.

1|728 |

2) Nun

2) Nun ſuche man in der Tabelle (§. 116.) die Wurzel von 1, oder, wenn man die niedrigſte Klaſſe unterdeſſen als mit Nullen angefüllt betrachtet, ſtatt aus 1, hier aus 1000. Dieſe iſt 10 oder 1 aus 1. Die Wurzel ſetze man in die Stelle des Quotienten wie bei der Diviſion, die ihr zugehörige Kubikzahl aber $a^3 = 1000$ unter die gegebene Kubikzahl, und ſubtrahire

$$\begin{array}{rl|l} & 1|728 & 10 = a \\ a^3 = & 1|000 & \\ \hline & 728 & \end{array}$$

3) Im Reſte iſt noch das dreifache Produkt der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten, oder $3a^2b$, das dreifache Produkt des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils oder $3ab^2$, und die Kubikzahl des zweiten Theils oder b^3 enthalten; um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch Diviſion zu finden, mache man den Diviſor, welches hier in jedem Falle die dreifache Quadratzahl der ſchon gefundenen Wurzel oder $3a^2$ iſt. Da nun $a = 10$ in dem gegenwärtigen Falle, ſo iſt $a^2 = 100$, und $3a^2 = 300$. Dieſe Zahl ſetze man unter die gebliebene niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl in eine Parentheſe und dividire, ſo erhält man den zweiten Theil der Wurzel, hier 2 oder allgemein b.

$$\begin{array}{rl|l} & 1|728 & 10 = a \\ a^3 = & 1|000 & 2 = b \\ \hline 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & \\ & (300) & \end{array}$$

4) Mit dieſem gefundenen zweiten Theile der Wurzel multiplicire man den Diviſor, ſo hat man das dreifache Produkt der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten Theil der Wurzel $3a^2 = 600$, und ſetze es unter den Diviſor.

1|728

$$\begin{array}{rrl|l} & 1 & 728 & 10 = a \\ a^3 = & 1 & 000 & 2 = b \\ \hline 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = & & 728 & \\ & & (300) & \\ 3a^2 b = & & 600 & \end{array}$$

5) Nun mache man das dreifache Produkt des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, hier $3ab^2 = 120$, weil $a = 10$, alſo $3a = 30$; $b = 2$, alſo $b^2 = 4$; folglich $3ab^2 = 30 . 4 = 120$. Dieſe Zahl ſetze man unter die vorige in n. 4 gefundene.

6) Noch fehlt die Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel oder $b^3 = 2 . 2 . 2 = 8$. Dieſe Kubikzahl ſetze man unter die Einer des in n. 5. gefundenen Produkts, addire die in n. 4, 5 und 6. gefundenen Stücke, und ſubtrahire ſie von dem in n. 2. gebliebenen Reſte.

Addirt man endlich die nach einander gefundenen beiden Theile der Wurzel, ſo hat man die Aufgabe aufgelöſt.

$$\begin{array}{rcrl} a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3 = & 1 & 728 & 10 = a \\ a^3 = & 1 & 000 & 2 = b \\ \hline 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = & & 728 & 12 = a + b \\ (3a^2) = & & (300) & \\ 3a^2 b = & & 600 & \\ 3ab^2 = & & 120 & \\ b^3 = & & 8 & \\ \hline 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = & & 728 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

§. 136.

Das Verfahren, die Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ziehen, läßt ſich wenig abkürzen; höchſtens

kann man die im Beiſpiele in §. 135. vorkommenden Nullen wegen der Wurzel 10 anſtatt 1 weglaſſen, wobei man alsdenn auf folgende Art verfährt:

Man ſucht die Wurzel $= a$ aus der höchſten Klaſſe ſo, als wenn die nachfolgende Klaſſe nicht da wäre, und da hat man 1 anſtatt 10; folglich iſt auch $a^3 = 1$. Iſt auf dieſe Art der erſte Theil der Wurzel gefunden, ſo rückt man die folgende Klaſſe aus der Kubikzahl zum etwa gebliebenen Reſte, oder wenn keiner vorhanden, auch ganz allein herunter, und macht den Diviſor $3a^2$. Da nun $a = 1$, ſo iſt $a^2 = 1$, folglich $3a^2 = 3 . 1 = 3$. Dieſen Diviſor ſetzt man unter das erſte oder höchſte Zahlzeichen der herunter gerückten Klaſſe in eine Parentheſe und dividirt. Hat der Diviſor mehr als Ein Zahlzeichen, ſo ſetzt man die dem niedrigſten vorangehenden unter den gebliebenen Reſt, und wenn keiner vorhanden, linker Hand unter die heruntergerückte Klaſſe. Den durch die Diviſion erhaltenen zweiten Theil der Wurzel $= b$, ſetzt man rechter Hand an den erſten, wohin man den Quotienten bei der gemeinen Diviſion zu ſetzen pflegt. Das Produkt des zweiten Theils der Wurzel mit dem Diviſor, ſetzt man ſo unter den Diviſor, daß die niedrigſten Zahlzeichen beider Zahlen untereinander kommen; hier $3 . 2 = 6$, oder $3a^2b$. Das folgende Produkt $3ab^2$ macht man ſo, daß $a = 1$, 3 mal genommen, alſo $3a = 3$ wird. Da nun $b = 2$, ſo iſt $b^2 = 4$, und $3ab^2 = 3 . 4 = 12$. Dieſer Zahl niedrigſtes Zahlzeichen wird unter das mittelſte der herunter gerückten Klaſſe geſetzt, und die übrigen folgen gegen die Linke zu. Die Kubikzahl von b, alſo $b^3 = 2.2.2 = 8$, ſetzt man unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergerückten Klaſſe. Hat dieſe Kubikzahl mehrere Zahlzeichen, ſo folgen die übrigen linker Hand. Die Stücke $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 hier 6, 12 und 8 werden ſo, wie ſie unter einander ſtehen, addirt, und von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte ſubtrahirt. Bleibt kein Reſt, ſo iſt die gegebene Kubikzahl

eine

eine vollkommene, und die theilweiſe gefundene Wurzel rational; bleibt aber ein Reſt, ſo iſt die gegebene Zahl eine unvollkommene Kubikzahl, und die Wurzel eine irrationale Zahl.

$$\begin{array}{rcl}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 1|728 \;|\; 12=a+b \\
a^3 & = & 1| \\
\hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 728 \\
3a^2 & = & (3).. \\
3a^2b & = & 6.. \\
3ab^2 & = & 12. \\
b^3 & = & 8 \\
\hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 728 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

Auf eben dieſe Art wird auch das folgende Beiſpiel behandelt. Es ſey die gegebene Zahl 46785; wie groß iſt die Kubikwurzel?

$$\begin{array}{rcl}
 & & \qquad a+b \\
 & & 46|785 \;|\; 3\;\;6 \\
a^3 & = & 27| \\
 & & 19785 \\
3a^2 & = & (27).. \\
3a^2b & = & 162.. \\
3ab^2 & = & 324. \\
b^3 & = & 216 \\
\hline
 & & 19656 \\
\hline
\text{Reſt} & & 129
\end{array}$$

§. 137.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 7 bis 9 oder noch mehrern Zahlzeichen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Aufloͤſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden hoͤchſten Klaſſen die Wurzel, wie in §. 136. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die dreifache Quadratzahl der bis dahin gefundenen Wurzel oder $3a^2$ iſt, wobei beide gefundene Theile der Wurzel $a+b$ zuſammen fuͤr einen, alſo abermals fuͤr a genommen werden, ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen, unter das hoͤchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch uͤbrigen Zahlzeichen des Diviſors folgen, wie bei der Diviſion unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man, wie in §. 135. fuͤr den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach nr. 1. fuͤr den erſten Theil anſieht. Alles uͤbrige iſt aus §. 135. bekannt.

```
                                      a + b
Es ſei die Zahl    432|081|216|      7   5 6
          a³ =     343                ⏟
                  ———————             a + b
                    89081 . . .
       (3a²) =  (147) . . . .
        3a²b =   735 . . . .
        3ab² =     525 . . .
          b³ =      125 . . .
                ——————————
                  78875 . . .
                 ——————————
                  10206216
       (3a²) =  (16875) . .
        3a²b =   1012 50 . .
        3ab² =       8100 .
          b³ =         216
                ——————————
                  1206216
                 ——————————
                    0
```

Das

Das Verfahren läßt ſich wörtlich ſo ausdrücken: Die Wurzel von 432 iſt $7 = a$; $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 = a^3$. Wird nun 343 von 432 ſubtrahirt, ſo bleibt 89 Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die folgende Klaſſe 081, und es iſt in 89081 noch enthalten $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 117) Macht man den Diviſor $3a^2$, oder $(7 \cdot 7) \cdot 3 = 49 \cdot 3 = 147$ und dividirt in 890, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $5 = b$. Mit 5 multiplicirt man den Diviſor 147, und man hat im Produkte 735, $3a^2b$, welches gerade unter den Diviſor geſchrieben wird. Macht man nun $3ab^2$, oder $(7 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 5 = 21 \cdot 25 = 525$, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen um eine Stelle weiter zur Rechten, und macht auch $b^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen dieſer Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel abermals eine Stelle weiter zur Rechten, und addirt dieſe gefundenen drei Stücke ſo zuſammen, wie ſie unter einander ſtehen ſo hat man $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 73500 + 5250 + 125 = 78875$; 78875 von 89081 ſubtrahirt, läßt 10206 zum Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die niedrigſte oder dritte Klaſſe der gegebenen Zahl, ſo hat man 10206216. In dieſer letzten Zahl ſteckt, wenn die beiden Wurzeltheile a und b zuſammen genommen, oder für einen geſetzt werden, ſo daß $a + b$ nun wieder a, oder $70 + 5$ nun 75 wird, abermals $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Um aufs neue den Wurzeltheil b zu finden, macht man den Diviſor $3a^2$. Da nun $a = 75$; $a^2 = 5625$; $3a^2 = 16875$ iſt, ſo ſetzt man dieſen Diviſor unter 10206216 ſo, daß das niedrigſte Zahlzeichen des Diviſors unter das erſte oder höchſte Zahlzeichen 2 der neu hinzugekommenen Klaſſe zu ſtehen kommt, und dividirt. Da der Quotient hier 6 iſt, ſo iſt dies Zahlzeichen b oder der zweite Theil der Wurzel; wird mit dieſem der Diviſor multiplicirt, ſo erhält man das Product $3a^2b = 101250$, welches unter den Diviſor geſetzt wird. Das darauf folgende Produkt von $3ab^2 = (75 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 6) = 225 \cdot 36 = 8100$ wird ſo unter geſetzt, daß das niedrigſte

 Zahl-

Zahlzeichen unter das mittelſte der hinzugekommenen Klaſſen zu ſtehen kommt, und endlich $b^3 = 6.6.6 = 216$ ſetzt man abermals eine Stelle weiter zur Rechten, oder ſo, daß 6 unter 6 oder die niedrigſten Zahlzeichen untereinander kommen. Wird nun $3a^2b$, $3ab^2 + b^3$ addirt, ſo erhält man die Summe von 10206216; dieſe von der obigen Zahl 10206216 ſubtrahirt, läßt keinen Reſt, und die gegebene Kubikzahl iſt eine vollkommene, ſo wie die dazu gehörige und theilweiſe gefundene Wurzel 756 rational.

§. 138.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſe erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 137. lehret.

§. 139.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Kubikzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als Drei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur Ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes überdenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9 giebt die Kubikzahl nicht mehr als drei Zahlzeichen, d. i. von 1 nur 1, von 9 aber $9 . 9 . 9 = 729$. Da nun von der Wurzel 1 die Kubikzahl nur 1; von der Wurzel 2 die Kubikzahl 8; von der Wurzel 3 die Kubikzahl 27; und von der Wurzel 4 die Kubikzahl nur 64 iſt, alſo mehrere Wurzeln in der Kubikzahl nur eins oder zwei Zahlzeichen haben, ſo kann auch die höchſte Klaſſe in der Kubikzahl auch nur eins oder zwei Zahlzeichen enthalten, weil man doch einen dazu gehörigen Wurzeltheil von 1 bis 4 antrifft. Aus dieſem ergiebt ſich die allgemeine Regel: Jede Kubikzahl

bikzahl beſteht aus dreimal ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, weniger zwei; aber auch in keinem Falle aus mehr, als dreimal ſo viel Zahlzeichen. Eine Wurzel die zwei Zahlzeichen hat, muß nothwendig 10 oder 99 ſeyn, oder zwiſchen dieſen Zahlen enthalten ſeyn. Nun aber iſt 100 > 99, alſo muß die Kubikzahl von 100 größer ſeyn, als von 99 (§. 115). Es iſt die Kubikzahl von 100 die Zahl 1000000, und dieſe Zahl iſt unter allen die kleinſte, die ſieben Zahlzeichen enthalten, alſo kann die Kubikzahl von 99 nur ſechs, d. i. 2. 3 oder dreimal ſo viel Zahlzeichen enthalten. Da ferner die Kubikzahl von 10, oder die kleinſte von allen Wurzeln die zwei Zahlzeichen haben, 1000 iſt, alſo vier Zahlzeichen hat, (2.3) — 2 = viere; ſo folgt, daß dieſe Kubikzahl nur zwei Zahlzeichen weniger enthalten kann, als die Anzahl der Zahlzeichen der Wurzel dreimal genommen.

Dies ſtimmt auch hier vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles läßt ſich demnach auch auf genannte Zahlen anwenden. Denn wenn die gegebene Zahl in Kubikruthen, Kubikfußen, Kubikzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Kubikruthe = 1000 F^c; der F^c = 1000 Z^c ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur drei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Kubikfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen.

Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^3 iſt auch hier immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dieſe drei Stücke zeigen denn an, daß jedes unter ein ihm zugehöriges Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken gegen die Rechte) $3a^2b$, unter das zweite oder mittelſte $3ab^2$, und unter das dritte oder letzte b^3.

§. 140.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Kubikzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle wird die gegebene Zahl wie die ungenannten behandelt, und die Wurzel erhält den Namen der Kubikzahl, nur in Längenmaße.

Beiſpiel.

Es iſt ein Holzhaufe in der Geſtalt eines Würfels aufgeſetzt und ſein Inhalt beträgt 231475544 Kubikzoll; wie lang iſt jede Seite? 614 Längenzolle.

```
                          a+b
         231|475|544|6   1  4
   a³ =  216|          └─┘
                         a + b
         ───
          15 475 . . .
          (108). . . . .
  3a²b =  108 . . . . .
  3ab² =     18 . . . .
    b³ =       1 . . .
         ──────────────
          10981 . . .
         ──────────────
           4494544
          (11163). .
  3a²b =   44652 . .
  3ab² =      2928 .
    b³ =        64
         ──────────────
           4494544
         ──────────────
               0
```

2) Ku-

2) Kubikzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl 311 R^c 665 F^c 752 Z^c der Inhalt eines Würfels; wie groß iſt die Seite deſſelben? 6 R 7 F 8 Z oder 678 Längenzolle. Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
311 |665′|752″|6° 7′ 8″
216 |     ...
 95  665  ...
(10  8).. ...
 75  6..  ...
  8  82.  ...
     343  ..
 84  763
 10  902  752
 (1  346  7)..
 10  773  6..
     128  64..
          512
 10  902  752
      0
```

§. 141.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 1000, 1000000 ꝛc. iſt, oder überhaupt aus 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Aufloͤſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10.10.10 = 1000; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt es mit 100.100.100 = 1000000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, das iſt 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl

ſo iſt 1|000|000|000|000| 10000 die Wurzel.

Anmerkung.

Wenn man eine Zahl erhaͤlt, die aus 1 und einer Reihe Nullen beſteht, ſo muß man, wenn nicht Irrungen entſtehen ſollen, immer darauf ſehen, ob auch die Reihe Nullen durch 3 theilbar iſt; iſt dies nicht, ſo muß man die Wurzel auf die gewoͤhnliche Art ſuchen: So iſt z. B.

```
10|000|000 | 21 ...
 8|
————
 2 000
 (12)
```

§. 142.

Kommt auch bei der Ausziehung der Kubikwurzel irgend wo der Fall vor, daß der Diviſor groͤßer iſt als das Dividendum, d. i. groͤßer als der gebliebene Reſt mit dem hoͤchſten Zahlzeichen der zum Reſte geruͤckten Klaſſe aus der gegebenen Kubikzahl, ſo iſt auch hier der Quotient d. i. der neue Wurzeltheil Null. In dieſem Falle bleibt alles (wie bei der Ausziehung der Quadratwurzeln §. 126.) ungeaͤndert; der Reſt und die dazugekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Kubikzahl dazu geruͤckt, der Diviſor aber-

abermals gemacht, der nun um 100 mal größer wird, d. i. zwei Nullen rechter Hand mehr erhält, als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kömmt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch alsdenn verfährt man, wie vorhin gezeigt worden iſt.

Es ſei z. B. die gegebene Zahl 13824000642; wie groß iſt die Kubikwurzel? beinahe 2400.

```
   13|824|000|642|2400
    8|
  ----
    5 824...
   (12).....
   48 .....
     96 ....
      64 ...
  ----------
    5 824...
  ----------
        000 642
     (172800)
     -----------
     Reſt  642
```

Iſt aber die gegebene Kubikzahl 9129329; ſo iſt die Wurzel 209.

```
   9|129|329|209
   8|
  ---
   1 129 ...
  (12)   ...
  -----------
   1 129 329
    (1200)..
   1 080 0..
      48 60.
         729
  -----------
   1 129 329
  -----------
       0
```

§. 143.

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad a+b \\
\text{Es ſei die Zahl } 45 & |\,42\,|\,76\,|\; 67\;4 \\
a^2 = 36 & |\,.. \qquad\qquad\; a+b \\
2ab+b^2 = 9 & 42 \quad .. \\
(12)7 & \quad .. \\
2ab+b^2 = 889 & \quad .. \\
\hline
2ab+b^2 = 53 & 76 \\
(13\;\;4)4 & \\
2ab+b^2 = 53 & 76 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Hierbei verfährt man wörtlich ſo: die Wurzel von 45 iſt $6 = a$; $6.6 = 36 = a^2$. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor $6.2 = 12 = 2a$ und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $7 = b$; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt $127.7 = 889 = 2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt $= a$, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl $134 = 2a$ unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals $= b$ wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun 1.1 = 1; 2.2 = 4; 3.3 = 9 iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von 100 = 10000; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Die

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den **erſten** Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

```
                              a + b
Es ſei die Zahl  45 | 42 | 76 | 674
          a² = 36 | ..            a + b
   2ab + b² =  9 42    ..
              (12)7    ..
   2ab + b² =  8 89    ..
   2ab + b² =    53 76
               (13 4)4
   2ab + b² =    53 76
                    0
```

Hierbei verfährt man **wörtlich** ſo: die Wurzel von 45 iſt 6 = a; 6.6 = 36 = a^2. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor 6.2 = 12 = 2a und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel 7 = b; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt 127.7 = 889 = $2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt = a, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl 134 = 2a unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals = b wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun $1 \cdot 1 = 1$; $2 \cdot 2 = 4$; $3 \cdot 3 = 9$ iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von 100 = 10000; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Das Zeichen der Wurzel iſt ein r oder $\sqrt{\ }$, welches vor die gegebene Zahl geſetzt wird, aus welcher die Wurzel geſucht werden ſoll. Für die Quadratwurzeln ſetzt man über r oder $\sqrt{\ }$ das Zahlzeichen 2, und für die Kubikwurzeln über r oder $\sqrt{\ }$ das Zahlzeichen 3. Bei dem Quadratwurzelzeichen kann das Zahlzeichen auch wegbleiben, und beide Ausdrücke $\sqrt[2]{\ }$ und $\sqrt{\ }$ haben eine gleiche Bedeutung. Das über das Wurzelzeichen geſetzte Zahlzeichen heißt der Exponent der Wurzel. Durch die Vorſetzung dieſer Zeichen vor die Quadrat- und Kubikzahlen wird die Wurzel nicht wirklich ausgezogen, ſondern nur angedeutet, daß ſie geſucht werden ſoll; demnach heißt $\sqrt[2]{16}$ oder $\sqrt{16}$, die Quadratwurzel aus 16; $\sqrt[3]{64}$ aber die Kubikwurzel aus 64. Allgemein $\sqrt{a^2}$ iſt die Quadratwurzel aus der Quadratzahl von a, und $\sqrt[3]{a^3}$ die Kubikwurzel aus der Kubikzahl von a. Da nun dem Entſtehen der Quadrat- und Kubikzahlen das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln gerade entgegengeſetzt iſt, ſo ſind auch die Exponenten der Quadrat- und Kubikzahlen den Exponenten ihrer Wurzeln entgegengeſetzt; folglich iſt $\sqrt[2]{4^2} = 4$; $\sqrt[3]{64} = 4$; allgemein $\sqrt[2]{a^2} = a$, und $\sqrt[3]{a^3} = a$: mithin müſſen auch die Regeln, welche man beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln befolgt, dieſen entgegengeſetzt ſeyn, welche man anwendet, wenn man Quadrat- und Kubikzahlen macht. Alle gleichgroße Wurzeln geben gleichgroße Quadrat- oder Kubikzahlen; und umgekehrt: aus gleichen Quadrat- oder Kubikzahlen, ſind auch die dazu gehörigen Wurzeln gleich. Da nun $4 = (3+1)$ iſt, ſo iſt auch $4^2 = (3+1)^2$, d. i. $3+1 = 4$, und alſo iſt auch $(3+1)^2 = 4^2$. Eben ſo iſt auch $4^3 = (3+1)^3$.

§. 116.

§. 116.

Alle Quadrat- und Kubikzahlen, die man durch die Multiplikation irgend einer beſtimmten Zahl erhält, nennt man vollkommen; von unbeſtimmten Zahlen aber, wie z. B. von ſolchen Decimalbrüchen, die ohne Ende fortgehen und zu klein ſind, wenn man den Reſt wegläßt, (wie in §. 111.) unvollkommen. Die beſtimmten Zahlen nennt man Rationalzahlen, die unbeſtimmten aber Irrationalzahlen. Demnach giebt es vollkommene und unvollkommene Quadrat- und Kubikzahlen, und aus eben dieſem Grunde auch rationale und irrationale Quadrat- und Kubikwurzeln.

Die rationalen Wurzeln von 1 bis 9 und die davon gemachten vollkommenen Quadrat- und Kubikzahlen, kann man in eine Tabelle bringen, und ſie nach und nach auswendig lernen.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Unterſucht man dieſe vollkommenen Quadratzahlen, ſo findet man in der Tabelle 1, 4, 9, 16 ꝛc. Aber zwiſchen 1 und 4, liegt 2 und 3. Da nun die Quadratwurzel von 1, Eins iſt und von 4, die Zahl 2: ſo haben 2 und 3 zwar die Wurzel 1, ſo weit ſie in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann, aber da die Ausziehung der Wurzel aus dem Reſte, woran man Nullen rechter Hand ſetzt, ohne Ende fortgeführt werden kann, ſo kann man nie vollkommen genau die Größe der Wurzeln aus den Quadratzahlen 2 und 3 angeben. Eben ſo iſt es mit den Zahlen zwiſchen 4 und 9; 9 und 16 ꝛc. Auf eine gleiche Art verhält es ſich mit den Kubikzahlen zwi-

ſchen 1 und 8; 8 und 27; 27 und 64 ꝛc. Demnach macht eine ſolche fortgeſetzte Tabelle die Kenntniß der Quadrat- und Kubikzahlen, eben ſo wenig entbehrlich, als das Ausziehen ihrer Wurzeln. Die Quadrat- und Kubikwurzeln von 10, 100, 1000 ꝛc. kann man leicht in Gedanken finden.

§. 117.

Alle Wurzeln von 1 bis 9 nennt man einfache, alle übrigen aber, zuſammengeſetzte. Jede aus mehrern Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahl, alſo auch jede ſolche Wurzel, kann man ſo betrachten, als wenn ſie aus Zehner und Einer zuſammengeſetzt wäre, auch ſelbſt dann noch, wenn die Menge der Zehner, Hunderte oder Tauſende ꝛc. ausmacht. Demnach wäre 10 als bloße Zahl oder als Wurzel betrachtet, aus 1 Zehner und 0 zuſammengeſetzt, d. i. 10; 12 aber aus 1 Zehner und 2 Einer, weil $10+2=12$ iſt. Eben ſo iſt $426=420$ Zehner $+6$ Einer, weil $420+6=426$ iſt. Und ſo in allen ähnlichen Fällen: $143046=143040+6$, wo denn 143040 die Zehner, 6 aber die Einer anzeigt.

Stellt man ſich die Zehner als den erſten Theil einer Wurzel unter dem allgemeinen Zeichen a vor, ſo machen die Einer den zweiten Theil unter dem allgemeinen Zeichen b aus; demnach kann man, unter dieſer Vorausſetzung, von zuſammengeſetzten Wurzeln auch die Quadrat- und Kubikzahlen theilweiſe machen. So ſei z. B. $12=10+2$ eine Wurzel. Die Quadratzahl iſt

$10+2$	Allgemein	$a+b$
$10+2$		$a+b$
$10.2+2^2$		$ab+b^2$
$10^2+10.2$		a^2+ab
$10^2+2(10.2)+2^2$		$a^2+2ab+b^2$

Da

$$\begin{array}{rrcl} \text{Da nun} & 10^2 & = & 100 \\ & 2(10.2) & = & 40 \\ & 2^2 & = & 4 \\ \hline \end{array}$$

ſo iſt $10^2 + 2(10.2) + 2^2 = 144 = 12.12.$

Demnach beſteht eine Quadratzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Quadratzahl des erſten Theils, $10^2 = a^2$, dem doppelten Produkte der beiden Theile in einander $2(10.2) = 2ab$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^2 = b^2$.

Iſt $12 = 10 + 2$ abermals die Wurzel; ſo iſt die Kubikzahl

$$\begin{array}{l} 10^2 + 2(10.2) + 2^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ \quad\quad\quad 10 \quad + 2 \\ \hline 10^2.2 + 2(10.2^2) + 2^3 \\ 10^3 + 2(10^2.2) + 10.2^2 \\ \hline 10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 \end{array}$$

Und allgemein:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ \quad\quad a \quad + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Da nun} & 10^3 & = & 1000 \\ & 3(10^2.2) & = & 600 \\ & 3(10.2^2) & = & 120 \\ & 2^3 & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

ſo iſt $10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 = 1728 = 12.12.12$

oder $12^2.12 = 1728.$

Demnach beſteht eine Kubikzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Kubikzahl des erſten

Theils $10^3 = a^3$, dem dreifachen Produkte der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten $3(10^2 . 2) = 3a^2b$, aus dem dreifachen Produkte des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils $3(10 . 2^2) = 3ab^2$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^3 = b^3$.

Man ſieht hieraus, daß alle Quadrat- und Kubikzahlen durch Hülfe der Multiplikation und Addition, aus ihren Wurzeln entſtehen; folglich werden ſo wohl die Quadrat- als auch die Kubikwurzeln, aus vorgeſchriebenen Quadrat- und Kubikzahlen, durch die der Multiplikation und Addition entgegengeſetzten Rechnungsarten, nämlich durch die Diviſion und Subtraktion, gefunden werden können.

§. 118.

Die Quadrat- und Kubikzahlen werden auch für ſich, ohne Verbindung mit andern Lehren, im Forſtweſen mit Nutzen angewandt, und durch ſie laſſen ſich manche Aufgaben auflöſen, die durch keine andern Rechnungen aufgelöſet werden können:

1) Gebrauch der Quadratzahlen.

Es ſoll in ein Viereck ſo wohl nach der Länge, als auch nach der Breite eine Linienweiſe Baumanpflanzung ſo gemacht werden, daß jede Reihe 88 Stück Bäume ſo erhalte, daß man in gerader Linie durch die Anpflanzung ſehen könne: da die Figur der Anpflanzung ein Quadrat iſt, wieviel Stämme ſind erforderlich, den beſchriebenen Platz zu beſetzen? 7744 Stämme; denn

88	die Quadratwurzel
88	
704	
704	
Grundfläche 7744	Quadratzahl

2)

2) Gebrauch der Kubikzahlen.

Ein Malter Holz hält auf dem Harzgebirge 48 Leipziger Werkzolle in der Länge, Breite und Höhe. Wieviel Werkzolle machen alſo ſeinen ganzen körperlichen Inhalt aus, d. i. wieviel Würfel, deren jeder 1 Zoll lang, breit und hoch iſt, gehören zu einem Malter Holz, wenn derſelbe als ein dichter Körper betrachtet wird? 110592 Kubikzolle; denn

	48	die Kubikwurzel
	48	
	384	
	192	
Grundfläche	2304	Quadratzahl
	48	
	18432	
	9216	
Körperlicher Inhalt	110592	Kubikzahl in Kubikzollen.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I.

Die Ausziehung der Quadratwurzeln.

§. 119.

Aufgabe.

Aus einer ganzen Zahl, die aus 3 oder 4 Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Aufloſung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke zu in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe zwei Zahlzeichen. In der hoͤchſten Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen ſtehen. So viel nun die gegebene Zahl Klaſſen hat, ſo viel einzelne Zahlzeichen enthaͤlt auch die dazu gehoͤrige Wurzel. Die Wurzel der hoͤchſten Klaſſe heiße a, die der niedrigſten aber b, ſo iſt a + b die ganze Wurzel. Es ſei die Zahl 144.

1 | 44 |

2) Nun ſuche man in der Tabelle (§. 116) die Wurzel von 1, oder, wenn man die niedrigſte Klaſſe anfaͤnglich als mit Nullen erfuͤllt betrachtet, ſtatt aus 1, hier aus 100. Dieſe iſt 10 oder 1 aus 1. Die Wurzel ſetze man in die Stelle des Quotienten, wie bei der Diviſion, die ihr zugehoͤrige Quadratzahl aber a = 100 unter die gegebene Quadratzahl und ſubtrahire

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = 1 & 00 & \\ \hline & 44 & \end{array}$$

3) Im Reſte iſt noch das doppelte Produkt der beiden Theile und die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel enthalten $= 2ab + b^2$; um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch Diviſion zu finden, mache man den Diviſor, welches, in jedem Falle, die ſchon gefundene Wurzel doppelt genommen, alſo allgemein 2a iſt. Da nun a = 10 in dieſem Falle, ſo iſt 2a = 2 . 10 oder 20. Dieſe Zahl ſetze man unter die gebliebene niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl in eine Parentheſe und dividire, ſo erhaͤlt man den zweiten Theil der Wurzel, hier 2 oder allgemein b.

$$\begin{array}{rr|l|l} & 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & \\ & & (20) & \end{array}$$

4) Mit dieſem ſo gefundenen zweiten Theil der Wurzel multiplicire man den Diviſor, ſo hat man das doppelte Produkt der beiden Theile in einander, hier 20.2 oder 2ab, und ſetze es unter den Diviſor.

$$\begin{array}{rr|l|l} & 1 & 44 & 10 = a \\ & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & \\ & & (20) & \\ 2ab = & & 40 & \end{array}$$

5) Noch fehlt die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, oder 2.2 = 4 oder b^2. Dieſes Quadrat ſetze man unter die Einer des vorhin gefundenen Produkts, addire dies Quadrat und das in N. 4 gefundene doppelte Produkt der beiden Theile in einander, und ſubtrahire dieſe Summe von dem in N. 3 gebliebenen Reſte. Addirt man endlich die nach einander gefundenen beiden Theile der Wurzel, ſo hat man die Aufgabe aufgelöſet.

$$\begin{array}{rr|l|l} a^2 + 2ab + b^2 = & 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & 12 = a + b \\ 2a & & (20) & \\ 2ab = & & 40 & \\ b^2 = & & 4 & \\ \hline & & 44 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

§. 120.

Etwas abgekürzt, wenn man die doch unnöthigen Nullen wegläßt, iſt das Verfahren folgendes: Man ſucht nämlich, ohne auf die niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl zu merken, die Wurzel aus der höchſten Klaſſe; dieſe iſt hier 1, und macht davon das Quadrat, hier iſt auch dieſes 1. Nachdem man dieſe Quadratzahl des erſten Theils der Wurzel unter die höchſte Klaſſe, d. i. hier unter 1 geſetzt, ſubtrahirt und keinen Reſt gefunden hat; ſo rückt man die niedrigſte oder überhaupt die folgende Klaſſe der gegebenen Zahl herunter, nimmt den gefundenen erſten Theil der Wurzel doppelt als Diviſor, ſetzt die für dieſen Diviſor gefundene Zahl unter das höchſte Zahlzeichen dieſer Klaſſe und dividirt. Den durch dieſe Diviſion gefundenen zweiten Theil der Wurzel ſetzt man rechter Hand an den Diviſor, d. i. unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergenommenen Klaſſe und multiplicirt dieſen Theil ſo wie den Diviſor mit dem Quotienten, oder dem zweiten Theile der Wurzel. Subtrahirt man dieſes ſo gefundene Produkt von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte, ſo zeigt ſichs, ob abermals ein Reſt bleibt oder nicht. Iſt das *erſte*, ſo iſt die gegebene Zahl eine *unvollkommene Quadratzahl* und die *Wurzel irrational*; iſt aber das *letzte*, ſo iſt ſie *vollkommen* und die gefundene Wurzel *rational*.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a + b \\
a^2 + 2ab + b^2 = & 1 \mid 44 & 1 \quad 2 \\
a^2 = & 1 & \\
\hline
2ab + b^2 = & 44 & \\
2a \quad & (2) & \\
2ab + b^2 = & 44 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Auf eine ähnliche Art verfährt man mit der folgenden Zahl. Es ſei 2025 gegeben; wie groß iſt die Quadratwurzel dieſer Zahl? 45.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & & & a+b \\
a^2+2ab+b^2 = & 20 & 25 & 4\ 5 \\
a^2 = & 16 & & \\
\hline
2ab+b^2 = & 4 & 25 & \\
 & 2a & (8)5 & \\
2ab+b^2 = & 4 & 25 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

§. 121.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 5, 6 oder mehrern Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel wie in §. 120. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die bis dahin gefundene Wurzel doppelt oder 2mal genommen iſt, wobei nun die ſchon gefundenen beiden Theile der Wurzel $a+b$ für eine, alſo für a genommen werden; ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſor folgen, wie bei der Diviſion, unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man wie in §. 120.

für

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

				a + b
Es ſei die Zahl	45	42	76	67 4
$a^2 = $	36	..		a + b
$2ab + b^2 = $	9	42	..	
		(12)7	..	
$2ab + b^2 = $	8	89	..	
$2ab + b^2 = $		53	76	
		(13	4)4	
$2ab + b^2 = $		53	76	
			0	

Hierbei verfährt man wörtlich ſo: die Wurzel von 45 iſt 6 = a; 6.6 = 36 = a^2. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor 6.2 = 12 = 2a und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel 7 = b; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt 127.7 = 889 = $2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt = a, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl 134 = 2a unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals = b wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun 1.1 = 1; 2.2 = 4; 3.3 = 9 iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von 100 = 10000; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
  67|89|76 | 824 R.
  64|
 ------
   389
  (16)2
   324
 ------------
     6576
   (164)4
     6576
   ----------
       0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
     20 Rthlr. 4 gr.
   24
 ---------
   4|84 | 22 Perſonen.
   4|
 ---------
    84
   (4)2
    84
 ---------
     0
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $12R^q\ 81F^q\ 64Z^q$ der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Långenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Långenmaße.

```
12° | 81′ | 64″ | 3° 5′ 8″ Långenmaß
 9  |     | ..
 3 8 1  ..
  (6)5  ..
 3 2 5  ..
 ----------
   5 6 6 4
    (7 0)8
   5 6 6 4
 ----------
      0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10.10 = 100; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt 100.100 = 10000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Ausziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
12 | 26|68|05|76 | 35024
 9 | . . . . . . . .
   326 . . . . .
    (65 . . . . .
   325 . . . . .
      168 . . . .
     (70)  . . . .
      16805 . .
       (700) 2 . .
      14004 . .
        280176
         (7004) 4
        280176
           0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
4 | 01|60|16 | 2004
4 | . . . . . .
    . 01 . . . . .
    (4)  . . . .
       160 . .
      (40)  . .
        16016
         (400) 4
        16016
          0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.     2|85|46 | 168
          1| . .  . .
      ---------
     Reſt 1|85 . .
          (2)6 . .
          1 5 6 . .
      -----------
     Reſt 29|4 6
           (32) 8
          2 6 2 4
      -------------
     Reſt 3 2 2
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d.i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

```
       168
       168
     -----
      1344
     1008
     168
    ------
     28224
       322 der gebliebene Reſt
    ------
     28546 die gegebene Quadratzahl.
```

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119. 125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadratzahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0{,}454276} = 0{,}674$; denn es iſt $\sqrt{0{,}454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0{,}674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0{,}0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine Null zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun dieſe zugeſetzte Null den Werth des Bruchs nicht ändert, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in nr. a.

Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280}$

```
0,|82|80 | 0,90 Wurzel.
  |81|
 -----
   180
  (18)
```

§. 130.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Quadratzahlen ſind, verwandelt man am ſchicklichſten in Decimalbrüche, und ſucht aus dieſen die Wurzel nach nr. a und b §. 129.

So iſt $\frac{1}{3}$ = 0,333333 . . . §. 111.

```
0,|33|33|33 | 0,577 . . Wurzel.
  |25|
 -----
   833 . .
  (10)7 . .
   749 . .
  --------
    8433
   (114)7
    8029
  --------
Reſt 404
```

Hierbei iſt zu merken, daß man, wenn der gemeine Bruch nicht genau oder vollkommen in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, ſo viele Decimalſtellen ſuchen muß, als es die Genauigkeit der verlangten Wurzel erfordert. Da die Wurzel allemal Längen anzeigt, ſo kommt alles darauf an welchen Namen 0 Ganze haben; das übrige läßt ſich hiernach leicht beſtimmen.

§. 131.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden; ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 128. n. 3.

Wäre z. B. $3\frac{1}{8}$ gegeben, ſo iſt $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$; $\frac{25}{8}$ aber ſind = 3,125 = 3,1250. Nun iſt die Wurzel aus 3,1250 = 1,76 . .

```
 3,|1 2|5 0 | 1,76 . .
 1 |   |
 ---
 2 1 2 . .
   (2)7 . .
 1 8 9 . .
 ---------
    2 3 5 0
    (3 4)6
    2 0 7 6
    -------
Reſt  2 7 4
```

Eben ſo, wenn 3,4 gegeben iſt. Nun iſt 3,4 = 3,40; alſo iſt die Wurzel = 1,8 . .

```
 3,|4 0 | 1,8
 1 |
 ---
 2 4 0
  (2)8
 2 2 4
 -----
Reſt 1 6
```

Oder: 4,25. Die Wurzel iſt 2,0..

```
4,|25 | 2,0..
4 |
----
   25
  (4)
  ----
Reſt 25
```

§. 132.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Quadratzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann man dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dies Verfahren iſt die gegebene Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 129—131. iſt bemerkt worden.

Es ſei z. B. die Zahl 2 gegeben.

```
   2 | 1,4142 . . .
   1
  ----
   100
   (2)4
    96
    ----
     400
     (28)1
    ------
     11900
     (282)4
     11296
     ------
       60400
       (2828)2
       56564
      -------
Reſt    3836
```

Da hier, nachdem aus der ganzen Zahl 2 die Wurzel 1 gefunden iſt, ein Reſt = 1 bleibt, dieſem Reſte, ſo wie jedem andern aber eine Klaſſe Nullen zugeſetzt wird, und unter die niedrigſte Null jedesmal das niedrigſte Zahlzeichen vom Quadrate des folgenden Theils der Wurzel geſetzt, und dieſes in keinem Falle 0 wird, weil von den Wurzeln von 1 bis 9 keine Quadratzahl ſich auf 0 endigt; ſo folgt, daß die Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortgeſetzt werden kann, ohne daß man die Wurzel ſelbſt vollkommen erhält, wofern man nicht den zuletzt gebliebenen Reſt als einen gebrochenen Bruch beifügt, welches aber von keinem Nutzen iſt. Demnach müſſen auch hier die Umſtände entſcheiden, wenn man die Wurzelausziehung endigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich aber ein gemeiner Bruch nicht genau in einen De-

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
 67|89|76 | 824 R.
 64|
 ---
  389 ..
 (16)2 ..
  324 ..
 ---------
   6576
  (164)4
   6576
 ---------
      0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
 20 Rthlr. 4 gr.
 24
 ------
 4|84 | 22 Perſonen.
 4|
 ------
   84
  (4)2
   84
 ------
    0
```

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
67|89|76 | 824 R.
64|
----
  389 ..
 (16)2 ..
  324 ..
-----------
   6576
  (164)4
   6576
  ---------
     0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
20 Rthlr. 4 gr.
 24
-----
 4|84 | 22 Perſonen.
 4|
------
  84
 (4)2
  84
------
  0
```

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
 67|89|76 | 824 R.
 64|  |
 ---
   389 . .
  (16)2 . .
   324 . .
 ---------
    6576
   (164)4
    6576
  --------
      0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
    20 Rthlr. 4 gr.
     24
   ------
    4|84 | 22 Perſonen.
    4|
   ------
     84
    (4)2
     84
   ------
      0
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $12R^q\ 81F^q\ 64Z^q$ der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Längenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
12°|81'|64" | 3° 5' 8" Längenmaß
 9 |   |..
---
 3 8 1 ..
  (6)5 ..
 3 2 5 ..
----------
   5 6 6 4
    (7 0)8
   5 6 6 4
----------
       0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt $10 . 10 = 100$; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt $100 . 100 = 10000$, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Auszziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
12 | 26|68|05|76 | 35024
 9 | .. .. .. ..
 ----
  326 .. .. ..
  (65 .. .. ..
  325 .. .. ..
  ----
    168 .. ..
    (70) .. ..
    ----
    16805 ..
    (700) 2 ..
    14004 ..
    ------
     280176
     (7004) 4
     280176
     ------
          0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
4 | 01|60|16 | 2004
4 | .. .. ..
 ----
  . 01 .. ..
   (4) .. ..
  ----
    160 ..
    (40) ..
    ----
    16016
    (400) 4
    16016
    -----
        0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.      2 | 85 | 46 | 168
           1 | . .  . .
      ---------
      Reſt 1 | 85 . .
             (2)6 . .
             1 5 6 . .
      ---------------
      Reſt  29 | 4 6
              (32) 8
             2 6 2 4
      ---------------
      Reſt   3 2 2
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d. i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

```
      168
      168
     ────
     1344
    1008
    168
   ──────
    28224
      322 der gebliebene Reſt
   ──────
    28546 die gegebene Quadratzahl.
```

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119. 125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadratzahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0,454276} = 0,674$; denn es iſt $\sqrt{0,454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0,674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0,0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0,12$.

 b)

ſchen 1 und 8; 8 und 27; 27 und 64 ꝛc. Demnach macht eine ſolche fortgeſetzte Tabelle die Kenntniß der Quadrat- und Kubikzahlen, eben ſo wenig entbehrlich, als das Ausziehen ihrer Wurzeln. Die Quadrat- und Kubikwurzeln von 10, 100, 1000 ꝛc. kann man leicht in Gedanken finden.

§. 117.

Alle Wurzeln von 1 bis 9 nennt man einfache, alle übrigen aber, zuſammengeſetzte. Jede aus mehrern Zahlzeichen zuſammengeſetzte Zahl, alſo auch jede ſolche Wurzel, kann man ſo betrachten, als wenn ſie aus Zehner und Einer zuſammengeſetzt wäre, auch ſelbſt dann noch, wenn die Menge der Zehner, Hunderte oder Tauſende ꝛc. ausmacht. Demnach wäre 10 als bloße Zahl oder als Wurzel betrachtet, aus 1 Zehner und 0 zuſammengeſetzt, d. i. 10; 12 aber aus 1 Zehner und 2 Einer, weil $10+2=12$ iſt. Eben ſo iſt $426=420$ Zehner $+6$ Einer, weil $420+6=426$ iſt. Und ſo in allen ähnlichen Fällen: $143046=143040+6$, wo denn 143040 die Zehner, 6 aber die Einer anzeigt.

Stellt man ſich die Zehner als den erſten Theil einer Wurzel unter dem allgemeinen Zeichen a vor, ſo machen die Einer den zweiten Theil unter dem allgemeinen Zeichen b aus; demnach kann man, unter dieſer Vorausſetzung, von zuſammengeſetzten Wurzeln auch die Quadrat- und Kubikzahlen theilweiſe machen. So ſei z. B. $12=10+2$ eine Wurzel. Die Quadratzahl iſt

$10+2$	Allgemein	$a+b$
$10+2$		$a+b$
$10.2+2^2$		$ab+b^2$
$10^2+10.2$		a^2+ab
$10^2+2(10.2)+2^2$		$a^2+2ab+b^2$

Da

$$\begin{array}{lrcl} \text{Da nun} & 10^2 & = & 100 \\ & 2(10.2) & = & 40 \\ & 2^2 & = & 4 \\ \hline \end{array}$$

so iſt $10^2 + 2(10.2) + 2^2 = 144 = 12.12.$

Demnach beſteht eine Quadratzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Quadratzahl des erſten Theils, $10^2 = a^2$, dem doppelten Produkte der beiden Theile in einander $2(10.2) = 2ab$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^2 = b^2$.

Iſt $12 = 10 + 2$ abermals die Wurzel; ſo iſt die Kubikzahl

$$\begin{array}{l} \quad\quad 10^2 + 2(10.2) + 2^2 \text{ (aus dem vor-} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 10 \quad + 2 \quad \text{hergehenden)} \\ \hline \quad\quad 10^2.2 + 2(10.2^2) + 2^3 \\ 10^3 + 2(10^2.2) + 10.2^2 \\ \hline 10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 \end{array}$$

Und allgemein:

$$\begin{array}{l} \quad\quad a^2 + 2ab + b^2 \text{ (aus dem vorhergehenden)} \\ \quad\quad\quad\quad a + b \\ \hline \quad\quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Da nun} & 10^3 & = & 1000 \\ & 3(10^2.2) & = & 600 \\ & 3(10.2^2) & = & 120 \\ & 2^3 & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

so iſt $10^3 + 3(10^2.2) + 3(10.2^2) + 2^3 = 1728 = 12.12.12$
oder $12^2.12 = 1728.$

Demnach beſteht eine Kubikzahl, deren Wurzel zwei Theile hat, aus der Summe der Kubikzahl des erſten

Theils $10^3 = a^3$, dem dreifachen Produkte der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten $3(10^2 . 2) = 3a^2b$, aus dem dreifachen Produkte des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils $3(10 . 2^2) = 3ab^2$, und aus der Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel $2^3 = b^3$.

Man ſieht hieraus, daß alle Quadrat- und Kubikzahlen durch Hülfe der Multiplikation und Addition, aus ihren Wurzeln entſtehen; folglich werden ſo wohl die Quadrat- als auch die Kubikwurzeln, aus vorgeſchriebenen Quadrat- und Kubikzahlen, durch die der Multiplikation und Addition entgegengeſetzten Rechnungsarten, nämlich durch die Diviſion und Subtraktion, gefunden werden können.

§. 118.

Die Quadrat- und Kubikzahlen werden auch für ſich, ohne Verbindung mit andern Lehren, im Forſtweſen mit Nutzen angewandt, und durch ſie laſſen ſich manche Aufgaben auflöſen, die durch keine andern Rechnungen aufgelöſet werden können:

1) Gebrauch der Quadratzahlen.

Es ſoll in ein Viereck ſo wohl nach der Länge, als auch nach der Breite eine Linienweiſe Baumanpflanzung ſo gemacht werden, daß jede Reihe 88 Stück Bäume ſo erhalte, daß man in gerader Linie durch die Anpflanzung ſehen könne: da die Figur der Anpflanzung ein Quadrat iſt, wieviel Stämme ſind erforderlich, den beſchriebenen Platz zu beſetzen? 7744 Stämme; denn

$$\begin{array}{rl} 88 & \text{die Quadratwurzel} \\ 88 & \\ \hline 704 & \\ 704 & \\ \hline \text{Grundfläche } 7744 & \text{Quadratzahl} \end{array}$$

2)

2) Gebrauch der Kubikzahlen.

Ein Malter Holz hält auf dem Harzgebirge 48 Leipziger Werkzolle in der Länge, Breite und Höhe. Wieviel Werkzolle machen alſo ſeinen ganzen körperlichen Inhalt aus, d. i. wieviel Würfel, deren jeder 1 Zoll lang, breit und hoch iſt, gehören zu einem Malter Holz, wenn derſelbe als ein dichter Körper betrachtet wird? 110592 Kubikzolle; denn

	48	die Kubikwurzel
	48	
	384	
	192	
Grundfläche	2304	Quadratzahl
	48	
	18432	
	9216	
Körperlicher Inhalt	110592	Kubikzahl in Kubikzollen.

Zweiter Abſchnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

I.

Die Ausziehung der Quadratwurzeln.

§. 119.

Aufgabe.

Aus einer ganzen Zahl, die aus 3 oder 4 Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke zu in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe zwei Zahlzeichen. In der höchſten Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen ſtehen. So viel nun die gegebene Zahl Klaſſen hat, ſo viel einzelne Zahlzeichen enthält auch die dazu gehörige Wurzel. Die Wurzel der höchſten Klaſſe heiße a, die der niedrigſten aber b, ſo iſt a + b die ganze Wurzel. Es ſei die Zahl 144.

$$1 \mid 44 \mid$$

2) Nun ſuche man in der Tabelle (§. 116) die Wurzel von 1, oder, wenn man die niedrigſte Klaſſe anfänglich als mit Nullen erfüllt betrachtet, ſtatt aus 1, hier aus 100. Dieſe iſt 10 oder 1 aus 1. Die Wurzel ſetze man in die Stelle des Quotienten, wie bei der Diviſion, die ihr zugehörige Quadratzahl aber a = 100 unter die gegebene Quadratzahl und ſubtrahire

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = 1 & 00 & \\ \hline & 44 & \end{array}$$

3) Im Reſte iſt noch das doppelte Produkt der beiden Theile und die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel enthalten $= 2ab + b^2$; um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch Diviſion zu finden, mache man den Diviſor, welches, in jedem Falle, die ſchon gefundene Wurzel doppelt genommen, alſo allgemein 2a iſt. Da nun a = 10 in dieſem Falle, ſo iſt 2a = 2.10 oder 20. Dieſe Zahl ſetze man unter die gebliebene niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl in eine Parentheſe und dividire, ſo erhält man den zweiten Theil der Wurzel, hier 2 oder allgemein b.

$$\begin{array}{rr|l|l} & 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & \\ & & (20) & \end{array}$$

4) Mit dieſem ſo gefundenen zweiten Theil der Wurzel multiplicire man den Diviſor, ſo hat man das doppelte Produkt der beiden Theile in einander, hier 20.2 oder 2ab, und ſetze es unter den Diviſor.

$$\begin{array}{rr|l|l} & 1 & 44 & 10 = a \\ & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & \\ & & (20) & \\ 2ab = & & 40 & \end{array}$$

5) Noch fehlt die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, oder 2.2 = 4 oder b^2. Dieſes Quadrat ſetze man unter die Einer des vorhin gefundenen Produkts, addire dies Quadrat und das in N. 4 gefundene doppelte Produkt der beiden Theile in einander, und ſubtrahire dieſe Summe von dem in N. 3 gebliebenen Reſte. Addirt man endlich die nach einander gefundenen beiden Theile der Wurzel, ſo hat man die Aufgabe aufgelöſet.

$$\begin{array}{rr|l|l} a^2 + 2ab + b^2 = & 1 & 44 & 10 = a \\ a^2 = & 1 & 00 & 2 = b \\ \hline 2ab + b^2 = & & 44 & 12 = a + b \\ 2a & & (20) & \\ 2ab = & & 40 & \\ b^2 = & & 4 & \\ \hline & & 44 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

§. 120.

§. 120.

Etwas abgekürzt, wenn man die doch unnöthigen Nullen wegläßt, iſt das Verfahren folgendes: Man ſucht nämlich, ohne auf die niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl zu merken, die Wurzel aus der höchſten Klaſſe; dieſe iſt hier 1, und macht davon das Quadrat, hier iſt auch dieſes 1. Nachdem man dieſe Quadratzahl des erſten Theils der Wurzel unter die höchſte Klaſſe, d. i. hier unter 1 geſetzt, ſubtrahirt und keinen Reſt gefunden hat; ſo rückt man die niedrigſte oder überhaupt die folgende Klaſſe der gegebenen Zahl herunter, nimmt den gefundenen erſten Theil der Wurzel doppelt als Diviſor, ſetzt die für dieſen Diviſor gefundene Zahl unter das höchſte Zahlzeichen dieſer Klaſſe und dividirt. Den durch dieſe Diviſion gefundenen zweiten Theil der Wurzel ſetzt man rechter Hand an den Diviſor, d. i. unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergenommenen Klaſſe und multiplicirt dieſen Theil ſo wie den Diviſor mit dem Quotienten, oder dem zweiten Theile der Wurzel. Subtrahirt man dieſes ſo gefundene Produkt von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte, ſo zeigt ſichs, ob abermals ein Reſt bleibt oder nicht. Iſt das *erſte*, ſo iſt die gegebene Zahl eine *unvollkommene Quadratzahl* und die *Wurzel irrational*; iſt aber das *letzte*, ſo iſt ſie *vollkommen* und die gefundene Wurzel *rational*.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & & a+b \\
a^2+2ab+b^2 = 1 & 44 & 1 \quad 2 \\
a^2 = 1 & & \\
\hline
2ab+b^2 = & 44 & \\
2a \quad & (2) & \\
2ab+b^2 = & 44 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Auf

Auf eine ähnliche Art verfährt man mit der folgenden Zahl. Es ſei 2025 gegeben; wie groß iſt die Quadratwurzel dieſer Zahl? 45.

$$\begin{array}{rrl} & & a+b \\ a^2+2ab+b^2 = 20 & 25 & |\,4\ \ 5 \\ a^2 = 16 & & \\ \hline 2ab+b^2 = 4 & 25 & \\ 2a & (8)5 & \\ 2ab+b^2 = 4 & 25 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

§. 121.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 5, 6 oder mehrern Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel wie in §. 120. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die bis dahin gefundene Wurzel doppelt oder 2mal genommen iſt, wobei nun die ſchon gefundenen beiden Theile der Wurzel $a+b$ für eine, alſo für a genommen werden; ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſor folgen, wie bei der Diviſion, unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man wie in §. 120.

für

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

$$
\begin{array}{rrrl}
 & & & a+b \\
\text{Es ſei die Zahl } 45 & |\,42 & |\,76 & |\;67\;4 \\
a^2 = 36 & |\;.. & & \;\;a+b \\
\hline
2ab+b^2 = 9 & 42 & .. & \\
(12)7 & & .. & \\
2ab+b^2 = 889 & & .. & \\
\hline
2ab+b^2 = 53 & 76 & & \\
(13 & 4)4 & & \\
2ab+b^2 = 53 & 76 & & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

Hierbei verfährt man wörtlich ſo: die Wurzel von 45 iſt $6 = a$; $6.6 = 36 = a^2$. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor $6.2 = 12 = 2a$ und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $7 = b$; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt $127.7 = 889 = 2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt $= a$, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl $134 = 2a$ unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals $= b$ wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun $1.1 = 1$; $2.2 = 4$; $3.3 = 9$ iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von $100 = 10000$; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
67|89|76 | 824 R.
64|
―――――
 389 . .
(16)2 . .
 324 . .
―――――――――
  6576
 (164)4
  6576
―――――――――
    0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
 20 Rthlr. 4 gr.
 24
――――――
 4|84 | 22 Perſonen.
 4|
――――――
  84
 (4)2
  84
――――――
   0
```

§. 120.

Etwas abgekürzt, wenn man die doch unnöthigen Nullen wegläßt, iſt das Verfahren folgendes: Man ſucht nämlich, ohne auf die niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl zu merken, die Wurzel aus der höchſten Klaſſe; dieſe iſt hier 1, und macht davon das Quadrat, hier iſt auch dieſes 1. Nachdem man dieſe Quadratzahl des erſten Theils der Wurzel unter die höchſte Klaſſe, d. i. hier unter 1 geſetzt, ſubtrahirt und keinen Reſt gefunden hat; ſo rückt man die niedrigſte oder überhaupt die folgende Klaſſe der gegebenen Zahl herunter, nimmt den gefundenen erſten Theil der Wurzel doppelt als Diviſor, ſetzt die für dieſen Diviſor gefundene Zahl unter das höchſte Zahlzeichen dieſer Klaſſe und dividirt. Den durch dieſe Diviſion gefundenen zweiten Theil der Wurzel ſetzt man rechter Hand an den Diviſor, d. i. unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergenommenen Klaſſe und multiplicirt dieſen Theil ſo wie den Diviſor mit dem Quotienten, oder dem zweiten Theile der Wurzel. Subtrahirt man dieſes ſo gefundene Produkt von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte, ſo zeigt ſichs, ob abermals ein Reſt bleibt oder nicht. Iſt das *erſte*, ſo iſt die gegebene Zahl eine *unvollkommene Quadratzahl* und die Wurzel *irrational*; iſt aber das *letzte*, ſo iſt ſie *vollkommen* und die gefundene Wurzel *rational*.

$$
\begin{array}{rcl|l}
 & & & a + b \\
a^2 + 2ab + b^2 & = & 1 \mid 44 & 1 \quad 2 \\
a^2 & = & 1 & \\
\hline
2ab + b^2 & = & 44 & \\
2a & & (2) & \\
2ab + b^2 & = & 44 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

Auf

Auf eine ähnliche Art verfährt man mit der folgenden Zahl. Es ſei 2025 gegeben; wie groß iſt die Quadratwurzel dieſer Zahl? 45.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & & & a+b \\
a^2+2ab+b^2 = & 20 & 25 & 4\ 5 \\
a^2 = & 16 & & \\
\hline
2ab+b^2 = & 4 & 25 & \\
2a & & (8)5 & \\
2ab+b^2 = & 4 & 25 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

§. 121.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 5, 6 oder mehrern Zahlzeichen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel wie in §. 120. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die bis dahin gefundene Wurzel doppelt oder 2mal genommen iſt, wobei nun die ſchon gefundenen beiden Theile der Wurzel $a+b$ für eine, alſo für a genommen werden; ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſor folgen, wie bei der Diviſion, unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man wie in §. 120. für

für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach N. 1. für den **erſten** Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 120. bekannt.

```
                                      a + b
Es ſei die Zahl 45 | 42 | 76 |  67 4
           a² = 36 | ..            a + b
   2ab + b² = 9 42   ..
              (12)7  ..
   2ab + b² = 889    ..
   ---------------
   2ab + b² =  53  76
             (13   4)4
   2ab + b² =  53  76
               -------
                  0
```

Hierbei verfährt man **wörtlich** ſo: die Wurzel von 45 iſt $6 = a$; $6.6 = 36 = a^2$. Wird nun 36 unter 45 geſetzt und ſubtrahirt, ſo bleibt 9 Reſt. Zu dieſem Reſt rückt man die folgende Klaſſe 42, und es iſt in 942 noch enthalten $2ab + b^2$ (§. 117.) Macht man den Diviſor $6.2 = 12 = 2a$ und dividirt in 94, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $7 = b$; 7 ſetzt man rechter Hand des Diviſors und multiplicirt $127.7 = 889 = 2ab + b^2$. Da nun 889 von 942 den Reſt 53 läßt, ſo rückt man dazu die dritte oder niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl, nämlich 76, nimmt die beiden Theile der Wurzel, zuſammen 67, jetzt $= a$, doppelt, und ſetzt dieſe Zahl $134 = 2a$ unter 7 der hinzugekommenen Klaſſe und den Reſt 53, und dividirt. Der ſo gefundene Wurzeltheil 4 abermals $= b$ wird neben den Diviſor geſetzt, beides durch dieſen Wurzeltheil multiplicirt, und das erhaltene Produkt von 5376 ſubtrahirt. Da nun 5376 — 5376 keinen Reſt giebt, ſo iſt 454276 eine vollkommene Quadratzahl und 674 die rationale Wurzel.

§. 122.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſen erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 121. lehret.

§. 123.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Quadratzahlen, wenn man die Wurzeln ausziehn will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als zwei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes bedenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9, giebt die Quadratzahl nicht mehr als zwei Zahlzeichen, von 1 nur 1, von 9 aber 81; da nun 1 . 1 = 1; 2 . 2 = 4; 3 . 3 = 9 iſt, ſo folgt, die höchſte Klaſſe kann auch ein Zahlzeichen haben, weil ihre Wurzel unter dieſen 1, 2 oder 3 enthalten ſeyn kann, deren Quadratzahl auch nur ein Zahlzeichen erhält. Aus dieſer Betrachtung folgt die allgemeine Regel: Jede Quadratzahl beſteht aus doppelt ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, in manchen Fällen aber weniger Eins, aber auch in keinem Falle aus mehr, als aus doppelt ſo viel Zahlzeichen. Demnach iſt $10^2 = 100$, alſo doppelt ſo viel, als die Wurzel weniger Eins; $99^2 = 9801$, folglich genau aus doppelt ſo vielen als die Wurzel. Nun iſt 10 die kleinſte Zahl unter denen, die aus zwei Zahlzeichen beſtehen und die Quadratzahl iſt 100; demnach kann die Quadratzahl von 9 nicht drei, ſondern nur zwei Zahlzeichen haben (§. 115.). Eben ſo iſt 99 die größte unter denen, die zwei Zahlzeichen haben und die Quadratzahl iſt 9801. Nun iſt die Quadratzahl von 100 = 10000; demnach kann die Quadratzahl von 99 nicht fünf Zahlzeichen haben; folglich nur viere.

Dies ſtimmt nun wieder vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles paßt demnach auch auf genannte Zahlen. Denn wenn die gegebene Zahl in Quadratruthen, Quadratfußen, Quadratzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Quadratruthe = 100 F^q; 1 F^q = 100 Z^q ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur zwei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Quadratfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen. Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^2 iſt immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $2ab + b^2$. Dieſe zwei Stücke zeigen zugleich an, daß jeder unter das ihm zugehörige Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken zur Rechten) $2ab$, und unter das zweite oder letzte b^2.

§. 124.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Quadratzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle behandelt man die gegebenen Zahlen, wie die ungenannten, und giebt der Wurzel im Längenmaße den Namen, welchen die Quadratzahl im Quadratmaße hat.

Beiſpiel.

Es ſoll in einer Heide ein Thiergarten in der Form eines Quadrats angelegt werden, deſſen Fläche 678976 Quadratruthen beträgt; wie lang muß die Seite des Quadrats werden? 824 Längenruthen.

```
67|89|76 | 824 R.
64|
———
 389 ..
(16)2 ..
 324 ..
———
  6576
 (164)4
  6576
———
    0
```

Ferner: auf ein Revier ſind 9216 Rothbüchen auf eine Fläche, wo ſich kein Anflug zeigte, ins Quadrat (ins Gevierte) geſetzt worden; wieviel ſtehen in einer Reihe? 96 Stück.

Auch folgende Aufgabe läßt ſich zum Theil durch Hülfe des Quadratwurzelausziehens auflöſen.

Bei einer Frühlingsförſterei haben ſämmtliche Forſtbedienten ſich im Gaſthofe bewirthen laſſen, und zuſammen 20 Rthlr. 4 gr. bezahlt, und zwar jeder ſo viel Groſchen, als die Anzahl der Perſonen betrug; wie ſtark war die Anzahl der Forſtbedienten? 22 Perſonen.

Die Auflöſung iſt dieſe: Man verwandele die 20 Thaler in Groſchen, addire die 4 gr. dazu, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, ſo zeigt dieſe die Anzahl der Perſonen.

```
20 Rthlr. 4 gr.
24
———
4|84 | 22 Perſonen.
4|
———
 84
(4)2
 84
———
 0
```

2) Quadratzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $12R^q\ 81F^q\ 64Z^q$ der Inhalt eines Quadrats; wie groß iſt die Seite deſſelben im Längenmaße? Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſo ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
12° | 81′ | 64″ | 3° 5′ 8″ Längenmaß
 9  |     | ..
---------
 3   81   ..
    (6)5  ..
 3   25   ..
-----------------
     56   64
       (70)8
     56   64
-----------------
           0
```

§. 125.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 100, 10000 ꝛc. iſt oder überhaupt aus 1 mit einer durch 2 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Quadratwurzel zu finden.

Auflöſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt $10 . 10 = 100$; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt $100 . 100 = 10000$, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, d. i. 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl 1,00,00,00,00 ſo iſt 10000 die Wurzel.

Anmer-

Anmerkung.

Wenn man in der Ausübung nicht Fehler machen will, ſo muß man die Einſchränkung nicht vergeſſen, daß die Anzahl Nullen, die mit der Eins verbunden ſind, alſo rechter Hand ſtehen, durch die Zahl 2 theilbar ſeyn muß. Denn von der Zahl 10000000 iſt die Wurzel 3162 und es bleibt überdies noch ein Reſt, woraus man ſieht, daß 10000000 eine unvollkommene Quadratzahl iſt.

§. 126.

Kommt bei der Ausziehung der Quadratwurzel irgendwo der Fall vor, daß der Diviſor größer iſt als das Dividendum, d. i. größer als der gebliebene Reſt mit dem höchſten Zahlzeichen der zum Reſte gerückten Klaſſe aus der gegebenen Quadratzahl, ſo iſt der Quotient, d. i. der neue Wurzeltheil, Null. In dieſem Falle bleibt alles wie bei der gemeinen Diviſion ungeändert; der Reſt und die dazu gekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Quadratzahl dazugerückt, der Diviſor abermals gemacht, der nun um zehnmal größer wird, d. i. eine Null rechter Hand mehr erhält als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kommt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch in dieſem zuſammengeſetzten Falle verfährt man, wie bei jenem einfachen, z. B. Es ſei die gegebene Zahl 1226680576; wie groß iſt die Quadratwurzel? 35024.

```
12 | 26|68|05|76 | 35024
 9 | . . . . . . . .
   326 . . . . . .
   (65 . . . . . .
   325 . . . . . .
      168 . . . .
     (70)   . . . .
      16805 . .
      (700) 2 . .
      14004 . .
        280176
       (7004) 4
        280176
           0
```

Iſt aber z. B. die gegebene Zahl 4016016; ſo iſt die Quadratwurzel 2004.

```
4 | 01|60|16 | 2004
4 | . .  . .  . .
   . 01 . . . . .
    (4)   . . . .
        160 . .
       (40)  . .
        16016
       (400) 4
        16016
           0
```

§. 127.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo der Fall nur vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die bis dahin gefundene

fundene Wurzel doppelt genommen und eins, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $2a + 1$. Denn die Quadratzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Quadratzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 4, ſo iſt die Quadratzahl 16. Iſt die Wurzel aber 5, ſo iſt die Quadratzahl 25; nun iſt $25 - 16 = 9$; 9 aber iſt gleich $(2.4) + 1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Wurzeltheile erhalten hat. Iſt jeder richtig, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als die doppelte Wurzel um Eins vermehrt, oder noch größer; iſt er aber zu groß, ſo wird das doppelte Produkt der beiden Theile in einander nebſt der Quadratzahl des zweiten Theils größer ſeyn, als das darüber ſtehende Dividendum.

```
Z. B.        2 | 85 | 46 | 168
             1 | .  .  .  .
        ------------
        Reſt 1 | 8 5 . .
               (2)6 . .
               1 5 6 . .
         -------------
         Reſt 29 | 4 6
                 (32) 8
               2 6 2 4
          ---------------
          Reſt 3 2 2
```

Der Reſt 1 iſt kleiner $(1.2) + 1$, oder $1 < 3$; der Reſt 29 iſt ebenfalls kleiner, als $(16.2) + 1$, d. i. $29 < 33$; der Reſt 322 iſt ebenfalls kleiner als $(168.2) + 1$, d. i. $322 < 337$.

§. 128.

Will man ſich überzeugen, ob man richtig gerechnet, oder Rechnungsfehler begangen habe, ſo macht man die

Probe, die darin beſteht, daß man die gefundene Wurzel quadrirt, d.i. die Quadratzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die ſo gefundene Zahl der gegebenen Quadratzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man durchs Nachrechnen aufſuchen muß. So iſt §. 127 die gefundene Wurzel 168.

```
     168
     168
    ----
    1344
   1008
   168
  ------
   28224
     322 der gebliebene Reſt
  ------
   28546 die gegebene Quadratzahl.
```

§. 129.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Bruche die Quadratwurzel zu finden.

Aufloſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Quadratzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſo wohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 119. 125.). Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Quadratzahl,

zahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Quadratzahlen, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner deſſelben mit dem Nenner, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 7}}{\sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

Wird nun die Quadratwurzel aus 35 gezogen; ſo iſt dieſe der Zähler und 7 der Nenner der geſuchten Quadratwurzel von $\frac{5}{7}$.

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken halb ſo viel Decimalſtellen, als die Quadratzahl hat; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So iſt z. B. $\sqrt{0{,}454276} = 0{,}674$; denn es iſt $\sqrt{0{,}454276} = \sqrt{\frac{454276}{1000000}} = \frac{\sqrt{454276}}{\sqrt{1000000}} = \frac{674}{1000} = 0{,}674$ (§. 125.). Ferner $\sqrt{0{,}0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber **ungerade** iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine Null zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun dieſe zugeſetzte Null den Werth des Bruchs nicht ändert, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in nr. a.

Z. B. $\sqrt{0,828} = \sqrt{0,8280}$

```
0,|82|80 | 0,90 Wurzel.
  |81|
 ----
   180
  (18)
```

§. 130.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner **unvollkommene** Quadratzahlen ſind, **verwandelt man am ſchicklichſten in Decimalbrüche**, und ſucht aus dieſen die Wurzel nach nr. a und b §. 129.

So iſt $\frac{1}{3}$ = 0,333333 . . . §. 111.

```
0,|33|33|33 | 0,577 . . Wurzel.
  |25|
  ----
   833 . .
  (10)7 . .
   749 . .
  -------
    8433
   (114)7
    8029
  -------
Reſt 404
```

Hierbei iſt zu merken, daß man, wenn der gemeine Bruch **nicht genau** oder **vollkommen** in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, ſo viele Decimalſtellen ſuchen muß, als es die Genauigkeit der verlangten Wurzel erfordert. Da die Wurzel allemal Längen anzeigt, ſo kommt alles darauf an welchen Namen o **Ganze** haben; das übrige läßt ſich hiernach leicht beſtimmen.

§. 131.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden; ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 128. n. 3.

Wäre z. B. $3\frac{1}{8}$ gegeben, ſo iſt $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$; $\frac{25}{8}$ aber ſind = 3,125 = 3,1250. Nun iſt die Wurzel aus 3,1250 = 1,76 . .

```
3,|12|50 | 1,76 . .
1 |  |
------
2 12 . .
 (2)7 . .
1 89 . .
---------
   2350
  (34)6
   2076
   -----
Reſt 274
```

Eben ſo, wenn 3,4 gegeben iſt. Nun iſt 3,4 = 3,40; alſo iſt die Wurzel = 1,8 . .

```
3,|40 | 1,8
1 |
----
2 40
 (2)8
2 24
  ----
Reſt 16
```

Oder: 4,25. Die Wurzel iſt 2,0..

```
 4,|25 | 2,0..
 4 |
 --
    25
   (4)
   ---
Reſt 25
```

§. 132.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Quadratzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann man dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dies Verfahren iſt die gegebene Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 129—131. iſt bemerkt worden.

Es ſei z. B. die Zahl 2 gegeben.

```
 2 | 1,4142 . . .
 1
 ---
 100
 (2)4
  96
  ---
  400
  (28)1
  -----
   11900
   (282)4
   11296
   -----
    60400
    (2828)2
    56564
    -----
Reſt  3836
```

Da hier, nachdem aus der ganzen Zahl 2 die Wurzel 1 gefunden iſt, ein Reſt = 1 bleibt, dieſem Reſte, ſo wie jedem andern aber eine Klaſſe Nullen zugeſetzt wird, und unter die niedrigſte Null jedesmal das niedrigſte Zahlzeichen vom Quadrate des folgenden Theils der Wurzel geſetzt, und dieſes in keinem Falle 0 wird, weil von den Wurzeln von 1 bis 9 keine Quadratzahl ſich auf 0 endigt; ſo folgt, daß die Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortgeſetzt werden kann, ohne daß man die Wurzel ſelbſt vollkommen erhält, wofern man nicht den zuletzt gebliebenen Reſt als einen gebrochenen Bruch beifügt, welches aber von keinem Nutzen iſt. Demnach müſſen auch hier die Umſtände entſcheiden, wenn man die Wurzelausziehung endigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich aber ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Decimal-

cimalbruch verwandeln, ſo muß man durch Annäherung nach §. 111. ſo viele Decimalſtellen ſuchen, als man nöthig zu haben glaubt. Bleibt nach allen dieſen Unternehmungen beim Wurzelausziehen dennoch ein Reſt, ſo giebt man dieſem ebenfalls eine Klaſſe Nullen, und verfährt wie n. 1. bei den ganzen Zahlen.

Wäre z. B. die gegebene Zahl 0,4253, ſo iſt die Wurzel = 0,65215 ...

```
0,|42|53 | 0,65215 ...
  |36|
  ----
   653
  (12)5
   625
  -----
    2800
   (130)2
    2604
   ------
    19600
   (1304)1
   -------
    655900
   (13042)5
    652125
   --------
     377500 ꝛc.
```

Oder

Oder 124,015, ſo iſt die Wurzel = 11,136 . . .

```
1|24|01|50 | 11,136 . . .
1|
----
 24 . . . .
 (2)1 . . . .
 ----
   301 . .
  (22)1 . .
  ----
    8050
   (222)3
    6669
    ----
    138100
   (2226)6
    133596
    ------
      450400 -
```

§. 133.

Aus dieſer Annäherungsmethode die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ſuchen, ſieht man deutlich, wie man ſich verhalten muß, wenn die gegebenen Zahlen genannt ſind, unter verſchiedenen Namen vorkommen und vollkommene Quadratzahlen ſind.

Wäre demnach die Zahl gegeben: 458 Quadratruthen, 4 Quadratzolle und 2 Quadratlinien, ſo ſieht man dieſe Zahl als einen Decimalbruch unter dem Namen Quadratruthen an, ergänzt die fehlenden Decimalſtellen durch Nullen, und ſucht die Quadratwurzel wie aus Decimalbrüchen durch Annäherung, wenn die gegebene Zahl eine unvollkommene Quadratzahl iſt, welche man aber in jedem Falle daran erkennt, wenn ein Reſt bleibt. 458 Rq 4 Zq 2 Lq = $458^{\circ}\ 00'\ 04''\ 02'''$ Quadratmaß, und in einem Decimalbruche ausgedrückt 458,000402 Quadratruthen.

```
                 4|58,|00|04|02 | 21,4009
                 4|
                   58......
                  (4)1......
                   1700.....
                    (42)4....
                    1696....
                       404..
                      (428)..
                       40402
                      (4280)
Anfang der Annäherung  4040200
                        (42800)9
                        3852081
                  Reſt   188119
```

Demnach iſt die Wurzel 21 R 4 F 0 Z 0 L 9 S oder 21 Ruthen, 4 Fuß, 9 Skrupel Längenmaß. Wären die gefundenen 9 Skrupel ein zu kleiner Theil der geſuchten Länge, ſo hätte man die Annäherung nicht nöthig gehabt. Verlangt man aber noch kleinere Theile, ſo ſetzt man die Annäherung fort.

§. 134.

Hat man Tafeln oder Tabellen, welche die vollkommenen Quadratzahlen, von den Wurzeln 1 bis 1000, oder von 1 bis 10000 enthalten, ſo kann man durch Hülfe der erſtern aus den drei, durch Hülfe der letztern aber aus den vier höchſten Klaſſen einer gegebenen Quadratzahl die dazu gehörigen Wurzeln nehmen, die eben ſo großen oder beinahe ſo großen Quadratzahlen von der gegebenen ſubtrahiren, und die noch fehlenden Theile der Wurzel nach der gewöhnlichen Art oder durch Annäherung ſuchen.

Anmer-

Anmerkung.

Der Gebrauch ſolcher Tafeln verkürzt das Rechnen, und führt auf Zeiterſparung. Man findet ſie entweder mit andern mathematiſchen und trigonometriſchen Tafeln verbunden, oder in Lehrbüchern der Mathematik beſonders abgedruckt.

Man ſehe F. Meinerts Lehrbuch der Mathematik, Theil I. Arithmetik, wo Tafeln und Gebrauch zugleich vorkommen.

Beſonders berechnet findet man die Quadratzahlen von den Wurzeln von 1 bis 12000, in Joh. Paul Buchners Tabula Radicum Quadratorum et Cuborum. Nürnberg 1701.

II.

Die Ausziehung der Kubikwurzeln.

§. 135.

Aufgabe.

Aus einer ganzen Zahl, die aus 4 bis 6 Zahlzeichen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke zu, in Klaſſen, und gebe jeder Klaſſe drei Zahlzeichen. Die höchſte oder die erſte Klaſſe zur Linken kann auch Ein oder zwei Zahlzeichen enthalten. So viel nun die gegebene Zahl Klaſſen hat, ſo viel einzelne Zahlzeichen enthält auch die dazu gehörige Wurzel. Auch hier heiße (wie §. 119.) die Wurzel der höchſten Klaſſe a, die der niedrigſten aber b, ſo iſt a + b die ganze Wurzel.

Es ſey die Zahl 1728.

1|728 |

2) Nun

2) Nun ſuche man in der Tabelle (§. 116.) die Wurzel von 1, oder, wenn man die niedrigſte Klaſſe unterdeſſen als mit Nullen angefüllt betrachtet, ſtatt aus 1, hier aus 1000. Dieſe iſt 10 oder 1 aus 1. Die Wurzel ſetze man in die Stelle des Quotienten wie bei der Diviſion, die ihr zugehörige Kubikzahl aber $a^3 = 1000$ unter die gegebene Kubikzahl, und ſubtrahire

1|728 | 10 = a
$a^3 =$ 1|000
―――――
728

3) Im Reſte iſt noch das dreifache Produkt der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten, oder $3a^2b$, das dreifache Produkt des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils oder $3ab^2$, und die Kubikzahl des zweiten Theils oder b^3 enthalten; um daraus den zweiten Theil der Wurzel durch Diviſion zu finden, mache man den Diviſor, welches hier in jedem Falle die dreifache Quadratzahl der ſchon gefundenen Wurzel oder $3a^2$ iſt. Da nun $a = 10$ in dem gegenwärtigen Falle, ſo iſt $a^2 = 100$, und $3a^2 = 300$. Dieſe Zahl ſetze man unter die gebliebene niedrigſte Klaſſe der gegebenen Zahl in eine Parentheſe und dividire, ſo erhält man den zweiten Theil der Wurzel, hier 2 oder allgemein b.

1|728 | 10 = a
$a^3 =$ 1|000 | 2 = b
―――――
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 728$
(300)

4) Mit dieſem gefundenen zweiten Theile der Wurzel multiplicire man den Diviſor, ſo hat man das dreifache Produkt der Quadratzahl des erſten Theils in den zweiten Theil der Wurzel $3a^2 = 600$, und ſetze es unter den Diviſor.

1|728

$$\begin{array}{rr|l} & 1|728 & 10 = a \\ a^3 = & 1|000 & 2 = b \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & \\ & (300) & \\ 3a^2b = & 600 & \end{array}$$

5) Nun mache man das dreifache Produkt des erſten Theils in die Quadratzahl des zweiten Theils der Wurzel, hier $3ab^2 = 120$, weil $a = 10$, alſo $3a = 30$; $b = 2$, alſo $b^2 = 4$; folglich $3ab^2 = 30 . 4 = 120$. Dieſe Zahl ſetze man unter die vorige in n. 4 gefundene.

6) Noch fehlt die Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel oder $b^3 = 2 . 2 . 2 = 8$. Dieſe Kubikzahl ſetze man unter die Einer des in n. 5. gefundenen Produkts, addire die in n. 4, 5 und 6. gefundenen Stücke, und ſubtrahire ſie von dem in n. 2. gebliebenen Reſte.

Addirt man endlich die nach einander gefundenen beiden Theile der Wurzel, ſo hat man die Aufgabe aufgelöſt.

$$\begin{array}{rr|l} a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3 = & 1|728 & 10 = a \\ a^3 = & 1|000 & 2 = b \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & 12 = a+b \\ (3a^2) = & (300) & \\ 3a^2b = & 600 & \\ 3ab^2 = & 120 & \\ b^3 = & 8 & \\ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 728 & \\ & 0 & \end{array}$$

§. 136.

Das Verfahren, die Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ziehen, läßt ſich wenig abkürzen; höchſtens

kann man die im Beiſpiele in §. 135. vorkommenden Nullen wegen der Wurzel 10 anſtatt 1 weglaſſen, wobei man alsdenn auf folgende Art verfährt:

Man ſucht die Wurzel = a aus der höchſten Klaſſe ſo, als wenn die nachſolgende Klaſſe nicht da wäre, und da hat man 1 anſtatt 10; folglich iſt auch $a^3 = 1$. Iſt auf dieſe Art der erſte Theil der Wurzel gefunden, ſo rückt man die folgende Klaſſe aus der Kubikzahl zum etwa gebliebenen Reſte, oder wenn keiner vorhanden, auch ganz allein herunter, und macht den Diviſor $3a^2$. Da nun $a = 1$, ſo iſt $a^2 = 1$, folglich $3a^2 = 3 . 1 = 3$. Dieſen Diviſor ſetzt man unter das erſte oder höchſte Zahlzeichen der herunter gerückten Klaſſe in eine Parentheſe und dividirt. Hat der Diviſor mehr als Ein Zahlzeichen, ſo ſetzt man die dem niedrigſten vorangehenden unter den gebliebenen Reſt, und wenn keiner vorhanden, linker Hand unter die heruntergerückte Klaſſe. Den durch die Diviſion erhaltenen zweiten Theil der Wurzel = b, ſetzt man rechter Hand an den erſten, wohin man den Quotienten bei der gemeinen Diviſion zu ſetzen pflegt. Das Produkt des zweiten Theils der Wurzel mit dem Diviſor, ſetzt man ſo unter den Diviſor, daß die niedrigſten Zahlzeichen beider Zahlen untereinander kommen; hier $3 . 2 = 6$, oder $3a^2b$. Das folgende Produkt $3ab^2$ macht man ſo, daß $a = 1$, 3 mal genommen, alſo $3a = 3$ wird. Da nun $b = 2$, ſo iſt $b^2 = 4$, und $3ab^2 = 3 . 4 = 12$. Dieſer Zahl niedrigſtes Zahlzeichen wird unter das mittelſte der herunter gerückten Klaſſe geſetzt, und die übrigen folgen gegen die Linke zu. Die Kubikzahl von b, alſo $b^3 = 2.2.2 = 8$, ſetzt man unter das niedrigſte Zahlzeichen der heruntergerückten Klaſſe. Hat dieſe Kubikzahl mehrere Zahlzeichen, ſo folgen die übrigen linker Hand. Die Stücke $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 hier 6, 12 und 8 werden ſo, wie ſie unter einander ſtehen, addirt, und von der heruntergerückten Klaſſe und dem etwa gebliebenen Reſte ſubtrahirt. Bleibt kein Reſt, ſo iſt die gegebene Kubikzahl

eine

eine vollkommene, und die theilweiſe gefundene Wurzel rational; bleibt aber ein Reſt, ſo iſt die gegebene Zahl eine unvollkommene Kubikzahl, und die Wurzel eine irrationale Zahl.

$$\begin{array}{rcl}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 1|728 \;|\; 12 = a+b \\
a^3 & = & 1| \\ \hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 728 \\
3a^2 & = & (3).. \\
3a^2b & = & 6\;.. \\
3ab^2 & = & 12\;. \\
b^3 & = & 8 \\ \hline
3a^2b+3ab^2+b^3 & = & 728 \\ \hline
 & & 0
\end{array}$$

Auf eben dieſe Art wird auch das folgende Beiſpiel behandelt. Es ſey die gegebene Zahl 46785; wie groß iſt die Kubikwurzel?

$$\begin{array}{rcl}
 & & \qquad\qquad a+b \\
 & & 46|785 \;|\; 3\;\;6 \\
a^3 & = & 27| \\
 & & 19785 \\
3a^2 & = & (27).. \\
3a^2b & = & 162\;.. \\
3ab^2 & = & 324\;. \\
b^3 & = & 216 \\ \hline
 & & 19656 \\ \hline
\text{Reſt} & & 129
\end{array}$$

§. 137.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Zahl, die aus 7 bis 9 oder noch mehrern Zahlzeichen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel, wie in §. 136. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die dreifache Quadratzahl der bis dahin gefundenen Wurzel oder $3a^2$ iſt, wobei beide gefundene Theile der Wurzel $a+b$ zuſammen für einen, alſo abermals für a genommen werden, ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen, unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſors folgen, wie bei der Diviſion unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man, wie in §. 135. für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach nr. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 135. bekannt.

Es ſei die Zahl 432|081|216| 7 5 6 (über 7 5: $a+b$; unter 75 zuſammen: a, mit 6: $a+b$)

$a^3 =$ 343
―――――
89081 . . .
$(3a^2) =$ (147) . . . . .
$3a^2b =$ 735 . . . . .
$3ab^2 =$ 525 . . . .
$b^3 =$ 125 . . .
―――――
78875 . . .
―――――
10206216
$(3a^2) =$ (16875) . .
$3a^2b =$ 101250 . .
$3ab^2 =$ 8100 .
$b^3 =$ 216
―――――
10206216
―――――
0

Das

Das Verfahren läßt ſich wörtlich ſo ausdrücken: Die Wurzel von 432 iſt 7 = a; 7 . 7 . 7 = 343 = a^3. Wird nun 343 von 432 ſubtrahirt, ſo bleibt 89 Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die folgende Klaſſe 081, und es iſt in 89081 noch enthalten $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 117) Macht man den Diviſor $3a^2$, oder (7.7).3 = 49 . 3 = 147 und dividirt in 890, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel 5 = b. Mit 5 multiplicirt man den Diviſor 147, und man hat im Produkte 735, $3a^2b$, welches gerade unter den Diviſor geſchrieben wird. Macht man nun $3ab^2$, oder (7.3).5 . 5 = 21 . 25 = 525, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen um eine Stelle weiter zur Rechten, und macht auch b^3 = 5 . 5 . 5 = 125, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen dieſer Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel abermals eine Stelle weiter zur Rechten, und addirt dieſe gefundenen drei Stücke ſo zuſammen, wie ſie unter einander ſtehen ſo hat man $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ = 73500 + 5250 + 125 = 78875; 78875 von 89081 ſubtrahirt, läßt 10206 zum Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die niedrigſte oder dritte Klaſſe der gegebenen Zahl, ſo hat man 10206216. In dieſer letzten Zahl ſteckt, wenn die beiden Wurzeltheile a und b zuſammen genommen, oder für einen geſetzt werden, ſo daß a + b nun wieder a, oder 70 + 5 nun 75 wird, abermals $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Um aufs neue den Wurzeltheil b zu finden, macht man den Diviſor $3a^2$. Da nun a = 75; a^2 = 5625; $3a^2$ = 16875 iſt, ſo ſetzt man dieſen Diviſor unter 10206216 ſo, daß das niedrigſte Zahlzeichen des Diviſors unter das erſte oder höchſte Zahlzeichen 2 der neu hinzugekommenen Klaſſe zu ſtehen kommt, und dividirt. Da der Quotient hier 6 iſt, ſo iſt dies Zahlzeichen b oder der zweite Theil der Wurzel; wird mit dieſem der Diviſor multiplicirt, ſo erhält man das Product $3a^2b$ = 101250, welches unter den Diviſor geſetzt wird. Das darauf folgende Produkt von $3ab^2$ = (75.3).(6.6) = 225.36 = 8100 wird ſo unter geſetzt, daß das niedrigſte

 Zahl-

Zahlzeichen unter das mittelſte der hinzugekommenen Klaſſen zu ſtehen kommt, und endlich $b^3 = 6.6.6 = 216$ ſetzt man abermals eine Stelle weiter zur Rechten, oder ſo, daß 6 unter 6 oder die niedrigſten Zahlzeichen untereinander kommen. Wird nun $3a^2b$, $3ab^2 + b^3$ addirt, ſo erhält man die Summe von 10206216; dieſe von der obigen Zahl 10206216 ſubtrahirt, läßt keinen Reſt, und die gegebene Kubikzahl iſt eine vollkommene, ſo wie die dazu gehörige und theilweiſe gefundene Wurzel 756 rational.

§. 138.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſe erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 137. lehret.

§. 139.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Kubikzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als Drei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur Ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes überdenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9 giebt die Kubikzahl nicht mehr als drei Zahlzeichen, d. i. von 1 nur 1, von 9 aber $9.9.9 = 729$. Da nun von der Wurzel 1 die Kubikzahl nur 1; von der Wurzel 2 die Kubikzahl 8; von der Wurzel 3 die Kubikzahl 27; und von der Wurzel 4 die Kubikzahl nur 64 iſt, alſo mehrere Wurzeln in der Kubikzahl nur eins oder zwei Zahlzeichen haben, ſo kann auch die höchſte Klaſſe in der Kubikzahl auch nur eins oder zwei Zahlzeichen enthalten, weil man doch einen dazu gehörigen Wurzeltheil von 1 bis 4 antrifft. Aus dieſem ergiebt ſich die allgemeine Regel: Jede Kubikzahl

bikzahl beſteht aus dreimal ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, weniger zwei; aber auch in keinem Falle aus mehr, als dreimal ſo viel Zahlzeichen. Eine Wurzel die zwei Zahlzeichen hat, muß nothwendig 10 oder 99 ſeyn, oder zwiſchen dieſen Zahlen enthalten ſeyn. Nun aber iſt $100 > 99$, alſo muß die Kubikzahl von 100 größer ſeyn, als von 99 (§. 115). Es iſt die Kubikzahl von 100 die Zahl 1000000, und dieſe Zahl iſt unter allen die kleinſte, die ſieben Zahlzeichen enthalten, alſo kann die Kubikzahl von 99 nur ſechs, d. i. 2. 3 oder dreimal ſo viel Zahlzeichen enthalten. Da ferner die Kubikzahl von 10, oder die kleinſte von allen Wurzeln die zwei Zahlzeichen haben, 1000 iſt, alſo vier Zahlzeichen hat, $(2.3) - 2 =$ viere; ſo folgt, daß dieſe Kubikzahl nur zwei Zahlzeichen weniger enthalten kann, als die Anzahl der Zahlzeichen der Wurzel dreimal genommen.

Dies ſtimmt auch hier vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles läßt ſich demnach auch auf genannte Zahlen anwenden. Denn wenn die gegebene Zahl in Kubikruthen, Kubikfußen, Kubikzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Kubikruthe $= 1000\, F^c$; der $F^c = 1000\, Z^c$ ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur drei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Kubikfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen.

Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^3 iſt auch hier immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dieſe drei Stücke zeigen denn an, daß jedes unter ein ihm zugehöriges Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken gegen die Rechte) $3a^2b$, unter das zweite oder mittelſte $3ab^2$, und unter das dritte oder letzte b^3.

§. 140.

Aufgabe.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Kubikzahlen von einerlei Namen.

In dieſem Falle wird die gegebene Zahl wie die ungenannten behandelt, und die Wurzel erhält den Namen der Kubikzahl, nur in Längenmaße.

Beiſpiel.

Es iſt ein Holzhaufe in der Geſtalt eines Würfels aufgeſetzt und ſein Inhalt beträgt 231475544 Kubikzoll; wie lang iſt jede Seite? 614 Längenzolle.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\quad a+b \\
 & 231|475|544|\underbrace{6 \quad 1}_{a+b} \quad 4 \\
a^3 = & 216 \\
\hline
 & 15\,475\ldots \\
 & (108)\ldots\ldots \\
3a^2b = & 108\ldots\ldots \\
3ab^2 = & 18\ldots\ldots \\
b^3 = & 1\ldots \\
\hline
 & 10981\ldots \\
\hline
 & 4494544 \\
 & (11163)\ldots \\
3a^2b = & 44652\ldots \\
3ab^2 = & 2928. \\
b^3 = & 64 \\
\hline
 & 4494544 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

2) Ku-

2) Kubikzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl 311 R^c 665 F^c 752 Z^c der Inhalt eines Würfels; wie groß iſt die Seite deſſelben? 6 R 7 F 8 Z oder 678 Längenzolle. Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
311 |665'|752"|6°7'8"
216 |       ...
-----
  95 665   ...
 (10 8)..  ...
  75 6..   ...
   8 82.   ...
     343   ...
-----------
  84 763
---------------
  10 902  752
  (1 346  7)..
  10 773  6..
     128  64..
          512
---------------
  10 902  752
---------------
           0
```

§. 141.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 1000, 1000000 ꝛc. iſt, oder überhaupt aus 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Aufloͤſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10.10.10 = 1000; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt es mit 100.100.100 = 1000000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, das iſt 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl

ſo iſt 1|000|000|000|000| 10000 die Wurzel.

Anmerkung.

Wenn man eine Zahl erhaͤlt, die aus 1 und einer Reihe Nullen beſteht, ſo muß man, wenn nicht Irrungen entſtehen ſollen, immer darauf ſehen, ob auch die Reihe Nullen durch 3 theilbar iſt; iſt dies nicht, ſo muß man die Wurzel auf die gewoͤhnliche Art ſuchen: So iſt z. B.

```
10|000|000 | 21 ...
 8|
----
 2 000
 (12)
```

§. 142.

Kommt auch bei der Ausziehung der Kubikwurzel irgend wo der Fall vor, daß der Diviſor groͤßer iſt als das Dividendum, d. i. groͤßer als der gebliebene Reſt mit dem hoͤchſten Zahlzeichen der zum Reſte geruͤckten Klaſſe aus der gegebenen Kubikzahl, ſo iſt auch hier der Quotient d. i. der neue Wurzeltheil Null. In dieſem Falle bleibt alles (wie bei der Ausziehung der Quadratwurzeln §. 126.) ungeaͤndert; der Reſt und die dazugekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Kubikzahl dazu geruͤckt, der Diviſor aber-

abermals gemacht, der nun um 100 mal größer wird, d. i. zwei Nullen rechter Hand mehr erhält, als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kömmt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch alsdenn verfährt man, wie vorhin gezeigt worden iſt.

Es ſei z. B. die gegebene Zahl 13824000642; wie groß iſt die Kubikwurzel? beinahe 2400.

```
13|824|000|642|2400
 8|
----
   5 824...
  (12).....
   48.....
     96....
      64...
----------
   5 824...
----------
        000 642
       (172800)
       --------
       Reſt 642
```

Iſt aber die gegebene Kubikzahl 9129329; ſo iſt die Wurzel 209.

```
9|129|329|209
8|
--
1 129 ...
(12)  ...
----------
1 129 329
 (1200)..
1 080 0..
    48 60.
       729
----------
1 129 329
----------
    0
```

§. 143.

§. 143.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo auch nur der Fall vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die um Eins vermehrte dreifache Summe der bis dahin gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $3(a+a^2)+1$; denn die Kubikzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Kubikzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 2, ſo iſt die Kubikzahl 8. Iſt aber die Wurzel 3, ſo iſt die Kubikzahl 27; nun iſt $27-8=19$; 19 aber iſt gleich $3(2+2^2)1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Würzeltheile erhalten hat. Iſt jeder der richtige, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als $3(a+a^2)+1$, oder größer; iſt er aber zu groß, ſo wird $3a^2b+3ab^2+b^3$ größer ſeyn, als das darüberſtehende Dividendum.

```
Z. B.      3|690 | 15
           1|
      Reſt 2|690
            (3)..
           15..
            75.
            125
         ------
          2 375
      Reſt  315
```

Der Reſt 2 iſt kleiner als $3.(1+1^2)+1$, oder $2 < 7$; der Reſt 315 iſt ebenfalls kleiner, als $3.(15+15^2)+1$, oder $315 < 721$.

§. 144.

Die Probe, ob man richtig gerechnet, oder vielleicht Rechnungsfehler gemacht habe, beſteht darin, daß man die gefundene Wurzel kubiret, d. i. die Kubikzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die gefundene Zahl der gegebenen Kubikzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man aufſuchen und verbeſſern muß. So iſt §. 143 die gefundene Wurzel 15.

```
    15
    15
   ---
    75
   15
   ---
   225
    15
  ----
  1125
  225
  ----
  3375
   315 der gebliebene Reſt.
  ----
  3690 die gegebene Kubikzahl.
```

§. 145.

Aufgabe.

Aus einem Bruche die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Kubikzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 135 — 141).

Die

Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$.

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Kubikzahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Kubikzahlen, ſo multiplicire man ſowohl den Zähler als auch den Nenner mit der Quadratzahl des Nenners, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$.

Wird nun die Kubikwurzel aus 18 gezogen, ſo iſt dieſe der Zähler und 3 der Nenner der geſuchten Kubikwurzel von $\frac{2}{3}$

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel.

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken den dritten Theil von der Anzahl der Decimalſtellen der Kubikzahl; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So

So iſt z. B. $\sqrt[3]{0,216}=0,6$, denn es iſt $\sqrt[3]{0,216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6.$

Ferner $\sqrt[3]{0,001728} = \sqrt[3]{\frac{1728}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{12}{100} = 0,12.$

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine oder zwei Nullen zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun rechter Hand zugeſetzte Nullen den Werth des Decimalbruchs nicht ändern, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in No. a.

Z. B. $\sqrt[3]{0,5021} = \sqrt[3]{0,502100}$.

```
0|502|100|0,79...
1|393|
------
  159 100
  (147)..
  1323 ..
   1701 .
      729
  -------
  150 039
  -------
Reſt 9 061
```

§. 146.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Kubikzahlen ſind, verwandelt man (wie bei den Quadratwurzeln §. 130) in Decimalbrüche und ſucht aus dieſen die Wurzel nach No. a und b §. 145.

So

So iſt $\frac{2}{3}$ = 0,666666... §. 111.

$$\begin{array}{l} \text{o)}\quad 666|666|0{,}87..\ \text{Wurzel} \\ \quad\ \ 512 \\ \hline \quad\ \ 154\,666 \\ \quad\ \ (192).. \\ \quad\ \ 1344.. \\ \quad\ \ \ 1176. \\ \quad\ \ \ \ \ 343 \\ \hline \quad\ \ 146\,503 \\ \hline \text{Reſt}\ \ 8\,163 \end{array}$$

Auch hier gilt das, was bei den Quadratwurzeln aus Decimalbrüchen (§. 130) iſt bemerkt worden, mit der gehörigen Ausdehnung der Begriffe auf Kubikzahlen und Kubikwurzeln, ſtatt Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 147.

Iſt die gegebene Zahl eine gemiſchte Zahl, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem ächten gemeinen, oder mit einem Decimalbruche verbunden, ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen Decimalbruch; und zieht in beiden Fällen die Wurzel aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 145. No. 3.

Wäre z. B. $18\frac{26}{27}$ gegeben, ſo iſt $18\frac{26}{27} = \frac{512}{27}$. Da nun 512 ſo wohl als 27 vollkommene Kubikzahlen ſind, ſo iſt $\sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{8}{3}$ oder welches einerlei iſt,

$\frac{8}{3}$

$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Iſt aber $8\frac{2}{3}$ gegeben, ſo iſt $8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}$; $\frac{26}{3}$ aber ſind = 8,666666..., und die Wurzel iſt 2,05...

```
8|666|666|2,05...
8|
 666...
(12) ...
 666 666
 (1200 0)..
 6000 0..
   15 00.
      125
 615 125
Reſt 51 541
```

Eben ſo, wenn 64, 421875 gegeben iſt, ſo iſt die Kubikwurzel 4, 75.. oder $\sqrt[3]{64,421875} = 4,75$.. Desgleichen, wenn 10, 3954 gegeben iſt, ſo iſt, da 10, 3954 = 10, 395400, die Kubikwurzel 2, 02... oder $\sqrt[3]{10,395400} = 2,02$...

§. 148.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Kubikzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann

man hier (wie bei den Quadratzahlen §. 132.) dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dieſes Verfahren iſt die ganze Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 132 — 142 iſt bemerkt worden.

Es ſei z. B. 3 gegeben.

```
       3 | 1,44...
       1 |
     ----
       2 000
        (3)
       1 2..
         48.
          64
     --------
Reſt   1 744
     ------------
         256000
          (588)
```

Auch hier kann das Ausziehen der Wurzel bis *ohne Ende* fortgeſetzt werden, ohne daß man die Wurzel als eine rationale Zahl erhält. Demnach iſt dieſes Verfahren eine *Annäherung an den wahren Werth*, und Umſtände müſſen entſcheiden, wenn man die Ausziehung beendigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein *Bruch*, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich nun ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Decimalbruch verwandeln, ſo muß man durch Annäherung §. 111. ſo viele Decimalſtellen ſuchen, als man nöthig zu haben glaubt. Bleibt nach allen dieſen Unternehmungen beim Wurzelausziehen dennoch ein Reſt, ſo giebt

giebt man dieſem ebenfalls eine Kloſſe Nullen, und verfährt wie in No. 1. bei ganzen Zahlen.

Wäre z. B. 0,44361824 gegeben, ſo iſt die Wurzel:

0, | 443 | 618 | 240 | 0,762...
   | 343 |

100618...
(147).....
882.....
756....
216...

95976...

4642240
(17328)..
34656..
219.
8

3467798

Reſt 574442

Oder 669,921875426, ſo iſt die Wurzel 8,7500.

```
669,|921|875|426|8,7500
512 |
----
157 921 ......
(19 2).......
134 4.......
 11 76.......
    343......
----------
146 503......
----------
 11 418 875 ...
 (2 270 7).....
 11 353 5.....
      65 25....
         125...
-------------
 11 418 875 ...
-------------
          426
  (229 6875)
----------------
          426000
  (22 9687500)
```

§. 149.

Aus dieſer Annäherungsmethode die Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ſuchen, kann man auch lernen, wie man ſich verhalten muß, wenn die gegebenen Zahlen genannt ſind, unter verſchiedenen Namen vorkommen, und unvollkommene Kubikzahlen ſind.

Wäre demnach die Zahl gegeben: 121 Kubikruthen als der Inhalt eines Würfels; wie groß würde eine Seite deſſelben ſeyn?

```
                         121° | 4°9′4″6‴
                          64  |
                         ----
Anfang der Annähe-       57 000
      rung               (4 8)..
                         43 2..
                          9 72.
                            729
                         --------
                         53 649
                         -----------
                           3 351000
                            (7203)..
                            28812..
                              2352.
                                 64
                         -------------
                           2 904784
                         ---------------
                             446216000
                             (732108)
```

Demnach iſt die Wurzel 4 R 9 F 4 Z 6 L oder 4 Ruthen, 9 Fuß, 4 Zoll, 6 Linien Längenmaß. Könnte man in der Ausübung keine Linien brauchen, ſo wird die Annäherung nur bis auf Zolle nöthig ſeyn, und dann wäre die Seite des Würfels beinahe 4 R 9 F 4 Z, aber doch immer um Etwas zu klein, welches auch noch bei den 6 Linien der Fall iſt. Verlangt man noch kleinere Theile als Linien, alſo Skrupel, ſo muß man die Rechnung noch weiter fortſetzen.

Soll man aus 9 Kubikruthen, 265 Kubikfußen und 400 Kubikzollen die Wurzel ziehen, ſo hat man 3 Klaſſen, nämlich:

9 | 265 | 400 |

Wäre aber die gegebene Kubikzahl 9 Ruthen 26 Kubikfuß und 4 Kubikzoll, ſo müßte man die fehlenden Stellen ergänzen, und die Kubikzahl zum Ausziehen der Wurzel eingerichtet würde ſo geſetzt: 9 Kubikruthen 026 Kubikfuß und 004 Kubikzoll; oder

9°|026'|004''|

und die Wurzel aus der höchſten Klaſſe würde nun auch Ruthen, aus der folgenden Fuß, und aus der niedrigſten Zoll heiſſen. Bliebe ein Reſt, ſo müßte man dieſem eine Klaſſe Nullen beifügen und die Wurzel durch Annäherung in Linien, Skrupeln ꝛc. ſuchen.

§. 150.

Zum Ausziehen der Kubikwurzeln kann man ſich ſchon berechneter Tafeln oder Tabellen bedienen, welche von den rationalen Wurzeln von 1 bis 1000, oder von 1 bis 10000 die vollkommenen Kubikzahlen enthalten. Der Gebrauch derſelben erſtreckt ſich eben ſo weit als der der Quadratwurzeltafeln. Man kann damit wenigſtens aus den höchſten zwei oder auch wohl aus den höchſten drei Klaſſen entweder die Wurzel genau, oder doch beinahe, finden. Hört der Gebrauch der Tafeln auf, ſo treten die gewöhnlichen Regeln ein, nach welchen man überhaupt Kubikwurzeln extrahirt.

Anmerkung.

Das in §. 134 in der Anmerkung angeführte Lehrbuch enthält auch Tafeln der Kubikzahlen von den Wurzeln von 1 bis 1000.

Beſonders berechnet, findet man die Kubikzahlen, von den Wurzeln von 1 bis 12000 in Joh. Paul Buchners Tabula Radicum quadratorum et cuborum. (§. 134. Anmerk.)

Sie-

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen.

§. 151.

Die Vergleichung zweier Größen oder Zahlen von einerlei Art, in Abſicht ihrer Größe, nennt man im allgemeinen ein **Verhältniß**. Die zwei Größen oder Zahlen, die man mit einander vergleicht, oder von welchen die eine ſich aus der Größe der andern herleiten läßt, heißen die **Glieder des Verhältniſſes**, und zwar dasjenige, womit man ein Verhältniß anfängt, oder welches **zuerſt** ſteht, das **Vorderglied**, das andere aber das **Hinterglied**.

§. 152.

Dieſe Vergleichung geſchieht nun entweder bei den Zahlen durch die **Subtraktion**, indem man unterſucht, **um wie viel** Einheiten die eine größer iſt, als die andere, oder durch die **Diviſion**, indem man ſieht, **wie vielmal** die eine Zahl oder Größe in der andern enthalten iſt. Ein Verhältniß von der erſtern Art heißt ein **arithmetiſches** und von der letztern Art ein **geometriſches Verhältniß**. Die durch die Vergleichung

gefundene Differenz und den Quotient nennt man beide den Verhältnißnamen.

Anmerkung.

Die arithmetiſchen Verhältniſſe kommen allein in der Arithmetik, die geometriſchen aber außer in der Geometrie, auch in allen mathematiſchen Wiſſenſchaften vor, die ſich auf Geometrie gründen.

I.

Arithmetiſche Verhältniſſe.

§. 155.

Arithmetiſche Verhältniſſe werden durch die Differenz beſtimmt und heißen zunehmende, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; im Gegentheile aber abnehmende. Das bei den arithmetiſchen Verhältniſſen eingeführte Zeichen, iſt das Zeichen der Subtraktion (—) und wird zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 — 7; 5 — 9 zunehmende, aber 7 — 4; 9 — 5 abnehmende Verhältniſſe.

Kurz lieſt man dieſe Verhältniſſe ſo: 4 zu 7; 5 zu 9; 7 zu 4; 9 zu 5, d. i. 4 iſt um 3 kleiner als 7; 5 um 4 kleiner als 9. 7 aber um 3 größer als 4; 9 um 4 größer als 5. 3 und 4 ſind die Differenzen.

Man ſieht hieraus, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt als die Summe des Vordergliedes und der Differenz des Verhältniſſes; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe iſt das Vorderglied ſo groß als die Summe des Hintergliedes, und die Differenz des Verhältniſſes.

Hier=

Hiernach kann man die arithmetiſchen Verhältniſſe auch allgemein ſo bezeichnen: Es ſei a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes und d die Differenz, ſo iſt a + d das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß a — (a + d). Iſt nun a + d das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt (a + d) — d = a, das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß (a + d) — a.

§. 154.

Alle arithmetiſchen Verhältniſſe, die einerlei, d. i. gleich große Differenzen haben, ſind einander gleich, und können alſo auch für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe 3 — 5, 7 — 9; 9 — 7, 6 — 4 einander gleich, weil ſie insgeſammt die Differenz 2 haben.

Demnach ſind arithmetiſche Verhältniſſe gleiche Verhältniſſe, wenn ſie gleiche Differenzen haben; umgekehrt, arithmetiſche gleiche Verhältniſſe haben gleich große Differenzen.

§. 155.

Zwei arithmetiſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich.

Iſt 8 — 11 wie 1 — 4, und
9 — 12 wie 1 — 4

8 — 11 wie 9 — 12

II.

Geometriſche Verhältniſſe.

§. 156.

Geometriſche Verhältniſſe werden durch den Quotient, der hier Exponent des Verhältniſſes heißt, beſtimmt und werden zunehmende genannt, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; findet aber

das Gegentheil Statt, ſo heißen ſie abnehmende Verhältniſſe. Das Zeichen der geometriſchen Verhältniſſe iſt das Zeichen der Diviſion (:) und wird (wie §. 153.) zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 : 12; 5 : 15 zunehmende, aber 12 : 4; 15 : 5 abnehmende Verhältniſſe. Der Sinn des Verhältniſſes wird ſo ausgedrückt: 4 zu 12; 5 zu 15; 12 zu 4; 15 zu 5. d. i. 4 iſt in 12 dreimal, 5 in 15 dreimal enthalten; eben ſo enthält 12 das Glied 4 dreimal, 15 das Glied 5 dreimal. 3 iſt hier der Exponent.

Aus dieſem ergiebt ſich, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt, als das Produkt des Vordergliedes in den Exponent; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe, iſt das Vorderglied ſo groß, als das Produkt des Hintergliedes in den Exponent.

Hiernach kann man die geometriſchen Verhältniſſe allgemein ſo bezeichnen. Es ſey a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes, und e der Exponent, ſo iſt ae das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß a : ae. Iſt nun ae das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt (ae : e) = a das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß ae : a.

§. 157.

Läßt ſich der Exponent eines Verhältniſſes, weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau ausdrücken, ſo iſt das Verhältniß ein Irrationalverhältniß und der Exponent ſelbſt eine Irrationalzahl. Ein ſolches Verhältniß entſteht allemal, wenn eins von beiden, oder beide Glieder Irrationalzahlen ſind.

Dergleichen Verhältniſſe ſind z. B. $\sqrt{2} : 8$; $\sqrt[3]{2} : 8$, denn $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ ſind Irrationalzahlen, weil jede unvollkom-

vollkommene Quadrat- und Kubikzahl, wie 2 eine irrationale Wurzel hat. Indeß kann man den Exponent eines ſolchen irrationalen Verhältniſſes dennoch ſo weit in Decimalſtellen finden, als es die Richtigkeit der Rechnung verlangt.

§. 158.

Alle geometriſchen Verhältniſſe ſind gleich, die gleichgroße oder einerlei Exponenten haben, und können für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe 4:12, 5:15, 9:3, 18:6 einander gleich, weil ſie ſämmtlich den Exponent 3 haben.

Demnach kann man von der Gleichheit der Exponenten auf die Gleichheit der Verhältniſſe; umgekehrt, aber auch von der Gleichheit der Verhältniſſe, auf die Gleichheit der Exponenten ſchließen.

§. 159.

Auch zwei geometriſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind unter ſich gleich.

Iſt 4 : 12 wie 1 : 3, und
5 : 15 wie 1 : 3
―――――――――――
4 : 12 wie 5 : 15

Hier iſt das dritte Verhältniß, nämlich 1 : 3 gewiſſermaßen das Maßverhältniß.

§. 160.

Wenn man die beiden Glieder eines geometriſchen Verhältniſſes, etwa a:b, mit einerlei Zahl, ſie heiße x (x kann jede ganze Zahl, aber auch jeden Bruch bezeichnen multiplicirt oder dividirt, ſo verhalten ſich im erſten Falle die Produkte wie die Multiplikanda;

Auflöſung.

1) Nachdem die gegebene Zahl in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man aus den beiden höchſten Klaſſen die Wurzel, wie in §. 136. iſt gezeigt worden.

2) Da nun noch eine dritte Klaſſe vorhanden iſt, macht man ſich aufs neue den Diviſor, welcher die dreifache Quadratzahl der bis dahin gefundenen Wurzel oder $3a^2$ iſt, wobei beide gefundene Theile der Wurzel $a+b$ zuſammen für einen, alſo abermals für a genommen werden, ſetzt dieſen Diviſor unter die hinzugekommene Klaſſe ſo, daß ſein niedrigſtes Zahlzeichen, unter das höchſte dieſer Klaſſe zu ſtehen kommt, und die etwa noch übrigen Zahlzeichen des Diviſors folgen, wie bei der Diviſion unter dem gebliebenen Reſte linker Hand.

3) Dividirt man nun aufs neue, ſo findet man einen abermaligen Theil der Wurzel b, den man, wie in §. 135. für den zweiten Theil nimmt, indem man die ſchon gefundenen Wurzeltheile nach nr. 1. für den erſten Theil anſieht. Alles übrige iſt aus §. 135. bekannt.

		$a + b$
Es ſei die Zahl	432|081|216|	7 5 6
$a^3 =$	343	$\underbrace{7\ 5}_{a}\ \ {}^{+}\ b$
	89081 . . .	
$(3a^2) =$	(147)	
$3a^2b =$	735	
$3ab^2 =$	525	
$b^3 =$	125 . . .	
	78875 . . .	
	10206216	
$(3a^2) =$	(16875) . .	
$3a^2b =$	101250 . .	
$3ab^2 =$	8100 .	
$b^3 =$	216	
	10206216	
	0	

Das

Das Verfahren läßt ſich wörtlich ſo ausdrücken: Die Wurzel von 432 iſt $7 = a$; $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 = a^3$. Wird nun 343 von 432 ſubtrahirt, ſo bleibt 89 Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die folgende Klaſſe 081, und es iſt in 89081 noch enthalten $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§. 117) Macht man den Diviſor $3a^2$, oder $(7 \cdot 7) \cdot 3 = 49 \cdot 3 = 147$ und dividirt in 890, ſo findet man den zweiten Theil der Wurzel $5 = b$. Mit 5 multiplicirt man den Diviſor 147, und man hat im Produkte 735, $3a^2b$, welches gerade unter den Diviſor geſchrieben wird. Macht man nun $3ab^2$, oder $(7 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 5 = 21 \cdot 25 = 525$, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen um eine Stelle weiter zur Rechten, und macht auch $b^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, ſetzt das niedrigſte Zahlzeichen dieſer Kubikzahl des zweiten Theils der Wurzel abermals eine Stelle weiter zur Rechten, und addirt dieſe gefundenen drei Stücke ſo zuſammen, wie ſie unter einander ſtehen ſo hat man $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 73500 + 5250 + 125 = 78875$; 78875 von 89081 ſubtrahirt, läßt 10206 zum Reſt. Zu dieſem Reſte rückt man die niedrigſte oder dritte Klaſſe der gegebenen Zahl, ſo hat man 10206216. In dieſer letzten Zahl ſteckt, wenn die beiden Wurzeltheile a und b zuſammen genommen, oder für einen geſetzt werden, ſo daß $a + b$ nun wieder a, oder $70 + 5$ nun 75 wird, abermals $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Um aufs neue den Wurzeltheil b zu finden, macht man den Diviſor $3a^2$. Da nun $a = 75$; $a^2 = 5625$; $3a^2 = 16875$ iſt, ſo ſetzt man dieſen Diviſor unter 10206216 ſo, daß das niedrigſte Zahlzeichen des Diviſors unter das erſte oder höchſte Zahlzeichen 2 der neu hinzugekommenen Klaſſe zu ſtehen kommt, und dividirt. Da der Quotient hier 6 iſt, ſo iſt dies Zahlzeichen b oder der zweite Theil der Wurzel; wird mit dieſem der Diviſor multiplicirt, ſo erhält man das Product $3a^2b = 101250$, welches unter den Diviſor geſetzt wird. Das darauf folgende Produkt von $3ab^2 = (75 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 6) = 225 \cdot 36 = 8100$ wird ſo unter geſetzt, daß das niedrigſte

Zahlzeichen unter das mittelſte der hinzugekommenen Klaſſen zu ſtehen kommt, und endlich $b^3 = 6.6.6 = 216$ ſetzt man abermals eine Stelle weiter zur Rechten, oder ſo, daß 6 unter 6 oder die niedrigſten Zahlzeichen untereinander kommen. Wird nun $3a^2b$, $3ab^2 + b^3$ addirt, ſo erhält man die Summe von 10206216; dieſe von der obigen Zahl 10206216 ſubtrahirt, läßt keinen Reſt, und die gegebene Kubikzahl iſt eine vollkommene, ſo wie die dazu gehörige und theilweiſe gefundene Wurzel 756 rational.

§. 138.

Wäre die gegebene Zahl ſo groß, daß man 4, 5, 6 und mehrere Klaſſe erhielte, ſo würde man auch mit der hinzugekommenen 4ten, 5ten, 6ten und allen folgenden Klaſſen verfahren, wie §. 137. lehret.

§. 139.

Damit man ſich überzeugen könne, daß bei der Eintheilung der Kubikzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, jede Klaſſe, die höchſte ausgenommen, nicht mehr, aber auch nicht weniger als Drei Zahlzeichen erhalte, und in jeder Klaſſe nur Ein Wurzeltheil unter den Zahlen von 1 bis 9 enthalten ſei, darf man nur folgendes überdenken. Unter allen Wurzeln von 1 bis 9 giebt die Kubikzahl nicht mehr als drei Zahlzeichen, d. i. von 1 nur 1, von 9 aber $9.9.9 = 729$. Da nun von der Wurzel 1 die Kubikzahl nur 1; von der Wurzel 2 die Kubikzahl 8; von der Wurzel 3 die Kubikzahl 27; und von der Wurzel 4 die Kubikzahl nur 64 iſt, alſo mehrere Wurzeln in der Kubikzahl nur eins oder zwei Zahlzeichen haben, ſo kann auch die höchſte Klaſſe in der Kubikzahl auch nur eins oder zwei Zahlzeichen enthalten, weil man doch einen dazu gehörigen Wurzeltheil von 1 bis 4 antrifft. Aus dieſem ergiebt ſich die allgemeine Regel: Jede Kubikzahl

bikzahl beſteht aus dreimal ſo vielen Zahlzeichen, als die Wurzel hat, weniger zwei; aber auch in keinem Falle aus mehr, als dreimal ſo viel Zahlzeichen. Eine Wurzel die zwei Zahlzeichen hat, muß nothwendig 10 oder 99 ſeyn, oder zwiſchen dieſen Zahlen enthalten ſeyn. Nun aber iſt 100 > 99, alſo muß die Kubikzahl von 100 größer ſeyn, als von 99 (§. 115). Es iſt die Kubikzahl von 100 die Zahl 1000000, und dieſe Zahl iſt unter allen die kleinſte, die ſieben Zahlzeichen enthalten, alſo kann die Kubikzahl von 99 nur ſechs, d. i. 2. 3 oder dreimal ſo viel Zahlzeichen enthalten. Da ferner die Kubikzahl von 10, oder die kleinſte von allen Wurzeln die zwei Zahlzeichen haben, 1000 iſt, alſo vier Zahlzeichen hat, (2. 3) — 2 = viere; ſo folgt, daß dieſe Kubikzahl nur zwei Zahlzeichen weniger enthalten kann, als die Anzahl der Zahlzeichen der Wurzel dreimal genommen.

Dies ſtimmt auch hier vollkommen genau mit der Decimaleintheilung der Maße zuſammen, und alles läßt ſich demnach auch auf genannte Zahlen anwenden. Denn wenn die gegebene Zahl in Kubikruthen, Kubikfußen, Kubikzollen ꝛc. ausgedrückt iſt, ſo iſt man ſicher, da die Kubikruthe = 1000 F^c; der F^c = 1000 Z^c ꝛc. iſt, daß man, weil jede Klaſſe nur drei Zahlzeichen erhält, aus der Klaſſe der Kubikfuße nicht mehr als höchſtens 9 Fuße Längenmaß in der Wurzel findet; und auf eine ähnliche Art bei den übrigen Klaſſen.

Hierauf bezieht ſich auch die allgemeine Formel mit ihren Theilen. a^3 iſt auch hier immer nur in der höchſten Klaſſe enthalten; jede der folgenden aber enthält $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Dieſe drei Stücke zeigen denn an, daß jedes unter ein ihm zugehöriges Zahlzeichen jeder Klaſſe geſetzt werden müſſe, und zwar unter das erſte (von der Linken gegen die Rechte) $3a^2b$, unter das zweite oder mittelſte $3ab^2$, und unter das dritte oder letzte b^3.

§. 140.

A u f g a b e.

Aus gegebenen genannten Zahlen die Kubikwurzel zu finden.

A u f l ö ſ u n g.

1) K u b i k z a h l e n v o n e i n e r l e i N a m e n.

In dieſem Falle wird die gegebene Zahl wie die ungenannten behandelt, und die Wurzel erhält den Namen der Kubikzahl, nur in Längenmaße.

Beiſpiel.

Es iſt ein H o l z h a u ſ e in der Geſtalt eines Würfels aufgeſetzt und ſein Inhalt beträgt 231475544 Kubikzoll; wie lang iſt jede Seite? 614 L ä n g e n z o l l e.

$$\begin{array}{rl}
 & 231|475|544|\underbrace{6 \quad 1 \quad 4}_{a+b} \quad (a+b)\\
a^3 = & 216 \\
\hline
 & 15\,475\ldots \\
 & (108)\ldots\ldots \\
3a^2b = & 108\ldots\ldots \\
3ab^2 = & 18\ldots\ldots \\
b^3 = & 1\ldots \\
\hline
 & 10981\ldots \\
\hline
 & 4494544 \\
 & (11163)\ldots \\
3a^2b = & 44652\ldots \\
3ab^2 = & 2928. \\
b^3 = & 64 \\
\hline
 & 4494544 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

2) Ku-

2) Kubikzahlen von verſchiedenen Namen.

Es ſei die Zahl $311\ R^{o}\ 665\ F^{e}\ 752\ Z^{e}$ der Inhalt eines Würfels; wie groß iſt die Seite deſſelben? 6 R 7 F 8 Z oder 678 Längenzolle. Da die gegebene Zahl durch ihre Namen ſchon in Klaſſen getheilt iſt, ſucht man die Wurzel aus jeder Klaſſe wie bei ungenannten Zahlen, und giebt jedem Wurzeltheile den Namen der Klaſſe, aber im Längenmaße.

```
  311 |665'|752''|6°7'8''
  216 |        ...
 ----
   95 665      ...
  (10 8)..     ...
   75 6..      ...
    8 82.      ...
      343      ...
  -----------
   84 763
  -----------------
   10 902 752
   (1 346 7)..
   10 773 6..
      128 64..
          512
  -----------------
   10 902 752
  -----------------
          0
```

§. 141.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen ganzen Zahl, die 1000, 1000000 ꝛc. iſt, oder überhaupt aus 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen beſteht, die Kubikwurzel zu finden.

Aufloͤſung.

Da aus 1 die Wurzel 1 iſt, und jede Klaſſe Nullen in der gegebenen Zahl, eine 0 in der Wurzel giebt, ſo hat man dadurch die Wurzel ſchon von ſelbſt gefunden. Denn es iſt 10 . 10 . 10 = 1000; folglich die Wurzel 1 mit einer 0, d. i. 10. Eben ſo iſt es mit 100 . 100 . 100 = 1000000, folglich die Wurzel 1 mit zwei Nullen, das iſt 100.

Iſt demnach die gegebene Zahl

ſo iſt 1|000|000|000|000| 10000 die Wurzel.

Anmerkung.

Wenn man eine Zahl erhaͤlt, die aus 1 und einer Reihe Nullen beſteht, ſo muß man, wenn nicht Irrungen entſtehen ſollen, immer darauf ſehen, ob auch die Reihe Nullen durch 3 theilbar iſt; iſt dies nicht, ſo muß man die Wurzel auf die gewoͤhnliche Art ſuchen: So iſt z. B.

```
10|000|000 | 21 . . .
 8|
―――――――
  2 000
  (12)
```

§. 142.

Kommt auch bei der Ausziehung der Kubikwurzel irgend wo der Fall vor, daß der Diviſor groͤßer iſt als das Dividendum, d. i. groͤßer als der gebliebene Reſt mit dem hoͤchſten Zahlzeichen der zum Reſte geruͤckten Klaſſe aus der gegebenen Kubikzahl, ſo iſt auch hier der Quotient d. i. der neue Wurzeltheil Null. In dieſem Falle bleibt alles (wie bei der Ausziehung der Quadratwurzeln §. 126.) ungeaͤndert; der Reſt und die dazugekommene Klaſſe wird aufs neue abgeſchrieben, die folgende Klaſſe aus der Kubikzahl dazu geruͤckt, der Diviſor aber-

abermals gemacht, der nun um 100 mal größer wird, d. i. zwei Nullen rechter Hand mehr erhält, als vorhin, und der folgende Theil der Wurzel wird auf die vorige oder gewöhnliche Art geſucht. Dieſer Fall kömmt zuweilen auch mehr als einmal hinter einander vor; aber auch alsdenn verfährt man, wie vorhin gezeigt worden iſt.

Es ſei z. B. die gegebene Zahl 13824000642; wie groß iſt die Kubikwurzel? beinahe 2400.

```
13|824|000|642|2400
 8|
——
 5 824...
(12).....
 48.....
  96....
   64...
————
 5 824...
————
     000 642
   (172800)
————
   Reſt 642
```

Iſt aber die gegebene Kubikzahl 9129329; ſo iſt die Wurzel 209.

```
9|129|329|209
8|
——
1 129 ...
(12)  ...
————
1 129 329
 (1200)..
1 080 0..
   48 60.
      729
————
1 129 329
————
    0
```

§. 143.

Bleibt ein Reſt, es ſei am Ende, nachdem man alle Theile der Wurzel gefunden, oder zu Anfange, oder wo auch nur der Fall vorkommt, ſo muß dieſer Reſt kleiner ſeyn, als die um Eins vermehrte dreifache Summe der bis dahin gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl, oder allgemein, wenn a die Wurzel iſt, kleiner als $3(a+a^2)+1$; denn die Kubikzahl einer um Eins vergrößerten Wurzel iſt um dieſe Größe größer, als die Kubikzahl der unvermehrten, d. i. der um Eins kleinern Wurzel. Es ſei die Wurzel 2, ſo iſt die Kubikzahl 8. Iſt aber die Wurzel 3, ſo iſt die Kubikzahl 27; nun iſt $27-8=19$; 19 aber iſt gleich $3(2+2^2)1$. Demnach kann man bei jedem gefundenen Wurzeltheile eine Prüfung anſtellen, ob man auch richtige Würzeltheile erhalten hat. Iſt jeder der richtige, ſo wird der vorige Satz treffen; iſt er um Eins oder noch um mehr zu klein, ſo wird der Reſt entweder eben ſo groß ſeyn, als $3(a+a^2)+1$, oder größer; iſt er aber zu groß, ſo wird $3a^2b+3ab^2+b^3$ größer ſeyn, als das darüberſtehende Dividendum.

```
Z. B.   3|690|15
        1|
     ------
Reſt    2|690
         (3)..
         15..
          75.
          125
       -------
         2375
       -------
Reſt      315
```

Der Reſt 2 iſt kleiner als $3.(1+1^2)+1$, oder $2<7$; der Reſt 315 iſt ebenfalls kleiner, als $3.(15+15^2)+1$, oder $315<721$.

§. 144.

Die Probe, ob man richtig gerechnet, oder vielleicht Rechnungsfehler gemacht habe, beſteht darin, daß man die gefundene Wurzel kubiret, d. i. die Kubikzahl davon macht, und den etwa gebliebenen Reſt dazu addirt. Hat man richtig gerechnet, ſo iſt die gefundene Zahl der gegebenen Kubikzahl gleich; wo nicht, ſo hat man Rechnungsfehler gemacht, die man aufſuchen und verbeſſern muß. So iſt §. 143 die gefundene Wurzel 15.

```
     15
     15
    ----
     75
    15
   -----
    225
     15
   -----
   1125
   225
  ------
   3375
    315 der gebliebene Reſt.
  ------
   3690 die gegebene Kubik-
        zahl.
```

§. 145.

Aufgabe.

Aus einem Bruche die Kubikwurzel zu finden.

Auflöſung.

1) Wenn der gegebene Bruch ein gemeiner Bruch iſt, und Zähler und Nenner ſind vollkommene Kubikzahlen; ſo ſuche man die Wurzel ſowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner (§. 135 — 141).

Die

Die erſtere giebt den Zähler, die letztere aber den Nenner der verlangten Wurzel.

So iſt z. B. $\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$.

2) Iſt der Bruch zwar ein gemeiner Bruch, aber ſein Nenner iſt eine unvollkommene Kubikzahl, oder Zähler und Nenner ſind beide unvollkommene Kubikzahlen, ſo multiplicire man ſowohl den Zähler als auch den Nenner mit der Quadratzahl des Nenners, ſo wird der Nenner vollkommen. Sucht man nun die Wurzeln, ſo iſt die des Nenners eine rationale Zahl, die des Zählers aber irrational, die man durch die rationale Wurzel des Nenners überdies dividiren muß, um die Wurzel des Bruchs zu erhalten.

So iſt z. B. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2.3.3}{3.3.3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$.

Wird nun die Kubikwurzel aus 18 gezogen, ſo iſt dieſe der Zähler und 3 der Nenner der geſuchten Kubikwurzel von $\frac{2}{3}$

3) Iſt der gegebene Bruch ein ächter Decimalbruch, ſo ſucht man die Wurzel.

a) wenn die Anzahl der Decimalſtellen gerade iſt, wie aus einer ganzen Zahl, und giebt der Wurzel von der Rechten zur Linken den dritten Theil von der Anzahl der Decimalſtellen der Kubikzahl; oder beſtimmt man die Stelle der Ganzen gleich anfangs durch Null mit dem Komma, ſo folgen nur Decimalſtellen, und zwar ſo viel, als die gegebene Zahl Klaſſen hat, welches alſo auch mit der vorigen Regel übereinſtimmt.

So

So iſt z. B. $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, denn es iſt $\sqrt[3]{0,216}$
$= \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6.$

Ferner $\sqrt[3]{0,001728} = \sqrt[3]{\frac{1728}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{1000000}}$
$= \frac{12}{100} = 0,12.$

b) Wenn die Anzahl der Decimalſtellen aber ungerade iſt. In dieſem Falle ſetzt man rechter Hand eine oder zwei Nullen zu, und die Anzahl iſt gerade. Da nun rechter Hand zugeſetzte Nullen den Werth des Decimalbruchs nicht ändern, ſo ſucht man die Wurzel auf eben die Art, wie in No. a.

Z. B. $\sqrt[3]{0,5021} = \sqrt[3]{0,502100}$.

```
0|502|100|0,79...
1|393|
 ------
  159 100
  (147)..
  1323 ..
   1701 .
      729
  --------
  150 039
  --------
Reſt 9 061
```

§. 146.

Gemeine Brüche, beſonders wenn Zähler und Nenner unvollkommene Kubikzahlen ſind, verwandelt man (wie bei den Quadratwurzeln §. 130) in Decimalbrüche und ſucht aus dieſen die Wurzel nach No. a und b §. 145.

So

So iſt $\frac{2}{3}=0,666666\ldots$ §. 111.

o) 666|666|0,87.. Wurzel
512
154 666
(192)..
1344..
1176.
343
146 503
Reſt 8 163

Auch hier gilt das, was bei den Quadratwurzeln aus Decimalbrüchen (§. 130) iſt bemerkt worden, mit der gehörigen Ausdehnung der Begriffe auf **Kubikzahlen** und **Kubikwurzeln**, ſtatt Quadratzahlen und Quadratwurzeln.

§. 147.

Iſt die gegebene Zahl eine **gemiſchte Zahl**, alſo eine ganze Zahl, entweder mit einem **ächten gemeinen**, oder mit einem **Decimalbruche** verbunden, ſo verwandelt man im erſten Falle die gemiſchte Zahl in einen unächten gemeinen Bruch, und dieſen in einen **Decimalbruch**; und zieht in beiden Fällen die **Wurzel** aus der ganzen Zahl für ſich, und dann aus dem dabei befindlichen Decimalbruche, wie aus einer ganzen Zahl nach §. 145. No. 3.

Wäre z. B. $18\frac{26}{27}$ gegeben, ſo iſt $18\frac{26}{27}=\frac{512}{27}$. Da nun 512 ſo wohl als 27 vollkommene Kubikzahlen ſind, ſo iſt $\sqrt[3]{\frac{512}{27}}=\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{8}{3}$ oder welches einerlei iſt,

$\frac{8}{3}$

$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. Iſt aber $8\frac{2}{3}$ gegeben, ſo iſt $8\frac{2}{3} = \frac{26}{3}$; $\frac{26}{3}$ aber ſind = 8,666666..., und die Wurzel iſt 2,05...

```
    8|666|666|2,05...
    8|
   ---
      666...
     (12) ...
   ----------
     666 666
     (1200)..
     6000..
      1500.
        125
   ----------
     615 125
   ----------
Reſt  51 541
```

Eben ſo, wenn 64, 421875 gegeben iſt, ſo iſt die Kubikwurzel 4, 75.. oder $\sqrt[3]{64,421875} = 4,75$.. Desgleichen, wenn 10, 3954 gegeben iſt, ſo iſt, da 10, 3954 = 10, 395400, die Kubikwurzel 2, 02... oder $\sqrt[3]{10, 395400} = 2,02$...

§. 148.

Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen oder gebrochenen Kubikzahl, die Wurzel durch Annäherung ſo genau zu finden, als verlangt wird.

Auflöſung.

1.) Iſt die gegebene Zahl eine ganze Zahl, ſo ſetze man rechter Hand ein Komma, und nach dieſem ſo viele Klaſſen von Nullen, als man für gut findet, und ſuche die Wurzel wie aus einer ganzen Zahl. Auch kann

man hier (wie bei den Quadratzahlen §. 132.) dem gebliebenen Reſte, wenn die ganze Zahl zu Ende iſt, jedesmal, wenn man einen neuen Wurzeltheil ſucht, eine Klaſſe Nullen beifügen. Durch dieſes Verfahren iſt die ganze Zahl zu einem Decimalbruche gemacht, und demnach gilt alles, was §. 132 — 142 iſt bemerkt worden.

Es ſei z. B. 3 gegeben.

```
      3 | 1,44...
      1 |
     ---
      2 000
       (3)
      1 2..
        48.
         64
     ------
Reſt  1 744
     --------
        256000
         (588)
```

Auch hier kann das Ausziehen der Wurzel bis ohne Ende fortgeſetzt werden, ohne daß man die Wurzel als eine rationale Zahl erhält. Demnach iſt dieſes Verfahren eine Annäherung an den wahren Werth, und Umſtände müſſen entſcheiden, wenn man die Ausziehung beendigen ſoll.

2) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, ſo muß dieſer ſchon vorher in einen Decimalbruch verwandelt werden, welches auch der Fall bei gemiſchten Zahlen iſt. Läßt ſich nun ein gemeiner Bruch nicht genau in einen Decimalbruch verwandeln, ſo muß man durch Annäherung §. 111. ſo viele Decimalſtellen ſuchen, als man nöthig zu haben glaubt. Bleibt nach allen dieſen Unternehmungen beim Wurzelausziehen dennoch ein Reſt, ſo giebt

giebt man dieſem ebenfalls eine Kloſſe Nullen, und verfährt wie in No. 1. bei ganzen Zahlen.

Wäre z. B. 0,44361824 gegeben, ſo iſt die Wurzel:

```
0,|443|618|240|0,762...
  |343|
  ------
   100618...
   (147).....
    882......
     756....
      216...
  ---------
    95976....
  ---------
     4642240
     (17328)..
     34656..
        219.
          8
    --------
     3467798
    --------
Reſt 574442
```

Oder 669,921875426, ſo iſt die Wurzel 8,7500.

```
669,|921|875|426| 8,7500
512 |
———
157 921 ......
(19 2).. .....
134 4.. .....
 11 76.......
    343......
——————
146 503......
——————
 11 418 875 ...
 (2 270 7).....
 11 353 5.....
      65 25.....
         125...
——————
 11 418 875 ...
——————
              426
   (229 6875)
——————
              426000
    (22 9687500)
```

§. 149.

Aus dieſer Annäherungsmethode die Kubikwurzel aus einer gegebenen Zahl zu ſuchen, kann man auch lernen, wie man ſich verhalten muß, wenn die gegebenen Zahlen genannt ſind, unter verſchiedenen Namen vorkommen, und unvollkommene Kubikzahlen ſind.

Wäre demnach die Zahl gegeben: 121 Kubikruthen als der Inhalt eines Würfels; wie groß würde eine Seite deſſelben ſeyn?

121° | 4°9′4″6‴
64

Anfang der Annäherung 57 000
(4 8)..
43 2..
9 72.
729
53 649
3 351000
(7203)..
28812..
2352.
64
2 904784
446216000
(732108)

Demnach iſt die Wurzel 4 R 9 F 4 Z 6 L oder 4 Ruthen, 9 Fuß, 4 Zoll, 6 Linien Längenmaß. Könnte man in der Ausübung keine Linien brauchen, ſo wird die Annäherung nur bis auf Zolle nöthig ſeyn, und dann wäre die Seite des Würfels beinahe 4 R 9 F 4 Z, aber doch immer um Etwas zu klein, welches auch noch bei den 6 Linien der Fall iſt. Verlangt man noch kleinere Theile als Linien, alſo Skrupel, ſo muß man die Rechnung noch weiter fortſetzen.

Soll man aus 9 Kubikruthen, 265 Kubikfußen und 400 Kubikzollen die Wurzel ziehen, ſo hat man 3 Klaſſen, nämlich:

9 | 265 | 400 |

Wäre aber die gegebene Kubikzahl 9 Ruthen 26 Kubikfuß und 4 Kubikzoll, ſo müßte man die fehlenden Stellen ergänzen, und die Kubikzahl zum Ausziehen der Wurzel eingerichtet würde ſo geſetzt: 9 Kubikruthen 026 Kubikfuß und 004 Kubikzoll; oder

9°|026'|004''|

und die Wurzel aus der höchſten Klaſſe würde nun auch Ruthen, aus der folgenden Fuß, und aus der niedrigſten Zoll heiſſen. Bliebe ein Reſt, ſo müßte man dieſem eine Klaſſe Nullen beifügen und die Wurzel durch Annäherung in Linien, Skrupeln ꝛc. ſuchen.

§. 150.

Zum Ausziehen der Kubikwurzeln kann man ſich ſchon berechneter Tafeln oder Tabellen bedienen, welche von den rationalen Wurzeln von 1 bis 1000, oder von 1 bis 10000 die vollkommenen Kubikzahlen enthalten. Der Gebrauch derſelben erſtreckt ſich eben ſo weit als der der Quadratwurzeltafeln. Man kann damit wenigſtens aus den höchſten zwei oder auch wohl aus den höchſten drei Klaſſen entweder die Wurzel genau, oder doch beinahe, finden. Hört der Gebrauch der Tafeln auf, ſo treten die gewöhnlichen Regeln ein, nach welchen man überhaupt Kubikwurzeln extrahirt.

Anmerkung.

Das in §. 134 in der Anmerkung angeführte Lehrbuch enthält auch Tafeln der Kubikzahlen von den Wurzeln von 1 bis 1000.

Beſonders berechnet, findet man die Kubikzahlen, von den Wurzeln von 1 bis 12000 in Joh. Paul Buchners Tabula Radicum quadratorum et cuborum. (§. 134. Anmerk.)

Sie.

Siebentes Kapitel.

Von den Verhältniſſen und Proportionen.

Erſter Abſchnitt.

Von den Verhältniſſen.

§. 151.

Die Vergleichung zweier Größen oder Zahlen von einerlei Art, in Abſicht ihrer Größe, nennt man im allgemeinen ein Verhältniß. Die zwei Größen oder Zahlen, die man mit einander vergleicht, oder von welchen die eine ſich aus der Größe der andern herleiten läßt, heißen die Glieder des Verhältniſſes, und zwar dasjenige, womit man ein Verhältniß anfängt, oder welches zuerſt ſteht, das Vorderglied, das andere aber das Hinterglied.

§. 152.

Dieſe Vergleichung geſchieht nun entweder bei den Zahlen durch die Subtraktion, indem man unterſucht, um wie viel Einheiten die eine größer iſt, als die andere, oder durch die Diviſion, indem man ſieht, wie vielmal die eine Zahl oder Größe in der andern enthalten iſt. Ein Verhältniß von der erſtern Art heißt ein arithmetiſches und von der letztern Art ein geometriſches Verhältniß. Die durch die Vergleichung

gefundene Differenz und den Quotient nennt man beide den Verhältnißnamen.

Anmerkung.

Die arithmetiſchen Verhältniſſe kommen allein in der Arithmetik, die geometriſchen aber außer in der Geometrie, auch in allen mathematiſchen Wiſſenſchaften vor, die ſich auf Geometrie gründen.

I.

Arithmetiſche Verhältniſſe.

§. 155.

Arithmetiſche Verhältniſſe werden durch die Differenz beſtimmt und heißen zunehmende, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; im Gegentheile aber abnehmende. Das bei den arithmetiſchen Verhältniſſen eingeführte Zeichen, iſt das Zeichen der Subtraktion (—) und wird zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 — 7; 5 — 9 zunehmende,
aber 7 — 4; 9 — 5 abnehmende Verhältniſſe.

Kurz lieſt man dieſe Verhältniſſe ſo: 4 zu 7; 5 zu 9; 7 zu 4; 9 zu 5, d. i. 4 iſt um 3 kleiner als 7; 5 um 4 kleiner als 9. 7 aber um 3 größer als 4; 9 um 4 größer als 5. 3 und 4 ſind die Differenzen.

Man ſieht hieraus, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt als die Summe des Vordergliedes und der Differenz des Verhältniſſes; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe iſt das Vorderglied ſo groß als die Summe des Hintergliedes, und die Differenz des Verhältniſſes.

Hier-

Hiernach kann man die arithmetiſchen Verhältniſſe auch **allgemein** ſo bezeichnen: Es ſei a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes und d die Differenz, ſo iſt $a + d$ das Hinterglied, folglich das **zunehmende** Verhältniß $a - (a + d)$. Iſt nun $a + d$ das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt $(a + d) - d = a$, das Hinterglied, folglich das **abnehmende** Verhältniß $(a + d) - a$.

§. 154.

Alle arithmetiſchen Verhältniſſe, die **einerlei**, d. i. **gleich große Differenzen** haben, ſind einander gleich, und können alſo auch für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe $3 - 5$, $7 - 9$; $9 - 7$, $6 - 4$ einander gleich, weil ſie insgeſammt die Differenz 2 haben.

Demnach ſind **arithmetiſche Verhältniſſe gleiche Verhältniſſe**, wenn ſie **gleiche Differenzen haben**; umgekehrt, **arithmetiſche gleiche Verhältniſſe haben gleich große Differenzen.**

§. 155.

Zwei arithmetiſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich.

Iſt 8 — 11 wie 1 — 4, und
9 — 12 wie 1 — 4

8 — 11 wie 9 — 12

II.

Geometriſche Verhältniſſe.

§. 156.

Geometriſche Verhältniſſe werden durch den Quotient, der hier **Exponent des Verhältniſſes** heißt, beſtimmt und werden **zunehmende** genannt, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; findet aber

das Gegentheil Statt, ſo heißen ſie **abnehmende Verhältniſſe**. Das **Zeichen der geometriſchen Verhältniſſe** iſt das **Zeichen der Diviſion** (:) und wird (wie §. 153.) zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 : 12; 5 : 15 zunehmende, aber 12 : 4; 15 : 5 abnehmende Verhältniſſe. Der Sinn des Verhältniſſes wird ſo ausgedrückt: 4 zu 12; 5 zu 15; 12 zu 4; 15 zu 5. d. i. 4 iſt in 12 **dreimal**, 5 in 15 **dreimal** enthalten; eben ſo enthält 12 das Glied 4 **dreimal**, 15 das Glied 5 **dreimal**. 3 iſt hier der **Exponent**.

Aus dieſem ergiebt ſich, daß in einem **zunehmenden** Verhältniſſe, das **Hinterglied** ſo groß iſt, als das **Produkt des Vordergliedes in den Exponent**; und umgekehrt, in einem **abnehmenden** Verhältniſſe, iſt das **Vorderglied** ſo groß, als das **Produkt des Hintergliedes in den Exponent**.

Hiernach kann man die geometriſchen Verhältniſſe **allgemein** ſo bezeichnen. Es ſey a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes, und e der Exponent, ſo iſt ae das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß a : ae. Iſt nun ae das Vorderglied eines abnehmendes Verhältniſſes, ſo iſt (ae : e) = a das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß ae : a.

§. 157.

Läßt ſich der Exponent eines Verhältniſſes, **weder** durch **eine ganze Zahl**, **noch** durch **einen Bruch** genau ausdrücken, ſo iſt das Verhältniß ein **Irrationalverhältniß** und der Exponent ſelbſt eine **Irrationalzahl**. Ein ſolches Verhältniß entſteht allemal, wenn eins von beiden, oder beide Glieder Irrationalzahlen ſind.

Dergleichen Verhältniſſe ſind z. B. $\sqrt{2} : 8$; $\sqrt[3]{2} : 8$, denn $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ ſind Irrationalzahlen, weil jede un-

vollkom-

vollkommene Quadrat- und Kubikzahl, wie 2 eine irrationale Wurzel hat. Indeß kann man den Exponent eines ſolchen irrationalen Verhältniſſes dennoch ſo weit in Decimalſtellen finden, als es die Richtigkeit der Rechnung verlangt.

§. 158.

Alle geometriſchen Verhältniſſe ſind gleich, die gleichgroße oder einerlei Exponenten haben, und können für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe 4:12, 5:15, 9:3, 18:6 einander gleich, weil ſie ſämmtlich den Exponent 3 haben.

Demnach kann man von der Gleichheit der Exponenten auf die Gleichheit der Verhältniſſe; umgekehrt, aber auch von der Gleichheit der Verhältniſſe, auf die Gleichheit der Exponenten ſchließen.

§. 159.

Auch zwei geometriſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind unter ſich gleich.

Iſt 4 : 12 wie 1 : 3, und
5 : 15 wie 1 : 3

4 : 12 wie 5 : 15

Hier iſt das dritte Verhältniß, nämlich 1 : 3 gewiſſermaßen das Maßverhältniß.

§. 160.

Wenn man die beiden Glieder eines geometriſchen Verhältniſſes, etwa a:b, mit einerlei Zahl, ſie heiße x (x kann jede ganze Zahl, aber auch jeden Bruch bezeichnen multiplicirt oder dividirt, ſo verhalten ſich im erſten Falle die Produkte wie die Multiplikanda;

im

im zweiten Falle aber, die Quotienten wie die Dividenda.

1) Durch Multiplikation. Iſt a:b das Verhältniß, ſo iſt der Exponent $\frac{b}{a}$, und $ax : bx = \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ (§.65.). In Zahlen. Es ſei das Verhältniß 3:6; der Multiplikator ſei 4; alſo iſt 3.4:6.4 = 3:6 (§.65.). Denn 3.4 = 12, 6.4 = 24. Nun iſt 12:24 wie 3:6, weil beide Verhältniſſe den Exponent 2 haben (§.158.).

2) Durch Diviſion. Iſt a:b das Verhältniß, ſo iſt der Exponent ebenfalls $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{x} : \frac{b}{x}$ iſt gleich $\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{b}$ (§.87.) $= \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ (§.65.). In Zahlen. Es ſei das Verhältniß 12:24; der Diviſor ſei 4; alſo iſt $\frac{12}{4} : \frac{24}{4} = 3:6$ (§.65.). Denn $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{24}{4} = 6$. Nun iſt 3:6 wie 12:24, weil auch hier beide Verhältniſſe einerlei Exponent, nämlich die Zahl 2 haben (§.158.).

§. 161.

Hieraus ergiebt ſich der Vortheil, Verhältniſſe durch ihre kleinſten Zahlen auszudrücken, wenn man nämlich beide Glieder deſſelben mit dem kleinſten Gliede dividirt. Eine ſolche Diviſion macht, daß die Verhältniſſe allemal ein Glied erhalten, welches Eins heißt, und das andere giebt zugleich den Exponent des Verhältniſſes; daher bedient man ſich dieſes Mittels, verſchiedene Verhältniſſe in Abſicht ihrer Größe mit einander zu vergleichen.

So

So ſind die Verhältniſſe $7:22 = 1:3{,}142857..$
$113:355 = 1:3{,}141592..$
$100:314... = 1:314...$

Auch kann man durch Hülfe des Satzes in §. 160. Verhältniſſe, deren Glieder Brüche ſind, in ſolche verwandeln, deren Glieder durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. So iſt z. B.

$\frac{3}{4}:\frac{5}{9}$ einerlei mit $\frac{3}{4}.\frac{9}{9}:\frac{5}{9}.\frac{4}{4}$ oder $\frac{27}{36}:\frac{20}{36} = 27:20$.

Eben ſo iſt $4:\frac{2}{5} = \frac{4}{1}:\frac{2}{5}$ einerlei mit $\frac{4}{1}.\frac{5}{5}:\frac{2}{5}.\frac{1}{1}$ oder $\frac{20}{5}:\frac{2}{5} = 20:2$ oder $10:1$.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen.

§. 162.

Die Gleichheit zweier Verhältniſſe heißt eine Proportion, und dieſe Gleichheit wird aus dem Verhältnißnamen erkannt. Die Proportion iſt entweder arithmetiſch oder geometriſch, je nachdem die Verhältniſſe arithmetiſch oder geometriſch ſind. Die vier Zahlen oder Glieder, die eine Proportion ausmachen, unterſcheidet man auf folgende Art. Das erſte und vierte Glied, heißen zuſammen die äußern; das zweite und dritte aber, die mittlern Glieder. Unter gleichnamigen Gliedern begreift man entweder die Vorderglieder, oder die Hinterglieder einer Proportion. Uebrigens ſind die Proportionen entweder zunehmende, wenn die Verhältniſſe zunehmende ſind, oder abnehmende Proportionen, wenn die Verhältniſſe abnehmende Verhältniſſe ſind. Die Differenz der Verhältniſſe bei den arithmetiſchen, heißt hier Differenz der Proportion, ſo wie der Exponent bei den geometriſchen, Exponent der Proportion heißt.

Allgemein werden die Proportionen ſo bezeichnet:

1) Arithmetiſche:

$$a - (a + d) = b - (b + d)$$ zunehmende

$$(a + d) - a = (b + d) - b$$ abnehmende;

2) Geometriſche:

$$a : ae = b : be$$ zunehmende

$$ae : a = be : b$$ abnehmende Proportion;

In Zahlen iſt, wenn $a = 2$, $b = 8$, $d = 4$ geſetzt wird:

$$2 - (2 + 4) = 8 - (8 + 4)$$ oder

$$2 - 6 = 8 - 12$$ eine zunehmende;

$$(2 + 4) - 2 = (8 + 4) - 8$$ oder

$$6 - 2 = 12 - 8$$ eine abnehmende arithmetiſche Proportion.

Iſt $a = 2$, $b = 6$, $e = 4$, ſo iſt

$$2 : (2 . 4) = 6 : (6 . 4)$$ oder

$$2 : 8 = 6 : 24$$ eine zunehmende;

$$(2 . 4) : 2 = (6 . 4) : 6$$ oder

$$8 : 2 = 24 : 6$$ eine abnehmende geometriſche Proportion. Allgemein drückt man durch Worte den Sinn einer Proportion ſo aus: Wie das erſte Glied zum zweiten, ſo das dritte zum vierten.

§. 163.

Die Proportionen ſind der Form nach zweierlei, ſtäte und unſtäte; ſtäte Proportionen ſind ſolche, bei welchen die mittlern Glieder gleich, unſtäte Proportionen aber ſolche, bei welchen die mittlern Glieder ungleich ſind. Die in §. 162. ſind unſtäte arithmetiſche und unſtäte geometriſche Proportionen. Die ſtäten werden allgemein ſo ausgedrückt:

1) Arithmetiſche $a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$

2) Geometriſche $a : ae = ae : ae^2$, worin $ae^2 = a.e.e$ iſt.

Der Abkürzung wegen ſchreibt man dieſe Proportionen mit drei Gliedern, weil die mittlern gleich ſind, und ſondert ſie durch ein Komma von einander ab. Demnach iſt

$a, a+d, a+2d$ eine ſtäte arithmetiſche;
a, ae, ae^2 eine ſtäte geometriſche Proportion.

Setzt man $a=2$, $d=4$, ſo hat man
in $2, 2+4, 2+(2.4)$ oder
$2, 6, 10$ eine ſtäte arithmetiſche, aber in Zahlen ausgedrückte Proportion.

Iſt $a=2$, $e=4$, ſo iſt
$2, 2.4, 2.4^2$ oder
$2, 8, 32$ eine ſtäte geometriſche, aber gleichfalls in Zahlen ausgedrückte Proportion.

§. 164.

Bezeichnet $a:b=c:d$ eine geometriſche Proportion, und es iſt $a=c$, ſo muß auch $b=d$ ſeyn, d. i. wenn das erſte Glied dem dritten gleich iſt, ſo muß auch das zweite dem vierten Gliede gleich ſeyn; im Gegentheile würden die Exponenten der Verhältniſſe ungleich ſeyn, und $a:b=c:d$ würden keine Proportion ausmachen.

I.

Arithmetiſche Proportionen.

§. 165.

In jeder arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußern Glieder, der Summe der mittlern gleich.

Iſt

Iſt

$$a-(a+d)=b-(b+d) \text{ oder } (a+d)-a=(b+d)-b, \text{ ſo iſt}$$

$$a+b+d \qquad\qquad a+b+d$$

$$a+b+d \qquad\qquad a+b+d$$

Wird $a=6$, $b=10$, $d=4$ geſetzt, ſo iſt

$$6-(6+4)=10-(10+4) \text{ oder } (6+4)-6=(10+4)-10$$

$$4+6+10 \qquad\qquad 4+6+10$$

$$4+6+10 \qquad\qquad 4+6+10$$

Da nun die einzelnen Theile dieſer Summen für ſich gleich ſind, ſo ſind auch die Summen ſelbſt gleich.

§. 166.

In jeder ſtäten arithmetiſchen Proportion iſt das doppelte mittelſte Glied ſo groß, als die Summe des erſten und dritten.

$$a,\ a+d,\ a+2d \ (\text{§. } 163.)$$

$$2a+2d$$

$$2a+2d$$

Iſt $a=4$, $d=3$, ſo iſt

$$4-(4+3)=(4+3)-(4+(2.3)) \text{ oder}$$

$$4,\ 7,\ 10$$

$$2.7=14$$

$$10+4=14$$

§. 167.

Es giebt demnach zwei allgemeine Kennzeichen, durch welche man die Richtigkeit einer jeden arithmetiſchen Proportion prüfen kann.

1)

1) Die Gleichheit der Differenzen ihrer Verhältniſſe (§. 162.).

2) Die Gleichheit der Summen der äußern und mittlern Glieder (§. 165.).

Findet man eins dieſer Kennzeichen bei irgend einer arithmetiſchen Proportion, ſo findet auch das andere ſtatt.

§. 168.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Gliedern einer arithmetiſchen Proportion, das vierte zu finden.

Auflöſung.

Man addire die mittlern Glieder und ſubtrahire von der Summe das erſte Glied. Der gefundene Reſt iſt das geſuchte vierte Glied.

$$a - (a+d) = b - x$$
$$a + x = a + b + d \quad (\S.\,165.)$$
$$a = a \quad \text{ſubtrahirt}$$
$$\overline{x = b + d}$$

und es iſt $a - (a+d) = b - (b+d)$ (§. 162.).

Es ſei $a = 4$, $b = 5$, $d = 3$, ſo iſt
$4 - 7 = 5 -$ vierten Gliede.

Dieſes muß $(7+5) - 4 = 8$, denn $5+3=8$ (§. 153.), und es iſt $4 - 7 = 5 - 8$ (§. 167.).

§. 169.

Soll man in einer ſtäten Proportion, zu zwei gegebenen Gliedern das dritte Glied finden, und die gegebenen ſind 3 und 7, ſo iſt $7+7=14$; $14 - 3$ aber iſt $= 11$, folglich iſt die Proportion $3 - 7 = 7 - 11$; oder 3,7 , 11.

§. 170.

Aufgabe.

Zu den äußern Gliedern einer ſtäten arithmetiſchen Proportion das mittlere Glied zu finden.

Auflöſung.

Man nehme die halbe Summe der äußern Glieder, ſo hat man das mittlere Glied (§. 165.)

Iſt a und b gegeben, ſo iſt $a + b$ die Summe; $\frac{1}{2}(a+b)$ die halbe Summe, folglich das mittlere Glied, und man hat folgende Proportion: $a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b) - b$. Setzt man $a = 8$, und $b = 12$, ſo iſt auch hier $8 + 12$ die Summe $\frac{8+12}{2}$ oder 10 das mittlere Glied, und es iſt $8 - 10 = 10 - 12$.

II.

Geometriſche Proportionen.

§. 171.

In jeder geometriſchen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder, dem Produkte der mittlern gleich.

Iſt $a : ae = b : be$ oder $ae : a = be : b$, ſo iſt

abe	abe
abe	abe

Da nun die einzelnen Faktoren dieſer Produkte gleich ſind, ſo ſind die Produkte ſelbſt gleich.

Iſt $a = 4$, $b = 10$, $e = 2$, ſo iſt

$4 : 8 = 10 : 20$ oder $8 : 4 = 20 : 10$

80	80
80	80

§. 172.

§. 172.

In jeder ſtäten geometriſchen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder ſo groß, als die Quadratzahl des mittlern Gliedes.

Sind a und ae^2 die äußern Glieder, ſo iſt das Produkt derſelben a^2e^2, welches zugleich die Quadratzahl des mittlern Gliedes iſt; denn

$$a,\ ae,\ ae^2 \quad (\text{§. 163.})$$

$$a^2e^2$$

$$a^2e^2$$

Iſt $a = 4$, $e = 2$; ſo iſt

$$4 : 8 = 8 : 16 \quad \text{oder} \quad 4,\ 8,\ 16$$

$$8 . 8 = 64 \qquad\qquad 8 . 8 = 64$$

$$4 . 16 = 64 \qquad\qquad 4 . 16 = 64$$

§. 173.

Wenn zwei Produkte zweier Zahlen gleich ſind, ſo ſind die Faktoren des einen Produkts, mittlere Proportionalzahlen zwiſchen den Faktoren des andern Produkts.

Es ſei das Produkt von 4 . 6 gleich dem Produkte von 2 . 12 und es ſollen 2 und 12 mittlere Proportionalzahlen zwiſchen 4 und 6 werden, ſo werden dieſe Produkte auf folgende Art behandelt:

Es iſt $4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$
$$\begin{array}{rcll} 4 \cdot 6 & = & 2 \cdot 12 & \\ 2 & = & 2 & \text{dividirt.} \\ \hline \frac{4 \cdot 6}{2} & = & 12 & \\ 6 & = & 6 & \text{dividirt.} \\ \hline \frac{4}{2} & = & \frac{12}{6} & \end{array}$$

Oder $4 : 2 = 12 : 6$.

§. 174.

Aus dieſem Satze folgt unmittelbar, daß zwei gleiche Produkte, ſo wie auch zwei gleiche Brüche eine geometriſche Proportion geben, wenn man im erſten Falle die beiden Faktoren des einen Produkts zu mittlern Gliedern zwiſchen den beiden Faktoren des andern Produkts macht; im zweiten Falle aber, die Zähler als Vorderglieder, die Nenner aber als Hinterglieder in die Proportion ſetzt.

§. 175.

Auch bei den geometriſchen Proportionen hat man zwei allgemeine Kennzeichen,

1) die Gleichheit der Exponenten ihrer Verhältniſſe (§. 162.)

2) die Gleichheit der Produkte der äußern und mittlern Glieder. (§. 171.)

§. 176.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Gliedern einer geometriſchen Proportion das vierte zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

Man dividire das Produkt der mittlern Glieder durch das erſte, ſo iſt der Quotient das geſuchte vierte Glied. Dies unbekannte vierte Glied ſey x,

$$\begin{array}{lrcll} \text{ſo iſt} & a : ae & = & b : x & \\ & ax & = & abe & (\text{§. 171.}) \\ & a & = & a & \text{dividirt} \\ \hline & x & = & be & \end{array}$$

folglich $a : ae = b : be$ (§. 162.)

Iſt $a = 2$, $b = 4$, $e = 3$, ſo iſt

$2 : 2 . 3 = 4 : x$ oder

$2 : 6 = 4 : x$

$\frac{6 . 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$, demnach iſt

$2 : 6 = 4 : 12.$ (§. 175.)

§. 177.

Sind in einer ſtäten geometriſchen Proportion zwei Glieder gegeben, und man ſoll das dritte finden, ſo dividirt man die Quadratzahl des zweiten Gliedes durch das erſte Glied.

Sind a und ae die gegebenen Glieder, ſo iſt a^2e^2 die Quadratzahl des zweiten. Wird nun in a^2e^2 mit a dividirt, ſo iſt der Quotient ae^2, das dritte Glied, und es iſt a, ae, ae^2 oder $a : ae = ae : ae^2$.

Iſt $a = 4$ und $e = 2$, alſo $ae = 8$, ſo iſt $8^2 = 64$; $\frac{64}{4} = 16$ das dritte Glied, und man hat folgende Proportion $4 : 8 = 8 : 64$ oder $4, 8, 64$.

§. 178.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Gliedern das mittlere Glied einer ſtäten geometriſchen Proportion zu finden.

Auflöſung.

Man ſuche aus dem Produkte der beiden gegebenen, d. i. der äußern Glieder, die Quadratwurzel, ſo hat man das mittlere Glied.

Sind a und ae^2 die zwei gegebenen, alſo die äußern Glieder, ſo iſt ihr Produkt a^2e^2. Setzt man das Quadratwurzelzeichen vor, ſo zeigt dies die Quadratwurzel aus dieſem Produkte $\sqrt{a^2e^2} = \sqrt{(ae)^2}$. Da nun $\sqrt{(ae)^2} = ae$ iſt, ſo iſt ae das mittlere Glied, und die Proportion heißt $a : ae = ae : ae^2$ oder kürzer a, ae, ae^2.

Iſt $a = 2$, und $ae^2 = 32$, ſo iſt $2 . 32 = 64$ das Produkt der äußern Glieder; $\sqrt{64} = 8$ aber das mittlere, und man hat

$$2 : 8 = 8 : 64 \text{ oder } 2, 8, 64.$$

Anmerkung.

Iſt das Produkt der äußern Glieder bei dieſer Aufgabe eine unvollkommene Quadratzahl, ſo erhält man die Wurzel durch Annäherung, folglich als eine irrationale Zahl; demnach werden beide Verhältniſſe der Proportion, irrationale Verhältniſſe. Z. B. Es ſey 4 und 24 gegeben, ſo iſt $4 . 24 = 96$. $\sqrt{96}$ aber giebt eine irrationale Zahl, folglich ſind beide Verhältniſſe irrational nach der Form: $4 : \sqrt{96} = \sqrt{96} : 24$. Wie man die irrationalen Verhältniſſe behandelt, findet man weiter ausgeführt in Meinerts Lehrbuche der Mathematik Theil I. Arithmetik §. 139. Zuſatz 4, und §. 141. Zuſatz 2.

§. 179.

Jede allgemein $a : ae = b : be$ oder in Zahlen ausgedrückte geometriſche Proportion $4 : 12 = 5 : 15$ kann man auf mancherlei Art verändern, und es bleibt dennoch eine richtige Proportion. Die Veränderung kann geſchehen:

1) Durch Umkehrung der Glieder, indem man die Hinterglieder zu Vordergliedern und die Vorderglieder, zu Hintergliedern macht.

$$12 : 4 = 15 : 5$$ (§. 171. oder 175.)

2) Durch Verſetzung der Glieder, indem man die beiden mittlern Glieder verwechſelt.

$$4 : 5 = 12 : 15$$ (§. 171. oder §. 175.)

3) Durch Addition der Glieder, indem man entweder zum Hintergliede in beiden Verhältniſſen das Vorderglied addirt; oder zum Vordergliede das Hinterglied, und alles übrige ungeändert läßt.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 + 4 = 5 : 15 + 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 16 = 5 : 20 \\ \text{Ferner} & 4 + 12 : 12 = 5 : 15 : 15 \\ \text{d. i.} & 16 : 12 = 20 : 15 \end{array}\right\}$$ (§. 171. od. 175.)

4) Durch Subtraktion der Glieder wie in n. 3. bei der Addition der Glieder.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 - 4 = 5 : 15 - 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 8 = 5 : 10 \\ \text{Ferner} & 12 - 4 : 12 = 15 - 5 : 15 \\ \text{d. i.} & 8 : 12 = 10 : 15 \end{array}\right\}$$ (§. 171. od. 175.)

5) Durch Multiplikation der Glieder.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 \cdot 5 : 12 \cdot 5 = 5 \cdot 6 : 15 \cdot 6 \\ \text{d. i.} & 20 : 60 = 30 : 90 \\ \text{oder} & 2 : 6 = 3 : 9 \end{array}\right\}$$ (§. 171. oder §. 175.)

§. 178.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Gliedern das mittlere Glied einer ſtäten geometriſchen Proportion zu finden.

Auflöſung.

Man ſuche aus dem Produkte der beiden gegebenen, d. i. der äußern Glieder, die Quadratwurzel, ſo hat man das mittlere Glied.

Sind a und ae^2 die zwei gegebenen, alſo die äußern Glieder, ſo iſt ihr Produkt a^2e^2. Setzt man das Quadratwurzelzeichen vor, ſo zeigt dies die Quadratwurzel aus dieſem Produkte $\sqrt{a^2e^2} = \sqrt{(ae)^2}$. Da nun $\sqrt{(ae)^2} = ae$ iſt, ſo iſt ae das mittlere Glied, und die Proportion heißt $a : ae = ae : ae^2$ oder kürzer a, ae, ae^2.

Iſt $a = 2$, und $ae^2 = 32$, ſo iſt $2 . 32 = 64$ das Produkt der äußern Glieder; $\sqrt{64} = 8$ aber das mittlere, und man hat

$$2 : 8 = 8 : 64 \text{ oder } 2, 8, 64.$$

Anmerkung.

Iſt das Produkt der äußern Glieder bei dieſer Aufgabe eine unvollkommene Quadratzahl, ſo erhält man die Wurzel durch Annäherung, folglich als eine irrationale Zahl; demnach werden beide Verhältniſſe der Proportion, irrationale Verhältniſſe. Z. B. Es ſey 4 und 24 gegeben, ſo iſt $4 . 24 = 96$. $\sqrt{96}$ aber giebt eine irrationale Zahl, folglich ſind beide Verhältniſſe irrational nach der Form: $4 : \sqrt{96} = \sqrt{96} : 24$. Wie man die irrationalen Verhältniſſe behandelt, findet man weiter ausgeführt in Meinerts Lehrbuche der Mathematik Theil I. Arithmetik §. 139. Zuſatz 4, und §. 141. Zuſatz 2.

§. 179.

§. 179.

Jede allgemein $a : ae = b : be$ oder in Zahlen ausgedrückte geometriſche Proportion $4 : 12 = 5 : 15$ kann man auf mancherlei Art verändern, und es bleibt dennoch eine richtige Proportion. Die Veränderung kann geſchehen:

1) **Durch Umkehrung der Glieder**, indem man die Hinterglieder zu Vordergliedern und die Vorderglieder zu Hintergliedern macht.

$$12 : 4 = 15 : 5 \text{ (§. 171. oder 175.)}$$

2) **Durch Verſetzung der Glieder**, indem man die beiden mittlern Glieder verwechſelt.

$$4 : 5 = 12 : 15 \text{ (§. 171. oder §. 175.)}$$

3) **Durch Addition der Glieder**, indem man entweder zum Hintergliede in beiden Verhältniſſen das Vorderglied addirt; oder zum Vordergliede das Hinterglied, und alles übrige ungeändert läßt.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 + 4 = 5 : 15 + 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 16 = 5 : 20 \\ \text{Ferner} & 4 + 12 : 12 = 5 : 15 : 15 \\ \text{d. i.} & 16 : 12 = 20 : 15 \end{array}\right\} \text{(§. 171. od. 175.)}$$

4) **Durch Subtraktion der Glieder** wie in n. 3. bei der Addition der Glieder.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 - 4 = 5 : 15 - 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 8 = 5 : 10 \\ \text{Ferner} & 12 - 4 : 12 = 15 - 5 : 15 \\ \text{d. i.} & 8 : 12 = 10 : 15 \end{array}\right\} \text{(§. 171. od. 175.)}$$

5) **Durch Multiplikation der Glieder.**

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 \cdot 5 : 12 \cdot 5 = 5 \cdot 6 : 15 \cdot 6 \\ \text{d. i.} & 20 : 60 = 30 : 90 \\ \text{oder} & 2 : 6 = 3 : 9 \end{array}\right\} \text{(§. 171. oder §. 175.)}$$

6) Durch Diviſion der Glieder.

$$\frac{4}{5} : \frac{12}{5} = \frac{5}{6} : \frac{15}{6}$$

Denn es iſt $\frac{12}{\not 5} \cdot \frac{\not 5}{4} = \frac{15}{\not 6} \cdot \frac{\not 6}{5} = 3$ (§. 76.)

7) Durch Erhebung aller Glieder zu Quadrat- oder Kubikzahlen.

$$4^2 : 12^2 = 5^2 : 15^2$$

d. i. $16 : 144 = 15 : 225$

Ferner $4^3 : 12^3 = 5^3 : 15^3$ } (§. 171. oder
d. i. $64 : 1728 = 125 : 3375$ } §. 175.)

8) Durch Ausziehung der Quadrat- oder Kubikwurzeln aus allen Gliedern.

$$\sqrt{4} : \sqrt{12} = \sqrt{5} : \sqrt{15}$$

Ferner $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{15}$

Damit man dieſe letzte Veränderung noch faßlicher finde, lege man folgende richtige geometriſche Proportion zum Grunde:

1) Bei den Quadratwurzeln

$$1 : 4 = 9 : 36$$
$$\sqrt{1} : \sqrt{4} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$$

d. i. $1 : 2 = 3 : 6$ (§. 171. oder §. 175.)

2) Bei den Kubikwurzeln

$$1 : 8 = 27 : 216$$
$$\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{216}$$

d. i. $1 : 2 = 3 : 6$ (§. 171. od. §. 175.)

Anmer-

Anmerkung.

Da ſich alle Rechnungsaufgaben, ſo wie ſehr viele geometriſche Sätze auf Verhältniſſe und Proportionen gründen, ſo iſt dieſe Lehre hier etwas ausgedehnter und vollſtändiger behandelt worden. Den Nutzen wird der praktiſche Forſtbediente in der Anwendung finden.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten geometriſchen Verhältniſſen und Proportionen.

§. 180.

Werden die gleichnamigen Glieder **zweier** oder mehrerer geometriſchen Verhältniſſe mit einander **multiplicirt**: ſo heißt das Verhältniß ſolcher Produkte aus den einzelnen Faktoren, ein **zuſammengeſetztes Verhältniß**. So iſt (1. 2. 3) : (4. 5. 6) oder 6 : 120 zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen 1 : 4, 2 : 5, 3 : 6. oder allgemein, $ace : bdf$ iſt aus $a : b$, $c : d$, $e : f$ zuſammengeſetzt.

Sind die einzelnen Verhältniſſe, aus welchen das zuſammengeſetzte beſteht, ſo viel ihrer auch ſind, **alle einander gleich** (§. 154.), ſo heißt das **Zuſammengeſetzte ein ſo vielmal multiplicirtes Verhältniß**, als die **Anzahl der einzelnen Verhältniſſe**, welche alsdenn **ſubmultiplicirte** heißen, beträgt.

Iſt das multiplicirte Verhältniß aus **zwei** gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt, ſo wird es ein **quadratiſches**; iſt es aber aus **drei** gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt, ein **kubiſches** Verhältniß genannt.

Demnach wenn **allgemein**

$$\begin{array}{l} m : n = a : b \\ o : p = a : b \\ \hline \end{array}$$

ſo iſt $mo : np = a^2 : b^2$ ein **quadratiſches**;

 wenn

wenn aber $m : n = a : b$
$o : p = a : b$
$p : q = a : b$

ſo iſt $mop : npq = a^3 : b^3$ ein **kubiſches Verhältniß**.

Eben ſo in **Zahlen**, wenn
$1 : 2 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$

ſo iſt $3 : 12 = 1^2 : 2^2$ ein **quadratiſches**,

wenn aber $1 : 2 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$
$4 : 8 = 1 : 2$

ſo iſt $12 : 96 = 1^3 : 2^3$ ein **kubiſches Verhältniß**.

3 : 12 aber heißt nur inſofern ein quadratiſches Verhältniß, inſofern es aus 1 : 2 und 3 : 6 durch die Multiplikation der gleichnamigen Glieder entſtanden iſt. Aus eben dem Grunde heißt auch nur das Verhältniß 12 : 96 ein kubiſches Verhältniß.

§. 181.

Solche zuſammengeſetzte Verhältniſſe kommen auch bei der Vergleichung der Maße in der Geometrie vor. So iſt, wenn

1) beim **Längenmaße**

Ruthe : Fuß = 10 : 1
Fuß : Zoll = 10 : 1
Zoll : Linie = 10 : 1
Linie : Skrupel = 10 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 100 : 1
Ruthe : Linie = 1000 : 1
Ruthe : Skrupel = 10000 : 1.

2) beim

2) beim Quadratmaße

Ruthe : Fuß = 100 : 1
Fuß : Zoll = 100 : 1
Zoll : Linie = 100 : 1
Linie : Skrupel = 100 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 10000 : 1
Ruthe : Linie = 1000000 : 1
Ruthe : Skrupel = 100000000 : 1.

3) beim Kubikmaße

Ruthe : Fuß = 1000 : 1
Fuß : Zoll = 1000 : 1
Zoll : Linie = 1000 : 1
Linie : Skrupel = 1000 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 1000000 : 1
Ruthe : Linie = 1000000000 : 1
Ruthe : Skrupel = 1000000000000 : 1.

Anmerkung.

Die zuſammengeſetzten Verhältniſſe im Allgemeinen liegen den zuſammengeſetzten Rechnungsregeln der praktiſchen Arithmetik zum Grunde. Anwendungen der quadratiſchen und kubiſchen Verhältniſſe kommen bei der Beſtimmung der Verhältniſſe der Flächen und körperlichen Inhalte gegen einander in der Geometrie vor.

§. 182.

Der Exponent eines zuſammengeſetzten Verhältniſſes iſt dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältniſſe gleich.

Geben 1 : 2, 3 : 6, 4 : 8 das Verhältniß 12 : 96 durch die Zuſammenſetzung, und es iſt $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, ſo hat man, weil 1 . 2 = 2, 3 . 2 = 6, 4 . 2 = 8, anſtatt

(1

(1.3.4) : (2.6.8) das eben ſo große Verhältniß (1.3.4) : (1.2.3.2 4.2), deſſen Exponent 2.2.2 iſt, weil $\frac{1.2.3.2\ 4.2}{1.3.4} = 2.2.2 = 8$ iſt.

Auf eine ähnliche Art laſſen ſich alle hieher gehörige Fälle beweiſen.

§. 183.

Macht man davon auf quadratiſche und kubiſche Verhältniſſe beſondere Anwendungen, ſo findet man, daß der Exponent eines quadratiſchen Verhältniſſes die Quadratzahl, der Exponent eines kubiſchen Verhältniſſes aber, die Kubikzahl vom Exonent der einfachen Verhältniſſe iſt.

So ſind z. B. 1 : 2, 3 : 6 einfache;

(1.3) : (2.6) oder 3 : 12 aber iſt ein quadratiſches Verhältniß, deſſen Exponent 4 iſt. Die Zahl 4 aber iſt die Quadratzahl von 2, und 2 iſt der Exponent der einfachen Verhältniſſe.

1 : 2, 3 : 6, 4 : 8 ſind einfache.

(1.3.4) : (2.6.8) oder 12 : 96 aber iſt (wie §. 182.) ein kubiſches Verhältniß, deſſen Exponent 8 iſt. Die Zahl 8 aber iſt die Kubikzahl von 2, und 2 iſt der Exponent der einfachen Verhältniſſe.

§. 184.

Auf eine ähnliche Art kann man auch Anwendungen auf die Verhältniſſe der Einheit ſo wohl zur Quadrat- als auch zur Kubikwurzel machen. Iſt 1 das vordere, 4 das hintere Glied eines quadratiſchen Verhältniſſes,

ſo

ſo iſt $\sqrt{1} : \sqrt{4}$ das Verhältniß der Einheit zur Quadratwurzel. Da nun der Exponent des Verhältniſſes 1 : 4, die Zahl 4, der Exponent von $\sqrt{1} : \sqrt{4}$ oder $1 : \sqrt{4}$, die Zahl 2 iſt, ſo iſt überhaupt der Exponent der Einheit zur Quadratwurzel, die Quadratwurzel des Exponenten des Verhältniſſes der Einheit zur Quadratzahl.

Iſt aber 1 das Vorder- und 8 das Hinterglied eines kubiſchen Verhältniſſes, ſo iſt $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8}$ das Verhältniß der Einheit zur Kubikwurzel. Da nun der Exponent des Verhältniſſes 1 : 8, die Zahl 8, der Exponent von $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8}$ oder $1 : \sqrt[3]{8}$ die Zahl 2 iſt, ſo iſt auch hier überhaupt der Exponent der Einheit zur Kubikwurzel, die Kubikwurzel des Exponenten des Verhältniſſes der Einheit zur Kubikzahl.

Anmerkung.

Einfache Verhältniſſe und Quotienten können als gleichbedeutend, aber zuſammengeſetzte Verhältniſſe und Quotienten dürfen nicht als gleichbedeutend angeſehen werden.

§. 185.

Zuſammengeſetzte Proportionen entſtehen, wenn man die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer gegebenen Proportionen von einerlei oder verſchiedenen Exponenten multiplicirt oder dividirt. Solche Produkte oder Quotienten ſtehen alsdenn in zuſammengeſetzten Proportionen gegen die einfachen, woraus ſie entſtanden.

Es ſei $a : ae = b : be$
$c : cE = d : dE$

ſo

ſo iſt $ac : aceE = bd : bdeE$ weil $\frac{aceE}{ac} = \frac{bdeE}{bd}$ $= eE$; auch iſt $\frac{a}{c} : \frac{ae}{cE} = \frac{b}{d} : \frac{be}{dE}$, weil $\frac{ae}{cE} \cdot \frac{c}{a} = \frac{be}{dE} \cdot \frac{d}{b}$ (§. 87.) $= \frac{e}{E}$. In Zahlen:

$$\begin{array}{rl} \text{wenn } & 6 : 12 = 10 : 20 \\ & 3 : 9 = 5 : 15 \\ \hline & 18 : 108 = 50 : 300 \end{array}$$

Die zuſammengeſetzte 18 : 108 = 50 : 300 Proportion durch Multiplikation;

$$\begin{array}{rl} \text{wenn } & 6 : 12 = 10 : 20 \\ & 3 : 9 = 5 : 15 \\ \hline \end{array}$$

Die zuſammengeſetzte $\frac{6}{3} : \frac{12}{9} = \frac{10}{5} : \frac{20}{15}$ Proport. durch Diviſion.

Denn es iſt auch hier

$$\frac{12}{9} \cdot \frac{3}{6} = \frac{20}{15} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{3} \text{ (§. 87.).}$$

Bei dieſer Zuſammenſetzung der Proportionen treten Fälle ein, bei welchen verſchiedene Abkürzungen Statt finden, die hier durch Zahlenbeiſpiele kurz angezeigt werden ſollen.

§. 186.

Werden zwei Proportionen durch die Multiplikation der Glieder zuſammengeſetzt, und es iſt ein Hinterglied der einen, einem Vordergliede der andern gleich; oder es ſind die beiden Hinterglieder der einen, den beiden Vordergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen, den äuſſern Gliedern der andern gleich: ſo können die gleichen Glieder bei der Zuſammenſetzung weggelaſſen oder ausgeſtrichen werden.

Iſt

Iſt 1) $2 : 4 = 3 : 6$
$5 : 15 = 6 : 18$

$(2.5 : (4.15 = 3 : 18$
d. i. $10 : 60 = 3 : 18$

2) $2 : 4 = 3 : 6$
$4 : 12 = 6 : 18$

$2 : 12 = 3 : 18$

3) $2 : 4 = 3 : 6$
$4 : 12 = 1 : 3$

$2 : 12 = 1 : 6$

Anmerkung.

Auſſer dieſen ſind in der **zuſammengeſetzten Proportion** auch noch die Abkürzungen erlaubt, die ſich auf die **Abkürzung der Verhältniſſe**, folglich auf §. 160 gründen; demnach wäre die zuſammengeſetzte Proportion in No. 1. $10 : 60 = 3 : 18$ gleich $1 : 6 = 1 : 6$; die in No. 2. $2 : 12 = 3 : 18$ gleich $1 : 6 = 1 : 6$; die in No. 3 aber, $2 : 12 = 1 : 6$ ebenfalls $1 : 6 = 1 : 6$. Da das Verhältniß $1 : 6$ in den Proportionen aller Fälle vorkommt, ſo iſt man überzeugt, daß die **zuſammengeſetzten, aber abgekürzten Proportionen, richtig** ſind.

§. 187.

Wenn in zwei Proportionen die **Hinterglieder** der einen, den **Hintergliedern** der andern, oder die **mittlern Glieder** der einen, den **mittlern Gliedern** der andern **gleich** ſind: ſo können die **gleichen Glieder** bei der Zuſammenſetzung **weggelaſſen** werden, und es ſind im **erſten Falle** die **Vorderglieder** den **Vordergliedern proportionirt**; im **zweiten Falle** aber die **Vorderglieder** den **Hintergliedern umgekehrt proportionirt**.

Iſt

Iſt 1)
$$\begin{array}{r} 2 : 4 = 3 : 6 \\ 12 : 4 = 18 : 6 \\ \hline 2 : 12 = 3 : 18 \end{array}$$
(§. 186. No. 2).

2)
$$\begin{array}{r} 2 : 4 = 3 : 6 \\ 12 : 4 = 3 : 1 \\ \hline 2 : 12 = 1 : 6 \end{array}$$
(§. 186. No. 3).

Anmerkung.

Umgekehrt proportionirt ſind hier $2 : 12 = 1 : 6$, weil man nicht im Verhältniß $1 : 6$ von dem Hinterglied der erſten Proportion, auf das Hinterglied der zweiten, ſondern gerade dem Verhältniſſe $2:12$, wo dieſes Statt findet, entgegengeſetzt, oder umgekehrt, ſchließt. Ueberhaupt aber ſind zwei Größen zwei andern umgekehrt proportionirt, wenn das eine Paar die äuſſern, das andere Paar aber die mittlern Glieder der Proportion giebt. Sonach wären die Faktoren der Produkte $2 . 6 = 1 . 12$ einander umgekehrt proportionirt, weil $2 : 12 = 1 : 6$ (§. 173).

§. 188.

Hat man zwei Proportionen von einerlei Exponenten, ſo geben ſie durch Addition oder Subtraktion der gleichnamigen Glieder eine neue zuſammengeſetzte, aber dennoch eine richtige Proportion.

Sind
$$\begin{array}{l} 2 : 4 = 3 : 6 \\ 6 : 10 = 6 : 12 \end{array}$$
gegeben;

ſo iſt $2 \mp 5 : 4 \mp 10 = 3 \mp 6 : \mp 12$ die neue, entweder durch Addition (+) oder Subtraktion (—) zuſammengeſetzte Proportion.

Da nun $2 + 5 = 7$; $4 + 10 = 14$; $3 + 6 = 9$; $6 + 12 = 18$, ſo iſt $7 : 14 = 9 : 18$ eine richtige Proportion (§. 175).

Eben

Eben ſo, da 2 — 5 = 3; 4 — 10 = 6; 3 — 6 = 3; 6 — 12 = 6, ſo iſt auch 3 : 6 = 3 : 6 eine richtige Proportion.

Iſt 2 : 4 = 1 : 2
3 : 6 = 1 : 2
5 : 10 = 1 : 2

ſo iſt auch
$(2+3+5):(4+6+10)=(1+1+1):(2+2+2)$.
d. i. 10 : 20 = 3 : 6

Dividirt man das Verhältniß 3 : 6 in beiden Gliedern mit dem Vordergliede 3, ſo iſt 3 : 6 = 1 : 2;

alſo auch 10 : 20 = 1 : 2.

Anmerkung.

Dieſe durch Addition oder Subtraktion zuſammengeſetzten Proportionen kommen in der Geometrie vor, wenn man das Verhältniß des Umfangs der einen Figur zum Umfange der andern Figur ſucht.

§. 189.

Sind die Exponenten zweier Proportionen ungleich, ſo erhält man durch Addition oder Subtraktion der gleichnamigen Glieder, nur alsdann eine neue richtige Proportion, wenn die Vorderglieder den Vordergliedern in den gegebenen beiden Proportionen proportionirt ſind, d. i. wenn dieſe eine Proportion geben.

Sind 5 : 10 = 6 : 12
15 : 60 = 18 : 72 gegeben,
(und es iſt 5 : 15 = 6 : 18 (§. 175.)
ſo iſt $5+15:10+60=6+18:12+72$
d. i. 20 : 70 = 24 : 84 (§. 175).

Achtes Kapitel.

Anwendung der theoretiſchen Arithmetik, beſonders aber der Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen auf die im Forſtweſen und im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle.

Erſter Abſchnitt.

Anwendung der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen.

§. 190.

Unter allen Lehren der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen kömmt dieſe im praktiſchen Rechnungsweſen am häufigſten vor: Ein Mittel oder einen Durchſchnitt zu machen, welcher Fall eintritt, wenn entweder von einerlei Sache verſchiedene Werthe angegeben werden, wovon man keinen zu wählen irgend einen Grund hat; oder wenn von verſchiednen Sachen Werthe angegeben werden, die ſie zu verſchiedenen Zeiten haben, und auch dazu keine Urſache vorhanden iſt, den Werth der Sachen zu einer gewiſſen Zeit als Regel zu wählen und dergl. Fälle mehr. In allen dieſen und andern Fällen verlangt man einen mittlern Werth zu wiſſen, der ſich bei der Verſchiedenheit der Sachen und ihrer Werthe, oder bei der Verſchieden-

ſchiedenheit der Werthe in verſchiedenen Zeiten auf etwas beſtimmtes bezieht, und nach welchem man alles zuſammen nach einerlei Werth, der aber von keiner Sache der wahre iſt, angiebt.

§. 191.

Aufgabe.

Aus zwei, drei und mehreren gegebenen oder bekannten Werthen, den mittlern Werth, das Mittel oder einen Durchſchnitt zu finden.

Auflöſung.

Man addirt die gegebenen Zahlen, und dividirt die Summe durch die Zahl, die angiebt, wie groß die Anzahl der gegebnen (Werthe) iſt.

Sind z. B. 12, 15, 24 gegeben, und man verlangt das Mittel dieſer drei Zahlen, ſo iſt es $\frac{12+15+24}{3}$ $= \frac{51}{3} = 17.$

Der Grund des Verfahrens läßt ſich aus §. 170. herleiten.

Anwendung.

§. 192.

Ein Förſter hat in vier verſchiedenen Schlägen Saamenfichten ſtehen laſſen, und zwar im Schlage N. I. 60 Stück; in N. II. 80 Stück; in N. III. 120 Stück; in N. IV. 96; die Frage iſt, wie viel im Mittel oder im Durchſchnitte auf jeden Schlag gerechnet werden?

gefundene Differenz und den Quotient nennt man beide den Verhältnißnamen.

Anmerkung.

Die arithmetiſchen Verhältniſſe kommen allein in der Arithmetik, die geometriſchen aber außer in der Geometrie, auch in allen mathematiſchen Wiſſenſchaften vor, die ſich auf Geometrie gründen.

I.

Arithmetiſche Verhältniſſe.

§. 155.

Arithmetiſche Verhältniſſe werden durch die Differenz beſtimmt und heißen zunehmende, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; im Gegentheile aber abnehmende. Das bei den arithmetiſchen Verhältniſſen eingeführte Zeichen, iſt das Zeichen der Subtraktion (—) und wird zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 — 7; 5 — 9 zunehmende,
aber 7 — 4; 9 — 5 abnehmende Verhältniſſe.

Kurz lieſt man dieſe Verhältniſſe ſo: 4 zu 7; 5 zu 9; 7 zu 4; 9 zu 5, d. i. 4 iſt um 3 kleiner als 7; 5 um 4 kleiner als 9. 7 aber um 3 größer als 4; 9 um 4 größer als 5. 3 und 4 ſind die Differenzen.

Man ſieht hieraus, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt als die Summe des Vordergliedes und der Differenz des Verhältniſſes; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe iſt das Vorderglied ſo groß als die Summe des Hintergliedes, und die Differenz des Verhältniſſes.

Hier-

Hiernach kann man die arithmetiſchen Verhältniſſe auch allgemein ſo bezeichnen: Es ſei a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes und d die Differenz, ſo iſt $a+d$ das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß $a-(a+d)$. Iſt nun $a+d$ das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt $(a+d)-d=a$, das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß $(a+d)-a$.

§. 154.

Alle arithmetiſchen Verhältniſſe, die einerlei, d. i. gleich große Differenzen haben, ſind einander gleich, und können alſo auch für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe $3-5$, $7-9$; $9-7$, $6-4$ einander gleich, weil ſie insgeſammt die Differenz 2 haben.

Demnach ſind arithmetiſche Verhältniſſe gleiche Verhältniſſe, wenn ſie gleiche Differenzen haben; umgekehrt, arithmetiſche gleiche Verhältniſſe haben gleich große Differenzen.

§. 155.

Zwei arithmetiſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich.

Iſt $8-11$ wie $1-4$, und
$9-12$ wie $1-4$

$8-11$ wie $9-12$

II.

Geometriſche Verhältniſſe.

§. 156.

Geometriſche Verhältniſſe werden durch den Quotient, der hier Exponent des Verhältniſſes heißt, beſtimmt und werden zunehmende genannt, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; findet aber

gefundene Differenz und den Quotient nennt man beide den Verhältnißnamen.

Anmerkung.

Die arithmetiſchen Verhältniſſe kommen allein in der Arithmetik, die geometriſchen aber außer in der Geometrie, auch in allen mathematiſchen Wiſſenſchaften vor, die ſich auf Geometrie gründen.

I.

Arithmetiſche Verhältniſſe.

§. 155.

Arithmetiſche Verhältniſſe werden durch die Differenz beſtimmt und heißen zunehmende, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; im Gegentheile aber abnehmende. Das bei den arithmetiſchen Verhältniſſen eingeführte Zeichen, iſt das Zeichen der Subtraktion (—) und wird zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 — 7; 5 — 9 zunehmende,
aber 7 — 4; 9 — 5 abnehmende Verhältniſſe.

Kurz lieſt man dieſe Verhältniſſe ſo: 4 zu 7; 5 zu 9; 7 zu 4; 9 zu 5, d. i. 4 iſt um 3 kleiner als 7; 5 um 4 kleiner als 9. 7 aber um 3 größer als 4; 9 um 4 größer als 5. 3 und 4 ſind die Differenzen.

Man ſieht hieraus, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt als die Summe des Vordergliedes und der Differenz des Verhältniſſes; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe iſt das Vorderglied ſo groß als die Summe des Hintergliedes, und die Differenz des Verhältniſſes.

Hier-

Hiernach kann man die arithmetiſchen Verhältniſſe auch allgemein ſo bezeichnen: Es ſei a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes und d die Differenz, ſo iſt a + d das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß a — (a + d). Iſt nun a + d das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt (a + d) — d = a, das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß (a + d) — a.

§. 154.

Alle arithmetiſchen Verhältniſſe, die einerlei, d. i. gleich große Differenzen haben, ſind einander gleich, und können alſo auch für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe 3 — 5, 7 — 9; 9 — 7, 6 — 4 einander gleich, weil ſie insgeſammt die Differenz 2 haben.

Demnach ſind arithmetiſche Verhältniſſe gleiche Verhältniſſe, wenn ſie gleiche Differenzen haben; umgekehrt, arithmetiſche gleiche Verhältniſſe haben gleich große Differenzen.

§. 155.

Zwei arithmetiſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind auch unter ſich gleich.

Iſt 8 — 11 wie 1 — 4, und
9 — 12 wie 1 — 4

8 — 11 wie 9 — 12

II.

Geometriſche Verhältniſſe.

§. 156.

Geometriſche Verhältniſſe werden durch den Quotient, der hier Exponent des Verhältniſſes heißt, beſtimmt und werden zunehmende genannt, wenn das Vorderglied kleiner iſt, als das Hinterglied; findet aber

das Gegentheil Statt, ſo heißen ſie abnehmende Verhältniſſe. Das Zeichen der geometriſchen Verhältniſſe iſt das Zeichen der Diviſion (:) und wird (wie §. 153.) zwiſchen beide Glieder des Verhältniſſes geſetzt.

So ſind z. B. 4 : 12; 5 : 15 zunehmende, aber 12 : 4; 15 : 5 abnehmende Verhältniſſe. Der Sinn des Verhältniſſes wird ſo ausgedrückt: 4 zu 12; 5 zu 15; 12 zu 4; 15 zu 5. d. i. 4 iſt in 12 dreimal, 5 in 15 dreimal enthalten; eben ſo enthält 12 das Glied 4 dreimal, 15 das Glied 5 dreimal. 3 iſt hier der Exponent.

Aus dieſem ergiebt ſich, daß in einem zunehmenden Verhältniſſe, das Hinterglied ſo groß iſt, als das Produkt des Vordergliedes in den Exponent; und umgekehrt, in einem abnehmenden Verhältniſſe, iſt das Vorderglied ſo groß, als das Produkt des Hintergliedes in den Exponent.

Hiernach kann man die geometriſchen Verhältniſſe allgemein ſo bezeichnen. Es ſey a das Vorderglied eines zunehmenden Verhältniſſes, und e der Exponent, ſo iſt ae das Hinterglied, folglich das zunehmende Verhältniß a : ae. Iſt nun ae das Vorderglied eines abnehmenden Verhältniſſes, ſo iſt (ae : e) = a das Hinterglied, folglich das abnehmende Verhältniß ae : a.

§. 157.

Läßt ſich der Exponent eines Verhältniſſes, weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau ausdrücken, ſo iſt das Verhältniß ein Irrationalverhältniß und der Exponent ſelbſt eine Irrationalzahl. Ein ſolches Verhältniß entſteht allemal, wenn eins von beiden, oder beide Glieder Irrationalzahlen ſind.

Dergleichen Verhältniſſe ſind z. B. $\sqrt{2} : 8$; $\sqrt[3]{2} : 8$, denn $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ ſind Irrationalzahlen, weil jede unvollkom-

vollkommene Quadrat- und Kubikzahl, wie 2 eine irrationale Wurzel hat. Indeß kann man den Exponent eines ſolchen irrationalen Verhältniſſes dennoch ſo weit in Decimalſtellen finden, als es die Richtigkeit der Rechnung verlangt.

§. 158.

Alle geometriſchen Verhältniſſe ſind gleich, die gleichgroße oder einerlei Exponenten haben, und können für einander geſetzt werden. So ſind die Verhältniſſe 4:12, 5:15, 9:3, 18:6 einander gleich, weil ſie ſämmtlich den Exponent 3 haben.

Demnach kann man von der Gleichheit der Exponenten auf die Gleichheit der Verhältniſſe; umgekehrt, aber auch von der Gleichheit der Verhältniſſe, auf die Gleichheit der Exponenten ſchließen.

§. 159.

Auch zwei geometriſche Verhältniſſe, die einem dritten gleich ſind, ſind unter ſich gleich.

Iſt 4 : 12 wie 1 : 3, und
5 : 15 wie 1 : 3
―――――――――
4 : 12 wie 5 : 15

Hier iſt das dritte Verhältniß, nämlich 1 : 3 gewiſſermaßen das Maßverhältniß.

§. 160.

Wenn man die beiden Glieder eines geometriſchen Verhältniſſes, etwa a:b, mit einerlei Zahl, ſie heiße x (x kann jede ganze Zahl, aber auch jeden Bruch bezeichnen) multiplicirt oder dividirt, ſo verhalten ſich im erſten Falle die Produkte wie die Multiplikanda;

im

im zweiten Falle aber, die Quotienten wie die Dividenda.

1) Durch Multiplikation. Iſt a:b das Verhältniß, ſo iſt der Exponent $\frac{b}{a}$, und $ax : bx = \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ (§.65.). In Zahlen. Es ſei das Verhältniß 3:6; der Multiplikator ſei 4; alſo iſt 3.4:6.4=3:6 (§.65.). Denn 3.4 = 12, 6.4 = 24. Nun iſt 12:24 wie 3:6, weil beide Verhältniſſe den Exponent 2 haben (§.158.).

2) Durch Diviſion. Iſt a:b das Verhältniß, ſo iſt der Exponent ebenfalls $\frac{b}{a}$ und $\frac{a}{x} : \frac{b}{x}$ iſt gleich $\frac{a}{x} . \frac{x}{b}$ (§.87.) $= \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ (§.65.). In Zahlen. Es ſei das Verhältniß 12:24; der Diviſor ſei 4; alſo iſt $\frac{12}{4} : \frac{24}{4} = 3:6$ (§.65.). Denn $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{24}{4} = 6$. Nun iſt 3:6 wie 12:24, weil auch hier beide Verhältniſſe einerlei Exponent, nämlich die Zahl 2 haben (§.158.).

§. 161.

Hieraus ergiebt ſich der Vortheil, Verhältniſſe durch ihre kleinſten Zahlen auszudrücken, wenn man nämlich beide Glieder deſſelben mit dem kleinſten Gliede dividirt. Eine ſolche Diviſion macht, daß die Verhältniſſe allemal ein Glied erhalten, welches Eins heißt, und das andere giebt zugleich den Exponent des Verhältniſſes; daher bedient man ſich dieſes Mittels, verſchiedene Verhältniſſe in Abſicht ihrer Größe mit einander zu vergleichen.

So

So ſind die Verhältniſſe $7:22 = 1:3{,}142857..$
$113:355 = 1:3{,}141592..$
$100:314... = 1:314...$

Auch kann man durch Hülfe des Satzes in §. 160. Verhältniſſe, deren Glieder Brüche ſind, in ſolche verwandeln, deren Glieder durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. So iſt z. B.

$\frac{3}{4}:\frac{5}{9}$ einerlei mit $\frac{3}{4}.\frac{9}{9}:\frac{5}{9}.\frac{4}{4}$ oder $\frac{27}{36}:\frac{20}{36} = 27:20$.

Eben ſo iſt $4:\frac{2}{5} = \frac{4}{1}:\frac{2}{5}$ einerlei mit $\frac{4}{1}.\frac{5}{5}:\frac{2}{5}.\frac{1}{1}$ oder $\frac{20}{5}:\frac{2}{5} = 20:2$ oder $10:1$.

Zweiter Abſchnitt.

Von den Proportionen.

§. 162.

Die *Gleichheit* zweier Verhältniſſe heißt eine *Proportion*, und dieſe Gleichheit wird aus dem Verhältnißnamen erkannt. Die Proportion iſt entweder *arithmetiſch* oder *geometriſch*, je nachdem die Verhältniſſe arithmetiſch oder geometriſch ſind. Die vier Zahlen oder Glieder, die eine Proportion ausmachen, unterſcheidet man auf folgende Art. Das *erſte* und *vierte* Glied, heißen zuſammen die *äußern*; das *zweite* und *dritte* aber, die *mittlern Glieder*. Unter *gleichnamigen* Gliedern begreift man entweder die Vorderglieder, oder die *Hinterglieder einer Proportion*. Uebrigens ſind die Proportionen entweder *zunehmende*, wenn die Verhältniſſe zunehmende ſind, oder *abnehmende Proportionen*, wenn die Verhältniſſe abnehmende Verhältniſſe ſind. Die Differenz der Verhältniſſe bei den arithmetiſchen, heißt hier *Differenz der Proportion*, ſo wie der Exponent bei den geometriſchen, *Exponent der Proportion* heißt.

Allgemein werden die Proportionen ſo bezeichnet:

1) Arithmetiſche:

$$a - (a+d) = b - (b+d) \text{ zunehmende}$$
$$(a+d) - a = (b+d) - b \text{ abnehmende;}$$

2) Geometriſche:

$$a : ae = b : be \text{ zunehmende}$$
$$ae : a = be : b \text{ abnehmende Proportion;}$$

In Zahlen iſt, wenn $a = 2$, $b = 8$, $d = 4$ geſetzt wird:

$$2 - (2+4) = 8 - (8+4) \text{ oder}$$
$$2 - 6 = 8 - 12 \text{ eine zunehmende;}$$
$$(2+4) - 2 = (8+4) - 8 \text{ oder}$$
$$6 - 2 = 12 - 8$$ eine abnehmende arithmetiſche Proportion.

Iſt $a = 2$, $b = 6$, $e = 4$, ſo iſt

$$2 : (2.4) = 6 : (6.4) \text{ oder}$$
$$2 : 8 = 6 : 24 \text{ eine zunehmende;}$$
$$(2.4) : 2 = (6.4) : 6 \text{ oder}$$
$$8 : 2 = 24 : 6$$ eine abnehmende geometriſche Proportion. Allgemein drückt man durch Worte den Sinn einer Proportion ſo aus: Wie das erſte Glied zum zweiten, ſo das dritte zum vierten.

§. 163.

Die Proportionen ſind der Form nach zweierlei, ſtäte und unſtäte; ſtäte Proportionen ſind ſolche, bei welchen die mittlern Glieder gleich, unſtäte Proportionen aber ſolche, bei welchen die mittlern Glieder ungleich ſind. Die in §. 162. ſind unſtäte arithmetiſche und unſtäte geometriſche Proportionen. Die ſtäten werden allgemein ſo ausgedrückt:

1)

1) Arithmetiſche $a - (a+d) = (a+d) - (a+2d)$

2) Geometriſche $a : ae = ae : ae^2$, worin $ae^2 = a.e.e$ iſt.

Der Abkürzung wegen ſchreibt man dieſe Proportionen mit drei Gliedern, weil die mittlern gleich ſind, und ſondert ſie durch ein Komma von einander ab. Demnach iſt

$a, a+d, a+2d$ eine ſtäte arithmetiſche;
a, ae, ae^2 eine ſtäte geometriſche Proportion.

Setzt man $a = 2$, $d = 4$, ſo hat man
in $2, 2+4, 2+(2.4)$ oder
$2, 6, 10$ eine ſtäte arithmetiſche, aber in Zahlen ausgedrückte Proportion.

Iſt $a = 2$, $e = 4$, ſo iſt
$2, 2.4, 2.4^2$ oder
$2, 8, 32$ eine ſtäte geometriſche, aber gleichfalls in Zahlen ausgedrückte Proportion.

§. 164.

Bezeichnet $a:b = c:d$ eine geometriſche Proportion, und es iſt $a = c$, ſo muß auch $b = d$ ſeyn, d. i. wenn das erſte Glied dem dritten gleich iſt, ſo muß auch das zweite dem vierten Gliede gleich ſeyn; im Gegentheile würden die Exponenten der Verhältniſſe ungleich ſeyn, und $a:b = c:d$ würden keine Proportion ausmachen.

I.

Arithmetiſche Proportionen.

§. 165.

In jeder arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußern Glieder, der Summe der mittlern gleich.

Iſt

Iſt

$a-(a+d)=b-(b+d)$ oder $(a+d)-a=(b+d)-b$, ſo iſt

$$\underbrace{a+b+d}_{a+b+d} \qquad \underbrace{a+b+d}_{a+b+d}$$

Wird $a=6$, $b=10$, $d=4$ geſetzt, ſo iſt

$6-(6+4)=10-(10+4)$ oder $(6+4)-6=(10+4)-10$

$$\underbrace{4+6+10}_{4+6+10} \qquad \underbrace{4+6+10}_{4+6+10}$$

Da nun die einzelnen Theile dieſer Summen für ſich gleich ſind, ſo ſind auch die Summen ſelbſt gleich.

§. 166.

In jeder ſtäten arithmetiſchen Proportion iſt das doppelte mittelſte Glied ſo groß, als die Summe des erſten und dritten.

$a,\ a+d,\ a+2d$ (§. 163.)

$$\underbrace{2a+2d}_{2a+2d}$$

Iſt $a=4$, $d=3$, ſo iſt

$4-(4+3)=(4+3)-(4+(2.3))$ oder

$4,\ 7,\ 10$

$$\underbrace{2.7=14}_{10+4=14}$$

§. 167.

Es giebt demnach zwei allgemeine Kennzeichen, durch welche man die Richtigkeit einer jeden arithmetiſchen Proportion prüfen kann.

1) Die Gleichheit der Differenzen ihrer Verhältniſſe (§. 162.).

2) Die Gleichheit der Summen der äußern und mittlern Glieder (§. 165.).

Findet man eins dieſer Kennzeichen bei irgend einer arithmetiſchen Proportion, ſo findet auch das andere ſtatt.

§. 168.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Gliedern einer arithmetiſchen Proportion, das vierte zu finden.

Auflöſung.

Man addire die mittlern Glieder und ſubtrahire von der Summe das erſte Glied. Der gefundene Reſt iſt das geſuchte vierte Glied.

$$a - (a + d) = b - x$$
$$a + x = a + b + d \quad (\text{§. } 165.)$$
$$a \quad = a \quad \text{ſubtrahirt}$$
$$x = b + d$$

und es iſt $a - (a + d) = b - (b + d)$ (§. 162.).

Es ſei $a = 4$, $b = 5$, $d = 3$, ſo iſt

$4 - 7 = 5 -$ vierten Gliede.

Dieſes muß $(7 + 5) - 4 = 8$, denn $5 + 3 = 8$ (§. 153.), und es iſt $4 - 7 = 5 - 8$ (§. 167.).

§. 169.

Soll man in einer ſtäten Proportion, zu zwei gegebenen Gliedern das dritte Glied finden, und die gegebenen ſind 3 und 7, ſo iſt $7 + 7 = 14$; $14 - 3$ aber iſt $= 11$, folglich iſt die Proportion $3 - 7 = 7 - 11$; oder 3,7 , 11,

§. 170.

Aufgabe.

Zu den äußern Gliedern einer ſtäten arithmetiſchen Proportion das mittlere Glied zu finden.

Auflöſung.

Man nehme die halbe Summe der äußern Glieder, ſo hat man das mittlere Glied (§. 165.)

Iſt a und b gegeben, ſo iſt $a + b$ die Summe; $\frac{1}{2}(a+b)$ die halbe Summe, folglich das mittlere Glied, und man hat folgende Proportion: $a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b) - b$. Setzt man $a = 8$, und $b = 12$, ſo iſt auch hier $8 + 12$ die Summe $\frac{8+12}{2}$ oder 10 das mittlere Glied, und es iſt $8 - 10 = 10 - 12$.

II.

Geometriſche Proportionen.

§. 171.

In jeder geometriſchen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder, dem Produkte der mittlern gleich.

Iſt $a : ae = b : be$ oder $ae : a = be : b$, ſo iſt

abe		abe
abe		abe

Da nun die einzelnen Faktoren dieſer Produkte gleich ſind, ſo ſind die Produkte ſelbſt gleich.

Iſt $a = 4$, $b = 10$, $e = 2$, ſo iſt

$4 : 8 = 10 : 20$ oder $8 : 4 = 20 : 10$

80		80
80		80

§. 172.

§. 172.

In jeder ſtäten geometriſchen Proportion iſt das Produkt der äußern Glieder ſo groß, als die Quadratzahl des mittlern Gliedes.

Sind a und ae^2 die äußern Glieder, ſo iſt das Produkt derſelben a^2e^2, welches zugleich die Quadratzahl des mittlern Gliedes iſt; denn

$$a,\ ae,\ ae^2 \text{ (§. 163.)}$$

$$a^2e^2$$

$$a^2e^2$$

Iſt $a = 4$, $e = 2$; ſo iſt

$$4 : 8 = 8 : 16 \text{ oder } 4,\ 8,\ 16$$

$$8 \cdot 8 = 64 \qquad 8 \cdot 8 = 64$$

$$4 \cdot 16 = 64 \qquad 4 \cdot 16 = 64$$

§. 173.

Wenn zwei Produkte zweier Zahlen gleich ſind, ſo ſind die Faktoren des einen Produkts, mittlere Proportionalzahlen zwiſchen den Faktoren des andern Produkts.

Es ſei das Produkt von 4 . 6 gleich dem Produkte von 2 . 12 und es ſollen 2 und 12 mittlere Proportionalzahlen zwiſchen 4 und 6 werden, ſo werden dieſe Produkte auf folgende Art behandelt:

Es iſt $4 \,.\, 6 = 2 \,.\, 12$

$2 = 2$ dividirt.

$$\frac{4 \,.\, 6}{2} = 12$$

$6 = 6$ dividirt.

$$\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$$

Oder $4 : 2 = 12 : 6$.

§. 174.

Aus dieſem Satze folgt unmittelbar, daß zwei gleiche Produkte, ſo wie auch zwei gleiche Brüche eine geometriſche Proportion geben, wenn man im erſten Falle die beiden Faktoren des einen Produkts zu mittlern Gliedern zwiſchen den beiden Faktoren des andern Produkts macht; im zweiten Falle aber, die Zähler als Vorderglieder, die Nenner aber als Hinterglieder in die Proportion ſetzt.

§. 175.

Auch bei den geometriſchen Proportionen hat man zwei allgemeine Kennzeichen,

1) die Gleichheit der Exponenten ihrer Verhältniſſe (§. 162.)
2) die Gleichheit der Produkte der äußern und mittlern Glieder. (§. 171.)

§. 176.

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Gliedern einer geometriſchen Proportion das vierte zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

Man dividire das Produkt der mittlern Glieder durch das erſte, ſo iſt der Quotient das geſuchte vierte Glied. Dies unbekannte vierte Glied ſey x,

$$\begin{array}{rl} \text{ſo iſt} & a : ae = b : x \\ & ax = abe \text{ (§. 171.)} \\ & a = a \text{ dividirt} \\ \hline & x = be \end{array}$$

folglich $a : ae = b : be$ (§. 162.)

Iſt $a = 2$, $b = 4$, $e = 3$, ſo iſt

$$2 : 2 . 3 = 4 : x \text{ oder}$$
$$2 : 6 = 4 : x$$
$$\frac{6 . 4}{2} = \frac{24}{2} = 12, \text{ demnach iſt}$$
$$2 : 6 = 4 : 12. \text{ (§. 175.)}$$

§. 177.

Sind in einer ſtäten geometriſchen Proportion zwei Glieder gegeben, und man ſoll das dritte finden, ſo dividirt man die Quadratzahl des zweiten Gliedes durch das erſte Glied.

Sind a und ae die gegebenen Glieder, ſo iſt a^2e^2 die Quadratzahl des zweiten. Wird nun in a^2e^2 mit a dividirt, ſo iſt der Quotient ae^2, das dritte Glied, und es iſt a, ae, ae^2 oder $a : ae = ae : ae^2$.

Iſt $a = 4$ und $e = 2$, alſo $ae = 8$, ſo iſt $8^2 = 64$; $\frac{64}{4} = 16$ das dritte Glied, und man hat folgende Proportion $4 : 8 = 8 : 64$ oder $4, 8, 64$.

§. 178.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Gliedern das mittlere Glied einer ſtäten geometriſchen Proportion zu finden.

Auflöſung.

Man ſuche aus dem Produkte der beiden gegebenen, d. i. der äußern Glieder, die Quadratwurzel, ſo hat man das mittlere Glied.

Sind a und ae^2 die zwei gegebenen, alſo die äußern Glieder, ſo iſt ihr Produkt a^2e^2. Setzt man das Quadratwurzelzeichen vor, ſo zeigt dies die Quadratwurzel aus dieſem Produkte $\sqrt{a^2e^2} = \sqrt{(ae)^2}$. Da nun $\sqrt{(ae)^2} = ae$ iſt, ſo iſt ae das mittlere Glied, und die Proportion heißt $a : ae = ae : ae^2$ oder kürzer a, ae, ae^2.

Iſt $a = 2$, und $ae^2 = 32$, ſo iſt $2 . 32 = 64$ das Produkt der äußern Glieder; $\sqrt{64} = 8$ aber das mittlere, und man hat

$$2 : 8 = 8 : 64 \text{ oder } 2, 8, 64.$$

Anmerkung.

Iſt das Produkt der äußern Glieder bei dieſer Aufgabe eine unvollkommene Quadratzahl, ſo erhält man die Wurzel durch Annäherung, folglich als eine irrationale Zahl; demnach werden beide Verhältniſſe der Proportion, irrationale Verhältniſſe. Z. B. Es ſey 4 und 24 gegeben, ſo iſt $4 . 24 = 96$. $\sqrt{96}$ aber giebt eine irrationale Zahl, folglich ſind beide Verhältniſſe irrational nach der Form: $4 : \sqrt{96} = \sqrt{96} : 24$. Wie man die irrationalen Verhältniſſe behandelt, findet man weiter ausgeführt in Meinerts Lehrbuche der Mathematik Theil I. Arithmetik §. 139. Zuſatz 4, und §. 141. Zuſatz 2.

§. 179.

§. 179.

Jede allgemein a : ae = b : be oder in Zahlen ausgedrückte geometriſche Proportion 4 : 12 = 5 : 15 kann man auf mancherlei Art verändern, und es bleibt dennoch eine richtige Proportion. Die Veränderung kann geſchehen:

1) **Durch Umkehrung der Glieder**, indem man die Hinterglieder zu Vordergliedern und die Vorderglieder zu Hintergliedern macht.

$$12 : 4 = 15 : 5 \quad (\text{§. 171. oder 175.})$$

2) **Durch Verſetzung der Glieder**, indem man die beiden mittlern Glieder verwechſelt.

$$4 : 5 = 12 : 15 \quad (\text{§. 171. oder §. 175.})$$

3) **Durch Addition der Glieder**, indem man entweder zum Hintergliede in beiden Verhältniſſen das Vorderglied addirt; oder zum Vordergliede das Hinterglied, und alles übrige ungeändert läßt.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 + 4 = 5 : 15 + 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 16 = 5 : 20 \\ \text{Ferner} & 4 + 12 : 12 = 5 : 15 : 15 \\ \text{d. i.} & 16 : 12 = 20 : 15 \end{array}\right\} (\text{§. 171. od. 175.})$$

4) **Durch Subtraktion der Glieder** wie in n. 3. bei der Addition der Glieder.

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 : 12 - 4 = 5 : 15 - 5 \\ \text{d. i.} & 4 : 8 = 5 : 10 \\ \text{Ferner} & 12 - 4 : 12 = 15 - 5 : 15 \\ \text{d. i.} & 8 : 12 = 10 : 15 \end{array}\right\} (\text{§. 171. od. 175.})$$

5) **Durch Multiplikation der Glieder.**

$$\left.\begin{array}{ll} & 4 \cdot 5 : 12 \cdot 5 = 5 \cdot 6 : 15 \cdot 6 \\ \text{d. i.} & 20 : 60 = 30 : 90 \\ \text{oder} & 2 : 6 = 3 : 9 \end{array}\right\} (\text{§. 171. oder §. 175.})$$

6) Durch Diviſion der Glieder.

$$\frac{4}{5} : \frac{12}{5} = \frac{5}{6} : \frac{15}{6}$$

Denn es iſt $\frac{12}{8} \cdot \frac{8}{4} = \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{5} = 3$ (§. 76.)

7) Durch Erhebung aller Glieder zu Quadrat- oder Kubikzahlen.

$$4^2 : 12^2 = 5^2 : 15^2$$
d. i. $16 : 144 = 15 : 225$

Ferner $4^3 : 12^3 = 5^3 : 15^3$
d. i. $64 : 1728 = 125 : 3375$ (§. 171. oder §. 175.)

8) Durch Ausziehung der Quadrat- oder Kubikwurzeln aus allen Gliedern.

$$\sqrt{4} : \sqrt{12} = \sqrt{5} : \sqrt{15}$$

Ferner $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{15}$

Damit man dieſe letzte Veränderung noch faßlicher finde, lege man folgende richtige geometriſche Proportion zum Grunde:

1) Bei den Quadratwurzeln

$$1 : 4 = 9 : 36$$
$$\sqrt{1} : \sqrt{4} = \sqrt{9} : \sqrt{36}$$
d. i. $1 : 2 = 3 : 6$ (§. 171. oder §. 175.)

2) Bei den Kubikwurzeln

$$1 : 8 = 27 : 216$$

$$\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{216}$$
d. i. $1 : 2 = 3 : 6$ (§. 171. od. §. 175.)

Anmer-

Anmerkung.

Da ſich alle Rechnungsaufgaben, ſo wie ſehr viele geometriſche Sätze auf Verhältniſſe und Proportionen gründen, ſo iſt dieſe Lehre hier etwas ausgedehnter und vollſtändiger behandelt worden. Den Nutzen wird der praktiſche Forſtbediente in der Anwendung finden.

Dritter Abſchnitt.

Von den zuſammengeſetzten geometriſchen Verhältniſſen und Proportionen.

§. 180.

Werden die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer geometriſchen Verhältniſſe mit einander multiplicirt: ſo heißt das Verhältniß ſolcher Produkte aus den einzelnen Faktoren, ein zuſammengeſetztes Verhältniß. So iſt (1. 2. 3): (4. 5. 6) oder 6: 120 zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen 1:4, 2:5, 3:6. oder allgemein, $ace:bdf$ iſt aus $a:b$, $c:d$, $e:f$ zuſammengeſetzt.

Sind die einzelnen Verhältniſſe, aus welchen das zuſammengeſetzte beſteht, ſo viel ihrer auch ſind, alle einander gleich (§. 154.), ſo heißt das Zuſammengeſetzte ein ſo vielmal multiplicirtes Verhältniß, als die Anzahl der einzelnen Verhältniſſe, welche alsdenn ſubmultiplicirte heißen, beträgt.

Iſt das multiplicirte Verhältniß aus zwei gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt, ſo wird es ein quadratiſches; iſt es aber aus drei gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt, ein kubiſches Verhältniß genannt.

Demnach wenn allgemein

$$m:n = a:b$$
$$o:p = a:b$$

ſo iſt $mo:np = a^2:b^2$ ein quadratiſches;

wenn aber $m : n = a : b$
$o : p = a : b$
$p : q = a : b$

ſo iſt $mop : npq = a^3 : b^3$ ein kubiſches Verhältniß.

Eben ſo in Zahlen, wenn
$1 : 2 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$

ſo iſt $3 : 12 = 1^2 : 2^2$ ein quadratiſches,

wenn aber $1 : 2 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$
$4 : 8 = 1 : 2$

ſo iſt $12 : 96 = 1^3 : 2^3$ ein kubiſches Verhältniß.

3 : 12 aber heißt nur inſofern ein quadratiſches Verhältniß, inſofern es aus 1 : 2 und 3 : 6 durch die Multiplikation der gleichnamigen Glieder entſtanden iſt. Aus eben dem Grunde heißt auch nur das Verhältniß 12 : 96 ein kubiſches Verhältniß.

§. 181.

Solche zuſammengeſetzte Verhältniſſe kommen auch bei der Vergleichung der Maße in der Geometrie vor. So iſt, wenn

1) beim Längenmaße
Ruthe : Fuß = 10 : 1
Fuß : Zoll = 10 : 1
Zoll : Linie = 10 : 1
Linie : Skrupel = 10 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 100 : 1
Ruthe : Linie = 1000 : 1
Ruthe : Skrupel = 10000 : 1.

2) beim

2) beim Quadratmaße

Ruthe : Fuß = 100 : 1
Fuß : Zoll = 100 : 1
Zoll : Linie = 100 : 1
Linie : Skrupel = 100 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 10000 : 1
Ruthe : Linie = 1000000 : 1
Ruthe : Skrupel = 100000000 : 1.

3) beim Kubikmaße

Ruthe : Fuß = 1000 : 1
Fuß : Zoll = 1000 : 1
Zoll : Linie = 1000 : 1
Linie : Skrupel = 1000 : 1, auch

Die Ruthe : Zoll = 1000000 : 1
Ruthe : Linie = 1000000000 : 1
Ruthe : Skrupel = 1000000000000 : 1.

Anmerkung.

Die zuſammengeſetzten Verhältniſſe im Allgemeinen liegen den zuſammengeſetzten Rechnungsregeln der praktiſchen Arithmetik zum Grunde. Anwendungen der quadratiſchen und kubiſchen Verhältniſſe kommen bei der Beſtimmung der Verhältniſſe der Flächen und körperlichen Inhalte gegen einander in der Geometrie vor.

§. 182.

Der Exponent eines zuſammengeſetzten Verhältniſſes iſt dem Produkte aus den Exponenten der einfachen Verhältniſſe gleich.

Geben 1 : 2, 3 : 6, 4 : 8 das Verhältniß 12 : 96 durch die Zuſammenſetzung, und es iſt $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, ſo hat man, weil 1 . 2 = 2, 3 . 2 = 6, 4 . 2 = 8, anſtatt

(1

(1 . 3 . 4) : (2 . 6 . 8) das eben ſo große Verhältniß (1.3.4):(1.2.3.2 4.2), deſſen Exponent 2 . 2 . 2 iſt, weil $\frac{1.2.3.2.4.2}{1.3.4} = 2.2.2 = 8$ iſt.

Auf eine ähnliche Art laſſen ſich alle hieher gehörige Fälle beweiſen.

§. 183.

Macht man davon auf quadratiſche und kubiſche Verhältniſſe beſondere Anwendungen, ſo findet man, daß der Exponent eines quadratiſchen Verhältniſſes die Quadratzahl, der Exponent eines kubiſchen Verhältniſſes aber, die Kubikzahl vom Exonent der einfachen Verhältniſſe iſt.

So ſind z. B. 1:2, 3:6 einfache;

(1.3):(2.6) oder 3 : 12 aber iſt ein quadratiſches Verhältniß, deſſen Exponent 4 iſt. Die Zahl 4 aber iſt die Quadratzahl von 2, und 2 iſt der Exponent der einfachen Verhältniſſe.

1 : 2 , 3 : 6 , 4 : 8 ſind einfache.

(1 . 3 . 4) : (2 . 6 . 8) oder 12 : 96 aber iſt (wie §. 182.) ein kubiſches Verhältniß, deſſen Exponent 8 iſt. Die Zahl 8 aber iſt die Kubikzahl von 2, und 2 iſt der Exponent der einfachen Verhältniſſe.

§. 184.

Auf eine ähnliche Art kann man auch Anwendungen auf die Verhältniſſe der Einheit ſo wohl zur Quadrat- als auch zur Kubikwurzel machen. Iſt 1 das vordere, 4 das hintere Glied eines quadratiſchen Verhältniſſes, ſo

ſo iſt $\sqrt{1} : \sqrt{4}$ das Verhältniß der Einheit zur Quadratwurzel. Da nun der Exponent des Verhältniſſes 1:4, die Zahl 4, der Exponent von $\sqrt{1} : \sqrt{4}$ oder $1 : \sqrt{4}$, die Zahl 2 iſt, ſo iſt überhaupt der Exponent der Einheit zur Quadratwurzel, die Quadratwurzel des Exponenten des Verhältniſſes der Einheit zur Quadratzahl.

Iſt aber 1 das Vorder- und 8 das Hinterglied eines kubiſchen Verhältniſſes, ſo iſt $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8}$ das Verhältniß der Einheit zur Kubikwurzel. Da nun der Exponent des Verhältniſſes 1:8, die Zahl 8, der Exponent von $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8}$ oder $1 : \sqrt[3]{8}$ die Zahl 2 iſt, ſo iſt auch hier überhaupt der Exponent der Einheit zur Kubikwurzel, die Kubikwurzel des Exponenten des Verhältniſſes der Einheit zur Kubikzahl.

Anmerkung.

Einfache Verhältniſſe und Quotienten können als gleichbedeutend, aber zuſammengeſetzte Verhältniſſe und Quotienten dürfen nicht als gleichbedeutend angeſehen werden.

§. 185.

Zuſammengeſetzte Proportionen entſtehen, wenn man die gleichnamigen Glieder zweier oder mehrerer gegebenen Proportionen von einerlei oder verſchiedenen Exponenten multiplicirt oder dividirt. Solche Produkte oder Quotienten ſtehen alsdenn in zuſammengeſetzten Proportionen gegen die einfachen, woraus ſie entſtanden.

Es ſei $a : ae = b : be$
$c : cE = d : dE$

ſo

ſo iſt ac : aceE = bd : bdeE weil $\frac{aceE}{ac} = \frac{bdeE}{bd}$ $= eE$; auch iſt $\frac{a}{c} : \frac{ae}{cE} = \frac{b}{d} : \frac{be}{dE}$, weil $\frac{ae}{cE} \cdot \frac{c}{a} = \frac{be}{dE} \cdot \frac{d}{b}$ (§. 87.) $= \frac{e}{E}$. In Zahlen:

$$\begin{array}{rl} \text{wenn } & 6 : 12 = 10 : 20 \\ & 3 : 9 = 5 : 15 \\ \hline \text{Die zuſammengeſetzte } & 18 : 108 = 50 : 300 \end{array}$$

Proportion durch Multiplikation;

$$\begin{array}{rl} \text{wenn } & 6 : 12 = 10 : 20 \\ & 3 : 9 = 5 : 15 \\ \hline \text{Die zuſammengeſetzte } & \frac{6}{3} : \frac{12}{9} = \frac{10}{5} : \frac{20}{15} \end{array}$$

Proport. durch Diviſion.

Denn es iſt auch hier

$$\frac{12}{9} \cdot \frac{3}{6} = \frac{20}{15} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{3} \text{ (§. 87.)}$$

Bei dieſer Zuſammenſetzung der Proportionen treten Fälle ein, bei welchen verſchiedene Abkürzungen Statt finden, die hier durch Zahlenbeiſpiele kurz angezeigt werden ſollen.

§. 186.

Werden zwei Proportionen durch die Multiplikation der Glieder zuſammengeſetzt, und es iſt ein Hinterglied der einen, einem Vordergliede der andern gleich; oder es ſind die beiden Hinterglieder der einen, den beiden Vordergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen, den äuſſern Gliedern der andern gleich: ſo können die gleichen Glieder bei der Zuſammenſetzung weggelaſſen oder ausgeſtrichen werden.

Iſt

Iſt 1) 2 : 4 = 3 : 6
5 : 15 = 6 : 18

(2.5:(4.15 = 3 : 18
d. i. 10 : 60 = 3 : 18

2) 2 : 4 = 3 : 6
4 : 12 = 6 : 18

2 : 12 = 3 : 18

3) 2 : 4 = 3 : 6
4 : 12 = 1 : 3

2 : 12 = 1 : 6

Anmerkung.

Auſſer dieſen ſind in der zuſammengeſetzten Proportion auch noch die Abkürzungen erlaubt, die ſich auf die Abkürzung der Verhältniſſe, folglich auf §. 160 gründen; demnach wäre die zuſammengeſetzte Proportion in No. 1. 10 : 60 = 3 : 18 gleich 1 : 6 = 1 : 6; die in No. 2. 2 : 12 = 3 : 18 gleich 1 : 6 = 1 : 6; die in No. 3 aber, 2 : 12 = 1 : 6 ebenfalls 1 : 6 = 1 : 6. Da das Verhältniß 1 : 6 in den Proportionen aller Fälle vorkommt, ſo iſt man überzeugt, daß die zuſammengeſetzten, aber abgekürzten Proportionen, richtig ſind.

§. 187.

Wenn in zwei Proportionen die Hinterglieder der einen, den Hintergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen, den mittlern Gliedern der andern gleich ſind: ſo können die gleichen Glieder bei der Zuſammenſetzung weggelaſſen werden, und es ſind im erſten Falle die Vorderglieder den Vordergliedern proportionirt; im zweiten Falle aber die Vorderglieder den Hintergliedern umgekehrt proportionirt.

Iſt

Iſt 1) $2 : 4 = 3 : 6$
$12 : 4 = 18 : 6$
$2 : 12 = 3 : 18$ (§. 186. No. 2).

2) $2 : 4 = 3 : 6$
$12 : 4 = 3 : 1$
$2 : 12 = 1 : 6$ (§. 186. No. 3).

Anmerkung.

Umgekehrt proportionirt ſind hier $2 : 12 = 1 : 6$, weil man nicht im Verhältniß $1 : 6$ von dem Hinterglied der erſten Proportion, auf das Hinterglied der zweiten, ſondern gerade dem Verhältniſſe $2 : 12$, wo dieſes Statt findet, entgegengeſetzt, oder umgekehrt, ſchließt. Ueberhaupt aber ſind zwei Größen zwei andern umgekehrt proportionirt, wenn das eine Paar die äuſſern, das andere Paar aber die mittlern Glieder der Proportion giebt. Sonach wären die Faktoren der Produkte $2 . 6 = 1 . 12$ einander umgekehrt proportionirt, weil $2 : 12 = 1 : 6$ (§. 173).

§. 188.

Hat man zwei Proportionen von einerlei Exponenten, ſo geben ſie durch Addition oder Subtraktion der gleichnamigen Glieder eine neue zuſammengeſetzte, aber dennoch eine richtige Proportion.

Sind $2 : 4 = 3 : 6$
$6 : 10 = 6 : 12$ gegeben;

ſo iſt $2 \mp 5 : 4 \mp 10 = 3 \mp 6 : \mp 12$ die neue, entweder durch Addition (+) oder Subtraktion (—) zuſammengeſetzte Proportion.

Da nun $2 + 5 = 7$; $4 + 10 = 14$; $3 + 6 = 9$; $6 + 12 = 18$, ſo iſt $7 : 14 = 9 : 18$ eine richtige Proportion (§. 175).

Eben

Eben ſo, da 2 — 5 = 3; 4 — 10 = 6; 3 — 6 = 3; 6 — 12 = 6, ſo iſt auch 3 : 6 = 3 : 6 eine richtige Proportion.

Iſt $2 : 4 = 1 : 2$
$3 : 6 = 1 : 2$
$5 : 10 = 1 : 2$

ſo iſt auch

$$(2+3+5):(4+6+10)=(1+1+1):(2+2+2).$$

d. i. $10 : 20 = 3 : 6$

Dividirt man das Verhältniß 3 : 6 in beiden Gliedern mit dem Vordergliede 3, ſo iſt 3 : 6 = 1 : 2;

alſo auch 10 : 20 = 1 : 2.

Anmerkung.

Dieſe durch Addition oder Subtraktion zuſammengeſetzten Proportionen kommen in der Geometrie vor, wenn man das Verhältniß des Umfangs der einen Figur zum Umfange der andern Figur ſucht.

§. 189.

Sind die Exponenten zweier Proportionen ungleich, ſo erhält man durch Addition oder Subtraktion der gleichnamigen Glieder, nur alsdann eine neue richtige Proportion, wenn die Vorderglieder den Vordergliedern in den gegebenen beiden Proportionen proportionirt ſind, d. i. wenn dieſe eine Proportion geben.

Sind $5 : 10 = 6 : 12$
$15 : 60 = 18 : 72$ gegeben,
(und es iſt $5 : 15 = 6 : 18$ (§. 175.)
ſo iſt $5+15 : 10+60 = 6+18 : 12+72$
d. i. $20 : 70 = 24 : 84$ (§. 175).

Achtes Kapitel.

Anwendung der theoretiſchen Arithmetik, beſonders aber der Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen auf die im Forſtweſen und im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungsfälle.

Erſter Abſchnitt.

Anwendung der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen.

§. 190.

Unter allen Lehren der arithmetiſchen Verhältniſſe und Proportionen kömmt dieſe im praktiſchen Rechnungsweſen am häufigſten vor: Ein Mittel oder einen Durchſchnitt zu machen, welcher Fall eintritt, wenn entweder von einerlei Sache verſchiedene Werthe angegeben werden, wovon man keinen zu wählen irgend einen Grund hat; oder wenn von verſchiednen Sachen Werthe angegeben werden, die ſie zu verſchiedenen Zeiten haben, und auch dazu keine Urſache vorhanden iſt, den Werth der Sachen zu einer gewiſſen Zeit als Regel zu wählen und dergl. Fälle mehr. In allen dieſen und andern Fällen verlangt man einen mittlern Werth zu wiſſen, der ſich bei der Verſchiedenheit der Sachen und ihrer Werthe, oder bei der Verſchieden-

ſchiedenheit der Werthe in verſchiedenen Zeiten auf etwas beſtimmtes bezieht, und nach welchem man alles zuſammen nach einerlei Werth, der aber von keiner Sache der wahre iſt, angiebt.

§. 191.

Aufgabe.

Aus zwei, drei und mehreren gegebenen oder bekannten Werthen, den mittlern Werth, das Mittel oder einen Durchſchnitt zu finden.

Auflöſung.

Man addirt die gegebenen Zahlen, und dividirt die Summe durch die Zahl, die angiebt, wie groß die Anzahl der gegebnen (Werthe) iſt.

Sind z. B. 12, 15, 24 gegeben, und man verlangt das Mittel dieſer drei Zahlen, ſo iſt es $\frac{12+15+24}{3}$ $= \frac{51}{3} = 17$.

Der Grund des Verfahrens läßt ſich aus §. 170. herleiten.

Anwendung.

§. 192.

Ein Förſter hat in vier verſchiedenen Schlägen Saamenfichten ſtehen laſſen, und zwar im Schlage N. I. 60 Stück; in N. II. 80 Stück; in N. III. 120 Stück; in N. IV. 96; die Frage iſt, wie viel im Mittel oder im Durchſchnitte auf jeden Schlag gerechnet werden?

In N. I.	ſtehen	60	St.
— N. II.	—	80	—
— N. III.	—	120	—
— N. IV.	—	96	—
Alſo zuſammen		356	Stück.

Werden dieſe nun gleichförmig unter die vier Schläge vertheilt, ſo kommen auf jeden Schlag $\frac{356}{4}$ oder 89 Stück.

Ferner: Ein Jäger probirt eine Jagdflinte, und findet, daß ſie auf den 1ten Schuß 150, auf den 2ten 230, und auf den 3ten Schuß 180 Schritte trägt; Man will wiſſen, auf wie viel Schritte man im Durchſchnitte nach dieſer Probe rechnen könne?

N. 1	beträgt	150	Schritte
— 2	—	230	—
— 3	—	180	—
Alſo zuſammen		560	Schritte.

Dieſe 560 Schritte durch die Anzahl der Probeſchüſſe dividirt, und man erhält das Mittel oder $\frac{560}{3}$ $= 186\frac{2}{3}$ Schritte im Durchſchnitte.

Ein Förſter hat jährlich eine gewiſſe, aber unbeſtimmte Einnahme an Stammgeld; nun hat er dieſe durch 5 Jahre gehabt: Man verlangt zu wiſſen, wie viel auf jedes Jahr im Durchſchnitte kommt? Geſetzt die Einnahme des erſten Jahres wäre 15 rthlr. die des zweiten 18 rthlr. 16 gl. die des dritten 14 rthlr. 4 gl. die des vierten 16 rthlr. die des fünften Jahres aber

aber 20 rthlr. 8 gl. geweſen: wie viel Thaler und Groſchen kommen nun aufs Jahr?

Das 1te Jahr betrug die Einnahme	15 rthlr.	— gl.
— 2te — — — —	18 —	6 —
— 3te — — — —	14 —	4 —
— 4te — — — —	16 —	— —
— 5te — — — —	20 —	8 —
Alſo zuſammen	84 rthlr.	4 gl.

Werden nun 84 rthlr. 4 gl. durch die Anzahl der Jahre, d. i. durch 5 dividirt, ſo kommen im Durchſchnitte auf jedes Jahr 16 rthlr. 20 gl.

Anmerkung.

Auf eine ähnliche Art kann die Berechnung der Koſten oder des Ertrags eines Forſtes im Durchſchnitte auf 5, 6, 10 und mehrere Jahre angelegt und durchgeführet werden; wird aus beiden ein abermaliges Mittel auf dieſelbe Anzahl von Jahren gemacht, ſo zeigt das Reſultat den Gewinn oder Verluſt des Forſtes.

Zweiter Abſchnitt.

Anwendung der geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen.

§. 193.

Zu den vorzüglichſten Anwendungen der geometriſchen Verhältniſſe und Proportionen gehören folgende praktiſche Rechnungsregeln, die man auch die zuſammengeſetzten praktiſchen Rechnungsarten, im Gegenſatz der einfachen (Addition, Multiplikation, und Subtraktion, Diviſion) nennen könnte.

Aus der Aufgabe §. 176, vermittelſt welcher zu drei gegebenen Gliedern einer geometriſchen Proportion das vierte Glied gefunden wird, iſt die ſo genannte Regel Detri oder Regel de Tri (Regula de tribus terminis) entſtanden. Dieſe Regel oder Rechnungsart heißt auch ihrer nützlichen Anwendung oder überhaupt ihres ausgebreiteten Nutzens wegen, in den praktiſchen Rechenbüchern die goldene Regel (Regula aurea), oder die Verhältniß- auch Proportionsregel (Regula proportionum), weil die unbekannte oder geſuchte Größe oder Zahl mit einer der gegebenen in irgend einem Verhältniſſe und alle vier Glieder in einer geometriſchen Proportion ſtehen.

Die Regel Detri iſt ihrer Natur nach einfach oder zuſammengeſetzt, je nachdem ſie auf einfachen oder auf zuſammengeſetzten Verhältniſſen oder Proportionen beruht.

Die einfache Regel Detri zerfällt für ſich wiederum in zwei Arten: Man hat nämlich

Die gerade (directa) oder gemeine, und

Die umgekehrte Regel Detri (inverſa), welche letztere lehrt, wie man zu drei bekannten Gliedern einer geometriſchen Proportion, das erſte Glied findet.

Die zuſammengeſetzte Regel Detri beſteht darin, daß man entweder zu fünf bekannten Gliedern, die ſechste Proportionalzahl, d. i. das letzte Glied zu drei gegebenen Verhältniſſen ſucht, weswegen dieſe Regel auch Regel Quinque heißt; oder daß man zu ſieben bekannten Gliedern, die achte Proportionalzahl, d. i. das letzte Glied zu vier gegebenen Verhältniſſen ſucht, und deswegen auch die Regel Septem genannt wird.

Die

Die erſte Art der zuſammengeſetzten Regel Detri oder die Regel Quinque gründet ſich auf zwei zuſammengeſetzte Proportionen; die zweite Art oder die Regel Septem aber iſt auf drei zuſammengeſetzten Proportionen gegründet. Sie zerfällt wie die einfache ebenfalls in zwei Arten: Man hat nämlich auch hier

Die gerade zuſammengeſetzte, und

Die umgekehrte zuſammengeſetzte Regel Detri.

Auſſer dieſen Regeln iſt für den Geſchäftsmann noch die Regel multiplex oder Kettenregel, die Reeſiſche Regel, ſo wie die Geſellſchafts- und Vermiſchungsregel merkwürdig, die ſich insgeſammt bald auf einfache bald auf zuſammengeſetzte Verhältniſſe oder Proportionen gründen, und am gehörigen Orte erläutert werden ſollen.

Anmerkung.

Die hier genannten zuſammengeſetzten Rechnungsregeln, laſſen ſich insgeſammt auf die einfache Regel Detri zurückführen, wenn man nur die gegebenen Zahlen gehörig ordnet. Da man aber viele und beinahe die mehreſten Rechnungsfälle, die in den zuſammengeſetzten Regeln ihren Grund haben, in kürzerer Zeit durch die zuſammengeſetzten Regeln, als durch die einfachen, behandelt, und die hierher gehörigen Aufgaben ſchnell aufgelöſt werden können, ſo bringt man einen zuſammengeſetzten Rechnungsfall nicht ohne wichtige Urſachen auf einzelne Fälle zurück. Die Gründe dieſer Behauptungen liegen insgeſammt in der Lehre von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen und Proportionen.

I.

Die einfache Regel Detri.

A.

Die gerade oder gemeine einfache Regel Detri.

§. 194.

Aufgabe.

Eine Rechnungsfrage, welche nach Gründen der gemeinen Regel Detri aufgelöſt oder beantwortet werden kann, richtig in Anſatz zu bringen, und dann die geſuchte vierte Zahl, oder das ſogenannte Facit zu finden.

Auflöſung.

1) Man ordne die gegebenen Zahlen (nach §. 176.), d. i. man ſetze die Fragezahl in die Stelle des zweiten und diejenige, die mit ihr von einerlei Art iſt, in die Stelle des erſten; die noch übrige Zahl aber in die Stelle des dritten Gliedes. Die Stelle des letzten Gliedes laſſe man leer, oder ſetze x als Zeichen des noch unbekannten hin.

2) Sind die Glieder oder Sätze für ſich aus mehrerleinamigen gemiſchten oder gebrochnen Zahlen zuſammengeſetzt, ſo bringt man ſie unter einerlei oder gleiche Benennung (§. 75—79).

3) Nun multiplicirt man das zweite Glied mit dem dritten oder umgekehrt, und dividirt das erhaltene Produkt mit dem erſten Gliede.

4) Kommen in dem erſten und zweiten, oder im erſten und dritten Gliede Zahlen vor, die ſich beide durch irgend eine dritte dividiren laſſen, ſo dividire man vor

der

der Anwendung der Regel in N. 3, und behandele die Quotienten, wie die Dividenda nach No. 3. Auf eine ähnliche Art kann man ſich auch bei Brüchen verhalten. Dieſe und mehrere Vortheile liegen insgeſammt in der Lehre von den geometriſchen Verhältniſſen (§. 156 — 160).

Beiſpiele.

1) In einfachen ungenannten Zahlen.

S. hat neuerlich 16 Scheffel Ahornſaamen verkauft und 24 rthlr. dafür erhalten; was werden in dieſem Preiſe 20 Scheffel koſten? 30 rthlr.

Die Aufgabe wird ſo geordnet:

16 Schfl. : 20 Schfl. = 24 rthlr. x
20
16) 480 | 30 rthlr.
48

Im gemeinen Leben wird der Anſatz gewöhnlich ohne das Zeichen der geometriſchen Verhältniſſe geſetzt.

60 Schfl. 20 Schfl. 24 rthlr.

oder 16 Schfl. — 20 Schfl. — 24 rthlr. worin das Zeichen (—) gar keine Bedeutung hat, und alſo auch ganz entbehrt werden kann.

Auch ſetzt man:

16 Schfl. koſten 24 rthlr. Was koſten 20 Schfl.

In dieſem Anſatze iſt das zweite und dritte Glied verwechſelt und die Proportion iſt dennoch richtig vermöge §. 179. No 2. Demnach kann man auch dieſen Anſatz zulaſſen.

Da nun in der Aufgabe 16 Schfl. : 20 Schfl. = 24 rthlr. : x oder kürzer 16 : 20 = 24 die erſten beiden

Glieder durch die Zahl 4 ohne Reſt dividirt werden können, ſo dividire man, und man erhält dieſe Glieder durch kleinere Zahlen ausgedrückt, ohne daß das Verhältniß geändert wird.

$$4)\ \frac{\cancel{16} : \cancel{20} = 24}{4 : 5 = 24}$$

Da nun der Diviſor 4 oder das 1te Glied auch im 3ten Gliede ohne Reſt aufgeht, ſo dividire man, und multiplicire alsdenn die beiden mittlern Glieder, und man erhält in dieſem Produkte das 4te Glied, oder die geſuchte Zahl.

$$4)\ \frac{\cancel{4} : 5 = \cancel{24}}{1 : 5 = 6}$$

Da nun $5 . 6 = 30$, ſo iſt 30 die geſuchte Zahl.

Ferner: Ein Förſter hat 24 Klaftern Holz mit 32 Thlr. Fuhrlohn verhandelt; was wird er für 60 Klft. zahlen müſſen? 80 Thlr.

Man ſetzt;

24 Klft. 60 Klft. = 32 Thlr.

$$\frac{32}{24 : \cancel{19}20 \mid 80 \text{ Thlr.}}$$

Oder

$$\overset{12)}{\frac{24 : 60 = \cancel{32}}{\cancel{2} : 5 \;.\; 16 = 80}}$$

Oder:

$$\frac{\overset{8)}{24} : 60 = \overset{8)}{32}}{\cancel{3} : 20 \;.\; 4 = 80}$$

Ferner: Für 80 Thlr. Fuhrlohn werden 60 Klaftern abgefahren; was hat man nach dieſem Gedinge für 24 Klaftern zu zahlen? 32 Thlr.

60 Klft.

60 Klft. 24 Klft. = 80 Thlr. Oder 60 : 24 = 80

3 8 . 4 = 32

80

60 : 1920 | 32 Thlr.

Oder 60 : 24 = 80

3 : 2 . 16 = 32

Ferner: Wenn für 20 Klft. Holz auf der Stelle 30 Thlr. bezahlet werden; wieviel wird man für 24 Thlr. erhalten? 16 Klft.

30 Thlr. 24 Thl. = 20 Klft. Oder 30 : 24 = 20

3 : 8 . 2 = 16. Kl.

20

30 : 480 | 16 Klft.

Oder 30 : 24 = 20

3 : 4 . 4 = 16 Kl.

Ein Forſtbeſitzer hat für 18 Schfl. Fichtenſaamenzapfen 9 Thaler bezahlet; nun hat er dergleichen noch 150 Schfl. beſtellt; was wird er dafür zahlen müſſen? 75 Thlr.

18 Schfl. 150 Schfl. = 9 Thlr. Oder 18 : 150 = 9

2 : 150 = 75 Thlr.

9

18 : 1350 | 75 Thlr.

9

Oder 18 : 150 = 9

3 : 25 . 3 = 75 Thlr.

Wenn 6 Pfund 18 Thlr. gelten; was koſten 96 Pfund? 288 Thlr.

Für 20 Ellen Tuch hat Jemand 25 Thlr. baar gezahlet; was zahlt er für 40 Ellen? 50 Thlr.

Ein Wagner hat ſich mit einem Förſter in einen Handel eingelaſſen, nach welchem er ihm für 5 Radefelchen 20 gr. zu bezahlen verſprochen; was wird er ihm für 75 Stück, die nach und nach ſind abgeholet worden, zahlen müſſen? 12 Thlr. 12 gr.

5 Felchen : 75 Felchen = 20 gr.
20 1
——— 62
5 : 1500 | 300 gr. | 12 Thlr. 12 gr.
24

Oder: 5 : 75 = 20
75 . 4 = 300 gr.

Nun ſind aber 100 gr. 4 Thlr. 4 gr. Mithin ſind 300 gr. gleich 3 mal ſo viel, nämlich 12 Thlr. 12 gr. Denn 3 . 4 = 12. Dieſes Vortheils kann man ſich jederzeit bedienen, um eine große Anzahl von Groſchen alsbald in Gedanken in Thaler zu verwandeln.

Oder: 5 : 75 = 20
15 . 20 = 300 gr. oder 12 Thlr. 12 gr.

Um eine gewiſſe Anzahl von Pfennigen ſogleich in Groſchen, oder eine gewiſſe Anzahl von Groſchen in Thalern auszudrücken, dienet folgendes Täfelchen, welches man nach und nach auswendig zu lernen ſuchen muß.

Pf.	ſind Gr.	Pf.	ſind Gr.	Gr.	ſind Thl.	Gr.	ſind Thl.	Gr.	ſind Thlr.
12	1 gr.	108	9 gr.	24	1 -	200	8th. 8g.	384	16th. - g
24	2 -	120	10 -	48	2 -	216	9 -	400	16 16
36	3 -	132	11 -	72	3 -	240	10 -	500	20 20
48	4 -	144	12 -	96	4 -	264	11 -	600	25 -
60	5 -	168	14 -	100	4th. 4g.	288	12 -	700	29 4
72	6 -	192	16 -	120	5 -	300	12th. 12	800	33 8
84	7 -	216	18 -	144	6 -	312	13 -	900	37 12
96	8 -	240	20 -	168	7 -	336	14 -	1000	41 16
100	8gr. 4pf.	288	1 thl.	192	8 -	360	15 -	—	— —

2)

2) In mehrerleinamigen Zahlen.

Auf einem Forſtrevier ſind 4 Schaalhölzer mit 1 Thlr. 8 gr. bezahlet worden; was wird man für 32 Stück geben müſſen? 10 Thlr. 16 gr.

4 Schaalh. 32 Schaalh. = 1 Thlr. 8 gr.
24
32
32
64
96
1
4 : 1ø24 | 256 | 10 thl. 16 gr.
2 24

Oder: 4 : 32 = 1 Thlr. 8 gr.
8 . 1 + 8 = 10⅔ Th. oder 16 gr.

Ferner: Ebendaſelbſt koſten 8 einfache Säulbäume 7 Thlr. 12 gr. was koſten 86 dergleichen? 80 Thlr. 15 gr.

8 Säulb. 86 Säulb. = 7 Thlr. 12 gr.
24
180
86
1080
144
1
8 : 1548ø | 1935 | 80 Thlr. 15 gr.
724 24

Oder: 8 : 86 = 7 Thlr. 12 gr.
4 : 43 = 18ø
43 . 45 = 10 Thlr. 15 gr.
215 5
9
24 : 1935 | 10 + 15
1

Ferner:

Ferner: Ein Gutsbeſitzer hat voriges Jahr auf ſeiner Forſtbreite 2 Centner und 2 Stein Flachs erbauet, und ſolchen für 12 Thlr. verkauft; nun hat er in dieſem Jahre 2 Centner gewonnen; was werden ſolche nach vorigem Preiſe gelten? 20 Thlr.

5   5
2 Cent. 2 St. 4 Cent. = 12 Thlr. Oder 12 : 20 = 12
12   20   20 Thl.
12
12 : 240 | 20 Thlr.

Ferner: Ein Herr dinget einen Jäger, und verſpricht ihm jährlich nebſt Koſt 50 Thlr. Der Jäger aber erhält durch verſchiedene Vernachläſſigungen nach 39 Wochen den Abſchied; was iſt ihm der Herr auf dieſe Zeit ſchuldig? 37 Thlr. 12 gr.

52 W. 39 W. = 50 Thlr.
50
1950 | 37 Thlr. $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ Thlr. oder 12 gr.
856
2

Ferner: Wenn 2 Centner Zucker mit 91 Thlr. 16 gr. bezahlet werden; was hat man für 20 Pfund zu zahlen? 8 Thlr. 8 gr.

110
2 Centner : 20 Pfund = 91 Thlr. 16 gr.
220 = 11 : 91 Thlr. 16 gr. = 8 Pfund
3 = 72
11 : 88 | 8 gr.

Ferner: Wenn ein Förſter zur Erneuerung ſeines Forſthauſes 2500 Dach- und Mauerſteine benöthi-

benöthiget iſt, und das Hundert mit 2 Mfl. bezahlen ſoll; was wird der ganze Betrag an Thalern ſeyn? 43 Thlr. 18 gr.

100 St. 2500 St. = 2 Mfl.

2

1~~00~~ : 50~~00~~ | 50 Mfl.

21 gr. = 1 Meiß. Fl.

24 : 1.~~0~~5~~0~~ | 43 Thlr. 18 gr.

~~3~~.8

1

Oder: 1~~00~~ : 25~~00~~ = 2

8 : 50 fl. = 7 Thaler.

8 : 35~~0~~ = 43 $\frac{3}{4}$ Thlr.

~~3~~6 | 3 / 8 | 4 oder 18 gr.

Hier folgen noch einige Aufgaben zur Uebung:

Wenn 1 Centner 18 Thlr. 9 gr. gilt; was gelten 55 Pfund? 9 Thlr. 4 gr. 6 pf.

Desgleichen: Für 4 Schfl. Haber haben 3 Thlr. 16 Groſchen müſſen gezahlet werden; was wird für 72 Scheffel zu zahlen ſeyn? 66 Thlr.

Desgleichen: 16 einfache Säulbäume koſten 15 Thlr. was koſten 45 Stück? 42 Thlr. 4 gr. 6 pf.

Desgleichen: 24 Balken werden mit 18 Thalern bezahlt; was muß für 100 Stück gezahlet werden? 75 Thlr.

Desgleichen: 3 Schock Hopfenſtangen gelten 4 Thaler 3 gr. was kommt ein halbes Schock? 16 gr. 6 pf.

Desgleichen: Ein Holzſchläger kann es in 14 Tagen auf 4 Thaler 12 gr. Schlagerlohn bringen; was wird er in 12 Wochen verdienen? 27 Thaler.

3)

3) In gebrochenen Zahlen. Z. B.

Man ſucht die vierte Proportionalzahl zu $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{8}$; wie wird ſie heißen? $\frac{7}{9}$.

Nämlich:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} & : & \frac{2}{3} & = & \frac{7}{8} \\ 3 & & 2 & & \\ \underline{3} & & \underline{7} & & \\ 9 & & 14 & & \\ \underline{8} & & \underline{4} & & 8 \\ 72 & : & 56 & = & \frac{56}{72}\Big| \frac{7}{9} \end{array}$$

Das iſt: Man multipliciret die zwei letzten Zähler 7.2 giebt 14. Dieſes Produkt multipliciret man mit dem Nenner des erſten Satzes, d. i. 4, nun giebt 4.14 = 56, als den Zähler zur geſuchten Zahl. Alsdenn multipliciret man mit den Nennern der beiden letzten Sätze, mit 3.8 = 24, den Zähler des erſten Satzes 3, ſo kommt 3.24 = 72, als der Nenner zum Zähler 56. Beide Zahlen laſſen ſich durch 8 ohne Reſt dividiren, d. i. abbreviren, und geben alſo $\frac{7}{9}$ zur verlangten vierten Proportionalzahl.

Kürzer aber laſſen ſich alle Aufgaben in Brüchen durchs Aufheben auflöſen, wie folgt:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{8} = \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{7}{\cancel{8}.\cancel{2}} = \frac{7}{9}.$$

Dieſes iſt eben ſo viel, als wenn man auch ſetzen wollte:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{8} \\ \hline \frac{\cancel{4}}{3} : \frac{14}{\cancel{24}.6} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}. \end{array}$$

Der

Der Sinn dieſer Aufgabe iſt dieſer: Wenn $\frac{3}{4}$ Pfund, das iſt, 24 Loth, $\frac{7}{8}$ Thaler, das iſt, 21 gr. koſten; was koſten $\frac{2}{3}$ Pfund, das iſt, $21\frac{1}{3}$ Loth? $\frac{7}{9}$ Thaler oder 18 gr. 8 pf.

Um die Richtigkeit dieſer Rechnung zu zeigen, wird dieſe Aufgabe in genannten Größen noch einmal aufgelöſt. Nämlich:

```
24 Loth :  21 1/3 Loth = 21 gr.
 3          64
72          128
72 : 1344 | 18 gr.
      628
      4 12
72 : 876 | 8 Pfennige.
```

```
Oder:  24 : 21 1/3 = 21
        8 : 21 1/3 = 7
        8 : 149 1/3 = 18 2/3 gr.
            65
            8 + 1/24 = 16/24.
```

Nun bringet man 18 gr. 8 pf. in einen Thalerbruch; wie wird er heißen? $\frac{7}{9}$ Thlr.

```
24 gr. — 1 Thlr. = 18 gr. 8 pf. (12       32
288       :        224          =    224 | 7
                                     288   9.
```

Ferner: Für $2\frac{3}{4}$ **Bandgerten** ſind $\frac{2}{3}$ Thlr. bezahlet worden; was werden $\frac{7}{8}$ Schock gelten? $\frac{7}{33}$ Thlr. oder $5\frac{1}{11}$ gr.

$$2\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \text{ Thaler.}$$

$$\begin{array}{rcr} 11 & & 2 \\ 8 & & 7 \\ \hline 88 & & 14 \\ 3 & & 4 \\ \hline 264 & & 56 \end{array}$$

$$\frac{56}{264}\Big|\frac{7}{33} \text{ Thaler. (mit 8 gekürzt)}$$

Oder: $2\frac{3}{4} : \frac{7}{8.2} = \frac{2}{3} = \frac{7}{33}$ Thaler.

Oder: $2\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{2}{3}$

$$\frac{4}{11} : \frac{14}{24.6} = \frac{14}{66}\Big|\frac{7}{33} \text{ Thaler. (mit 2 gekürzt)}$$

Ferner: $\frac{3}{4}$ Lindenſaamen gilt $2\frac{2}{3}$ Thaler; was werden $2\frac{7}{8}$ Scheffel gelten? $10\frac{2}{9}$ Thaler oder 10 Thaler 5 gr. 4 pf.

Man ſetzet: $\frac{3}{4}$ Schfl. : $2\frac{7}{8}$ Schfl. = $2\frac{2}{3}$ Thlr.

$$\frac{4}{3} : \frac{23}{8} = \frac{8}{3} = \frac{92}{9}\Big|\, 10\frac{2}{9} \text{ Th.}$$

Ferner: $\frac{2}{3}$ Elle gelten 6 gr. was koſten 32 Ellen? 12 Thlr.

$\frac{2}{3}$ Elle

$\frac{2}{3}$ Elle : 32 Ellen = 6 gr.

6
———
192
3
——— 4
2 : 576 | 288 | 12 Thaler.
11 24

Oder: $\frac{2}{3}$: 32 = 6 = 3 : 32 = 6 . 3 = 288 gr. oder 12 Thlr.
2 3
———
96
3
———
24 : 288 | 12 Thaler.

Ferner: Wenn 16 Pfund $\frac{7}{8}$ Thlr. koſten, was koſten 24 Pfund? 1 $\frac{5}{16}$ Thlr.

16 Pfund : 24 Pfund : = $\frac{7}{8}$ Thlr.
8 7 8
——— ———
128 : 168 | 1 $\frac{40}{128}$ | $\frac{5}{16}$
40

Oder: 16 : 24 = $\frac{7}{8}$
———
2 : 3 = $\frac{7}{8}$ = $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{1}$ = $\frac{7}{8}$ = $\frac{21}{16}$.

Ferner: Es hat Jemand für 32 Ellen grün Tuch 40 Thlr. bezahlet; nun fehlt ihm aber noch $\frac{2}{3}$ Elle, um 4 Mannskleider davon zu verfertigen; was wird er dafür noch zahlen müſſen? 20 gr.

32 Ellen : $\frac{2}{3}$ = 40 Thlr.
3 2
——— ———
16 : 96 : : 80
6 : 5 = $\frac{5}{6}$ Thlr.

Oder: $32 : 40 = \frac{2}{3}$

$4 : 5 = \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ Thlr. oder 20 gr.

Ferner: Wenn $\frac{2}{3}$ Elle 1 Thlr. koſtet; was koſten $\frac{7}{8}$ Elle? 1 Thlr. 7 gr. 6 pf.

$\frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{21}{16}$ (5) | 1 Thlr.

24

16 : 120 | 7 gr.

8

12

16 : 96 | 6 pf.

Ferner: Wenn $\frac{1}{2}$ Elle einer Welle $\frac{1}{4}$ Thlr. gilt; was gilt die ganze Welle von 32 Ellen? 16 Thlr.

Ferner: Wenn eine Klafter $\frac{8}{4}$ Holz $1\frac{1}{2}$ Thlr. gilt; was ſoll eine $\frac{7}{4}$ Klafter gelten? $1\frac{5}{16}$ Thlr. oder 1 Thlr. 7 gr. 6 pf.

Ferner: Wenn $\frac{1}{4}$ Scheffel Birkenſaamen mit $\frac{7}{8}$ Thlr. bezahlt wird; was wird für $\frac{3}{4}$ Schfl. bezahlet werden? $2\frac{5}{8}$ Thlr.

Ferner: Wenn $\frac{1}{3}$ Acker mit $\frac{5}{8}$ Schfl. Eicheln beſteckt wird, wieviel derſelben werden zu $\frac{3}{4}$ Acker nöthig ſeyn? $1\frac{13}{32}$ Scheffel oder 1 Scheffel $6\frac{1}{2}$ Metze.

Ferner: Jemand will ſich ein Kleid machen laſſen. Nun hat er bereits 8 Ellen grünes Tuch dazu gekauft, und daſſelbe mit $14\frac{2}{3}$ Thlr. bezahlt. Da ihm aber der Schneider das Maß nimmt, findet ſichs, daß er zu einem vollkommenen Kleide, an Rock, Weſte und Hoſen, noch $\frac{3}{4}$ Elle nöthig habe; was muß er dafür zahlen? $1\frac{3}{8}$ Thlr. oder 1 Thlr. 9 gr.

4)

4) In gemiſchten und mehrerleinamigen Zahlen.

Beiſpiele.

Es werden $16\frac{1}{2}$ Schock wilde Kaſtanienſtämmchen mit 8 Thlr. 6 gr. bezahlet; nun hat man deren, um einen lichten Fleck damit zu beſetzen, noch $20\frac{3}{4}$ Schock nöthig; was hat man dafür zu zahlen? 10 Thlr. 9 gr.

$16\frac{1}{2}$ Schock : $20\frac{3}{4}$ Schock = 8 Thlr. 6 gr.

33   83   24

4   198

132   83

594

1584

16434

2

132 : 32868 | 249 | 10 Thlr. 9 gr.

648   24

11

Oder: $16\frac{1}{2} : 20\frac{3}{4.2} = 8$ Thlr. 6 gr. 24

$33 : 83 = \frac{198}{3}$

2   3

66   249 gr. = 10 Thlr. 9 gr.

Oder: $16\frac{1}{2} : 20\frac{3}{4} = 8\frac{1}{4}$ Thlr.

$\frac{33}{2} : \frac{83}{4.2} = \frac{33}{4} = \frac{83}{8} = 10\frac{3}{8}$ Thlr.

Ferner: Für 16 Klaftern Holz werden $21\frac{1}{4}$ Thaler Fuhrlohn bezahlt; was hat man für 12 Klaftern zu zahlen? 15 Thaler 22 gr. 6 pf. oder $15\frac{15}{16}$ Thaler.

Setze: 16 Kl. 12 Kl. = $21\frac{1}{4}$ Thlr.

```
  4            85
 64            12
              170
               85
     64 : 1.020|15 Thaler.
               88
               6 24
     64 : 14.40|22 gr.
             1 62
               3 12
     64 :    384|6 pf.
```

Oder: $16 : 12 = 21\frac{1}{4}$

$\frac{4}{1} : \frac{3}{1} = \frac{85}{4}$

$\frac{1}{4} : \frac{3}{1} = \frac{85}{4} =$

16 : 255 | $15\frac{15}{16}$ Thaler

1

Oder auch alſo: $16 : 12 = 21\frac{1}{4}$

$4 : 3 = 22\frac{1}{4}$

$4 : 63\frac{3}{4} = 15\frac{15}{16}$ Th. = 15 Th. 22 gr. 6 pf.

Ferner: Wenn 16 Ellen weniger $\frac{3}{4}$ Elle mit $23 - \frac{1}{8}$ Thaler bezahlet worden; was koſten $7 - \frac{3}{16}$ Elle? 10 Thlr. 5 gr. 3 pf.

Man

Man ſetzt: $16 - \frac{3}{4} : 7 - \frac{3}{16} = 23 - \frac{1}{8} =$

$15\frac{1}{4} : 6\frac{13}{16} = 22\frac{7}{8}.\ 2$

61   109 = 183
 32   109
122   1647
183   183
1952 : $\not1\not9\not9 47$ | 10 Thlr.
             42 | $\frac{4}{6}$
           1708
1952 : $\not1.\not0\not2.\not48$ | 5 gr.
             48 12
1952 : $\not8\not8\not8\not6$ | 3 pf.

Oder man ſetzet und rechnet auf folgende Art:

$15\frac{1}{4} : 6\frac{13}{16} = 22\frac{7}{8}$

$\frac{\not4}{\not61} : \frac{109}{\not16.4} = \frac{\not1\not8\not3.3}{8} = \frac{\not3\not27}{\not3\not2} \mid 10\frac{7}{32}$ Thlr.

Ferner: 3 Klaftern Holz koſten $4\frac{1}{2}$ Thaler, was gelten $6\frac{1}{2}$ Klafter? $9\frac{3}{4}$ Thlr. oder 9 Thlr. 18 gr.

$\not3$ Kl. $\not6\frac{1}{2}$ Kl. = $\not4\frac{1}{2}$ Thlr. Oder: $3 : 6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$6\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$ $3 : \not2\not9\frac{1}{4} = 9\frac{3}{4}$ Thlr.
                                    2

$9\frac{3}{4}$ Thlr.

Oder auch: $3 : 6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\not3} : \frac{13}{2} = \frac{\not9.3}{2} = \frac{\overset{3}{\not3\not9}}{\not4} \mid 9\frac{3}{4}$ Thaler.

Oder auch alſo: $\not3 : \not6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{6} \cdot 4\frac{1}{2} = 8\frac{2}{3} + 1\frac{1}{12} = 9\frac{3}{4}$ Thlr.

Oder endlich alſo: $3 : 6\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

$$2\frac{1}{6} \cdot 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{13}{6 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{39}{4} \mid 9\frac{3}{4} \text{ Thlr.}$$

Wer ſich auf dieſe Weiſe in den Vortheilen der Rechenkunſt übet, der wird gewiß bald auf dieſe, bald auf jene Art einen Vortheil finden, alle Aufgaben in der Kürze aufzulöſen. Hier folgen noch einige Beiſpiele zur Uebung.

An 14 Arbeiter werden binnen 5 Tagen 42½ Thaler ausgezahlet, um eine Pflege in einem Revier von etlichen 100 Waldmorgen auszuroden und umzuhacken; wenn aber 24 Mann ſollten gehalten werden, was wird alsdann binnen dieſer Zeit für Arbeitslohn erfordert? 72 Thlr. 20 gr. 6$\frac{5}{7}$ pf.

Ferner für 3 Wiſpel 1 Malter 9¾ Schfl. Hafer werden 125 Thaler bezahlet; was ſind für 6¾ Schfl. weniger ½ Viertel zu bezahlen? 8 Thlr. 20 gr.

Ferner: Für 27½ Thlr. bekommt man 220 Stück rothbüchene Stämmchen auf ein Gehäge zu pflanzen; wieviel Stück bekommt man für 1 Thaler? 8 Stück.

Wenn eine $\frac{8}{4}$ Klft. Holz 1½ Thlr. koſtet; was würde eine $\frac{7}{4}$ Klafter gelten? 1$\frac{5}{16}$ Thlr. oder 1 Thlr. 7 gr. 6 pf.

Wenn eine $\frac{6}{4}$ Klft. Holz mit 3⅔ Thlr. bezahlt wird; was wird eine 2 elligte Klafter gelten? 4$\frac{8}{9}$ Thlr.

Für 18$\frac{7}{16}$ Ellen werden 30½ Thaler bezahlt; was koſten 36⅞ Ellen? 61 Thlr.

Ein

Ein Thaler beträgt nach Gülden gerechnet $1\frac{1}{7}$ Mfl. was werden $30\frac{2}{3}$ Thlr. in Gülden betragen? 41 Mfl. 19 gr.

Die Kaitzſcher Heide iſt mit $16623\frac{3}{4}$ Thlr. im Anſchlage, doch mit dem Bedinge, daß ernanntes Kaufgeld in Ducaten, jeden für $2\frac{3}{4}$ Thlr. ſoll gezahlet werden. Es iſt daher die Frage: Wieviel dieſe Summa in Ducaten betrage? 6045 Stück Ducaten.

24 Malter Holz gelten 16 Thlr. 18 gr. was werden 30 Malter koſten? 20 Thlr. 10 gr.

16 Stämme Holz werden mit 12 Thlr. 18 gr. 6 pf. bezahlet; nun will der Käufer von eben dieſer Art noch 48 Stämme haben; was ſoll er dafür bezahlen? 38 Thlr. 7 gr. 6 pf.

Ein Jäger hat letzthin für 12 Pfund 16 Loth recht fein Schießpulver 8 Thaler bezahlet; was wird er für 32 Pfund geben müſſen? 20 Thlr. 11 gr. $6\frac{5}{23}$ pf.

Endlich: Ein Förſter will die Höhe einer Fichte vermittelſt des Schattens und eines Stabes ausmeſſen. Nun findet er, daß ſein Stab 30 Zoll Höhe über der Erde habe, wenn er einen Schatten von 45 Zoll wirft: Da nun der Schatten der Fichte 153 Ellen und 3 Zoll beträgt; wie hoch wird die Fichte ſeyn? 66 Ellen und 18 Zoll.

§. 195.

Unter die nöthigſten und nützlichſten Anwendungen der gemeinen Regel detri, gehören die Reduktionen aller Maße, Münzen, Gewichte ꝛc. Einige Reduktionen von ganz einfacher Art ſind theils in der Multiplikation und Diviſion vorgekommen, die aber nichts anders bezweckten, als Dinge von größern Namen, d. i. Dinge von höhern Werthen, unter kleinern Namen,

d. i. in niedrigern Werthen auszudrücken und umgekehrt. Dergleichen Reduktionen lehren durch Multiplikation mit der Reduktionszahl, z. B. Thaler in Groſchen, Pfennige; und umgekehrt Pfennige und Groſchen in Thaler, durch Diviſion mit der Reduktionszahl, zu verwandeln. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit den Maßen, um ſolche, die in größern Namen ausgedrückt ſind, in kleinern auszudrücken, und umgekehrt. Im erſten Falle wird mit der Reduktionszahl multiplicirt, im letztern Falle aber mit derſelbigen Zahl dividirt.

Zuſammengeſetzter aber ſind die Reduktionen der Maße, Münzen, Gewichte 2c. aller Art, wenn es darauf ankommt, eine gewiſſe Länge, z. B. in Fußen, oder eine gewiſſe Fläche, etwa in Quadratfüßen u. ſ. w. in eine andere Länge oder in eine andere Fläche 2c. zu verwandeln, und wobei die Fuße ſelbſt nicht von einerlei Größe ſind. Eben ſo iſt es bei den Münzen. Soll z. B. eine gewiſſe Menge Preußiſcher Thaler in Conventionsthaler verwandelt werden, ſo iſt es nöthig zu wiſſen, wie ſich der Werth eines Preuß. Thalers, zum Werthe eines Conventionsthalers verhalte. Auf eine gleiche Art kommt der Fall bei den Gewichten vor.

Die zu vergleichenden, und auf einander zu reducirenden Dinge, beziehen ſich insgeſammt auf ein Verhältniß, in welchem man die Größe oder den Werth des einen, zur Größe oder zum Werthe des andern erkennt. Der Exponent dieſes Verhältniſſes iſt alsdenn die Reduktionszahl dieſer Dinge von einerlei Namen; oder das angezeigte Verhältniß, das Maßverhältniß, durch welches man zur Fragezahl das vierte Glied einer geometriſchen Proportion finden kann. Da nun dieſe Aufgabe nichts anders iſt, als die gerade oder gemeine Regel detri, ſo gehören zu dieſer die Reduktionen aller Maße, Münzen und Gewichte.

§. 196.

Die Verſchiedenheit der Längenmaße, ſo wie die aus denſelben gemachten Flächen- und Körpermaße, ſind nicht nur an verſchiedenen Orten in ihrer Länge oder in ihren Abmeſſungen, oder überhaupt an Größe, ſondern auch in der Eintheilung verſchieden. Weil es nun nicht möglich iſt, wirkliche Maße, Münzen und Gewichte aller Oerter, auch nur von Deutſchland, vielweniger von ganz Europa zu beſitzen, um wirkliche Vergleichungen unter denſelben anſtellen zu können, ſo muß man ſich begnügen, ein Längenmaß zu beſitzen, nach welchem man, wenn die Verhältniſſe der übrigen gegen dieſes bekannt ſind, jedes andere, an irgend einem Orte gebräuchliche, oder übliche Längenmaß angeben kann. Da nun die Flächen- und Körpermaße ſich insgeſammt auf ein Längenmaß von gleichem Namen beziehen, und dieſe Maße nicht wirklich exiſtiren, ſondern nur durch Rechnung angegeben werden, ſo hat man an einem allgemein angenommenen Längenmaße genug, alle Vermeſſungen und Ausmeſſungen zu beſtimmen. Um Werthe der Münzen anzugeben, hat man nur Verhältniſſe der einen zu der andern nöthig. Die Gewichtsvergleichung erfordert ein Maßgewicht, was bekannt, und wenigſtens in einem großen Bezirke als Maß angenommen wird. Kennt man überdies die Verhältniſſe der übrigen zu dieſem bekannten Maßgewichte, ſo laſſen ſich leichte Verwandlungen oder Reduktionen des einen, in das Gewicht eines andern Ortes anſtellen.

Dieſe Vergleichung der Längenmaße, Münze und Gewichte iſt verſchiedentlich angeſtellt worden, und daraus ſind Tabellen entſtanden, die man unter den Namen der Vergleichungstafeln für Längenmaße, Münzen und Gewichte kennt.

§. 197.

§. 197.

Das Längenmaß, welches allen andern zum Grunde liegt, wenn man einerlei Maße, das iſt, ſolche erhalten will, die an verſchiedenen Orten mit einander übereinſtimmen, iſt der franzöſiſche Fuß (Pied du Roi), deſſen Länge der Franzoſe Mairan unter der Temperatur von 135° nach de l'Isle (Man ſehe die Memoires de l'Academ. Roy. des Sciences de Paris, vom Jahre 1735. S. 157.) beſtimmt hat.

Bis jetzt iſt die Länge dieſes Fußes als das ſicherſte Maß bei allen Maßvergleichungen zum Grunde gelegt worden, und wovon man eine richtige Kopie ſelbſt beſitzen muß.

Anmerkung. 1.

Einen ſolchen Pariſer Fuß beſitzt der Herr Mechanikus der Univerſität zu Leipzig, Her Weickerdt, der auch zugleich als Optiker ſich durch Verfertigung guter Inſtrumente rühmlichſt bekannt gemacht hat. Wer alſo eines Pariſer Fußes benöthiget iſt, erhält einen ſolchen bei dem genannten Herrn Weickerdt in Leipzig ſehr genau auf eine Meſſingſtange aufgetragen, und den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 10 points (nach Art der Franzoſen), alſo die ganze Länge des Fußes in 1440 gleiche Theile getheilt.

Anmerkung 2.

Da die Beſtimmung der Länge eines Fußes aus der Pendellänge genommen iſt, das Sekunden ſchlägt, und zwar der dritte Theil; ſo wurden in der Folge Reviſionen nöthig, wenn ein allgemeines Maß beſtimmt werden ſollte.

In den neueſten Zeiten wurden von den Franzoſen 12 Meridian-Grade gemeſſen, daraus der 45ſte hergeleitet, und der 10millionſte Theil des Meridian-Quadranten als das neue Maß oder Métre angenommen worden iſt. Dieſes Métre beträgt nach dem

von Mairan feſtgeſetzten Pariſer Fuße 3 Fuß, 0 Zoll, 11,44 Linien.

Von der weitern Eintheilung des Métre und den daraus entſtandenen Maßen für Flächen und Körper; ferner von der daher genommenen Gewichtseintheilung, und der Münzeinheit, ſehe man den erſten Supplement-Band zu J. E. Bode aſtronomiſchen Jahrbüchern. Berlin 1793. S. 242 u. f.

In Deutſchland bleibt wohl vor jetzt noch der bekannte Pariſer Fuß das Grundmaß, und die Verhältniſſe aller andern merkwürdigen Fußmaße werden nach Theilen dieſes Pariſer Fußes ausgedrückt, und in Tabellen gebracht.

§. 198.

In Deutſchland iſt der rheinländiſche Fuß ein ſehr gewöhnliches, wenn auch nicht allgemein angenommenes Längenmaß, deſſen Größe 1391$\frac{1}{7}$ vom Pariſer Fuße beträgt, ſo daß ſich der Pariſer zum rheinländiſchen, wie 1440 zu 1391$\frac{1}{7}$ verhält, wobei die Theile für ſich von gleicher Länge, und zwar vom Pariſer Fuße genommen werden.

Gewöhnlich wird der landesübliche Fuß bei den Vermeſſungen zum Grunde gelegt, deſſen Verhältniß zum Pariſer man kennt, oder aus Tabellen kennen lernen kann. So wird z. B. jede königliche Vermeſſung im Preußiſchen Staate, ſie mag nun ökonomiſche oder forſtwirthſchaftliche Gegenſtände betreffen, nach dem rheinländiſchen Fuße vorgenommen. In einem Theile von Sachſen wählt man zum Maße den Leipziger gemeinen Fuß, der 1252 Theile vom Pariſer Fuße hält. Wird in Schleſien irgend eine Vermeſſung nach dem landesüblichen Fuße vorgenommen, ſo wird dazu eine halbe Breslauer Elle, d. i. ein Breslauer Fuß zum Grunde gelegt, der 1267 Theile vom Pariſer Fuße faßt.

Da

Da nun öfters Vergleichungen dieſer Fuße vorkommen, ſo iſt es nöthig, daß man ſich mit einer Tabelle verſieht, worin die Verhältniſſe verſchiedener Fußmaße vorkommen, und als eine ſolche empfiehlt ſich die folgende.

Tabelle
zur Vergleichung der Fuße.

Namen der Oerter.	wenn der Pariſer Fuß in 1440 Theile getheilt iſt.	wenn der gemeine rheinl. Fuß in 1000 Theile getheilt iſt.
Amſterdam	1258	$904\frac{1}{5}$
Anſpach	1320	$948\frac{2}{7}$
Antwerpen	1260	$905\frac{5}{8}$
Augsburg	1313	$943\frac{4}{7}$
Baſel	$1326\frac{1}{11}$	950
Bayern	1294	930
Berlin ½ Elle	1478	$1062\frac{1}{3}$
Bernburg	1253	$900\frac{1}{2}$
Braunſchweig	1260	$905\frac{5}{8}$
Bremen	1282	$921\frac{3}{8}$
Breslau	1267	$910\frac{5}{8}$
Brüſſel	1290	$926\frac{1}{3}$
Calenberg und für ſämmtl. Hannöveriſche Lande	1299	$933\frac{1}{2}$
Carlsruh	1241	892
Cleve	1310	$941\frac{1}{7}$
Cölln	1219	$876\frac{1}{8}$
Conſtantinopel	3140	$2256\frac{2}{7}$
Copenhagen	$1391\frac{1}{2}$	$1000\frac{1}{7}$
Crakau	1580	$1135\frac{5}{8}$
Dännemark	$1403\frac{2}{5}$	1009
Danzig	$1271\frac{1}{2}$	$913\frac{5}{8}$
Dresden	$1254\frac{1}{2}$	902
Eisleben oder im Mansfeldiſchen gem. Fuß	$1283\frac{3}{5}$	$922\frac{1}{2}$
Eislebenſcher Feldfuß	$2054\frac{1}{4}$	$1476\frac{1}{2}$
Erfurt	1251	$899\frac{1}{8}$
Florenz (Bracci)	2584	$1857\frac{1}{12}$
Frankfurt am Mayn	$1281\frac{3}{8}$	921

Genf

Namen der Oerter.	wenn der Pariſer Fuß in 1400 Theile getheilt iſt.	wenn der gemeine rheinl. Fuß in 1000 Theile getheilt iſt.
Genf	2160	1552 $\frac{1}{7}$
Genua	1113	768 $\frac{2}{7}$
Gieſen	1320	948 $\frac{2}{7}$
Gotha	1275	916 $\frac{1}{3}$
Haag	1440	1035 $\frac{4}{5}$
Halle, gemeiner oder Werkfuß	1279 $\frac{1}{2}$	919 $\frac{2}{7}$
— Feldfuß	1919 $\frac{1}{4}$	1379 $\frac{1}{4}$
Hamburg	1270	912 $\frac{2}{3}$
Harlem	1267	910 $\frac{5}{8}$
Holſtein	1337	961
Königsberg in Preußen	1363	979 $\frac{2}{3}$
Leiden	1390	999 $\frac{1}{16}$
Leipziger Baufuß	1253	900 $\frac{1}{2}$
— gemeiner Fuß	1251	899 $\frac{1}{8}$
Lion	1512	1086 $\frac{3}{4}$
Liſſabon	1387	996 $\frac{9}{10}$
London	1351 $\frac{1}{3}$	971 $\frac{2}{9}$
Lothringen	1292	928 $\frac{5}{8}$
Lübeck	1287	925
Mannheim	1286	924 $\frac{7}{10}$
Mecklenburg	1290	927 $\frac{3}{10}$
München	1280	920
Neapel	1161 $\frac{1}{2}$	834 $\frac{5}{6}$
Nürnberg	1346 $\frac{3}{4}$	968
Osnabrück	1238	889 $\frac{3}{4}$
Padua	1899	1364 $\frac{7}{8}$
Paris	1440	1035 $\frac{4}{5}$
Prag	1338	961 $\frac{2}{3}$
Rheinl. gemeiner Fuß	1391 $\frac{1}{5}$	1000
— geometr. oder Feldfuß	1669 $\frac{1}{2}$	1200
Riga	1215	873 $\frac{1}{4}$
Rom, alter Fuß	1306	938 $\frac{2}{3}$
— neuer F. oder Palma	990 $\frac{3}{10}$	711 $\frac{8}{10}$
Roſtock	1282	921 $\frac{3}{8}$
Rußland	1550	1114 $\frac{1}{5}$
Schweden	1316	945 $\frac{7}{8}$
Stettin	1253	900 $\frac{1}{2}$
Strasburg	1282 $\frac{3}{4}$	921 $\frac{3}{4}$
Turin	2277	1636 $\frac{7}{12}$

Ulm

Namen der Oerter.	wenn der Pariſer Fuß in 1400 Theile getheilt iſt.	wenn der gemeine rheinl. Fuß in 1000 Theile getheilt iſt.
Ulm	1281	$920\frac{3}{4}$
Venedig	1540	$922\frac{3}{8}$
Wien, Baufuß	$1411\frac{7}{10}$	$1014\frac{2}{3}$
— gemeiner Fuß	1400	$1006\frac{1}{4}$
Würtemberg	1278	$918\frac{9}{10}$
Zürch	1340	$963\frac{1}{8}$

Anmerkung.

Dieſe Tabelle ſtimmt mit der in Meinerts Feldmeßkunſt (Halle 179), bis auf einige Abänderungen, die ich der Güte einiger Recenſenten verdanke, überein. So iſt z. B. der Calenbergiſche Fuß ſeit 1765 mit dem Hannöveriſchen auf 1299 Theile vom Pariſer Fuß feſtgeſetzt worden. Möchten doch mehrere Recenſenten dieſem Beiſpiele folgen, und den Fuß ihres Ortes vollkommen genau in Theilen des Pariſer Fußes angeben. Durch dieſen Weg werden dergleichen Tabellen nach und nach vollkommner.

§ 199.

Gebrauch dieſer Tabelle.

Dieſe Tabelle enthält die Zahlen, wodurch die Füße in der erſten Rubrik in Theilen des Pariſer Fußes, und in der zweiten Rubrik in Theilen des gemeinen Rheinl. Fußes ausgedrückt werden.

1) Wer die Länge eines Pariſer Fußes beſitzt, $1391\frac{1}{5}$ ſolcher Theile auf einen gemeinen rheinl. Fuß nimmt, dieſe Fuß in 10 Zolle, den Zoll in 10 Linien, und die Linie in 10 Skrupel theilt, der hat einen gemeinen rheinl. Fuß in 1000 gleiche Theile getheilt. Hiernach kann man den Fuß eines jeden andern Orts entweder nach dem Pariſer oder dem rheinl. Fuße angeben, ſo wie dieſe die in der Tabelle ſtehende Zahlen ausdrücken.

Der

Der Pariſer Fuß verhält ſich demnach zum rheinl. gemeinen Fuß, wie 1440 : $1391\frac{1}{7}$.

Verlangt man nun z. B. zu wiſſen, wie viel 60 Berliner Fuße an Pariſer betragen; ſo ſchließt man:

1478 Pariſer = 1440 Berliner Fuß;

folglich ſind $\frac{1478}{1440}$ Berliner Fuß = 1 Pariſer Fuß; alſo $\frac{1478}{1440}$. 60 Berliner Fuß = 60 Pariſer Fuß.

Löſet man die Aufgabe wirklich auf, ſo hat man $\frac{1478.6}{144} = 61\frac{7}{12}$; folglich machen $61\frac{7}{12}$ Pariſer Fuß 60 Berliner Fuß.

2) Auf eine ähnliche Art kann man auch die Zahlen der zweiten Rubrike brauchen, wenn man den Fuß eines Ortes in 1000 Theilen des gemeinen rheinl. Fußes angiebt.

3) Iſt nicht nur die Größe oder Länge eines Fußes verſchieden von der Länge eines andern, ſondern beide Fuße haben auch eine verſchiedene Eintheilung; ſo muß man überdies noch folgende Reduktion vornehmen.

Will man z. B. wiſſen, was 3′ 2″ 1‴ Pariſer Decimalmaß, in Stettiner Duodecimalmaß beträgt, ſo ſind $\frac{1440}{1253}$. 3,21 Par. Fuß = 3,21 Stettiner Fuß; folglich $\frac{1440.3,21}{1253} = 3,7$, folglich machen 3′ 7″ Stettiner Decimalmaß, 3′ 2″ 1‴ Pariſer Decimalmaß. Verwandelt man nun dieſe 3′ 7″ Stettiner Decimalmaß, in Stettiner Duodecimalmaß, ſo erhält man nach dem Verhältniß 10 : 12.

$$10 : 12 = 3{,}7 : x$$

```
 10           12
----         ----
100           74
             37
          --------
     1)    444|4'
           0,0|

             44
             12
           ----
             88
           44
         ---------
     1)   5|28|5''
           |00|

             12
           ----
             56
           28
          --------
     1)   336|3'''
           00|
```

d. i. 3,7 Fuß Stettiner Decimalmaß macht $3'5''3'''$ Stettiner Duodecimalmaß.

§. 200.

Unterricht, wie man die Länge der Meßketten beſtimmt.

Die Meßketten enthalten insgemein eine Länge von einer Anzahl von fünf Ruthen. Zu den Vermeſſungen, ſie mögen nun Aecker, Wieſen oder Forſten betreffen, wird im Preußiſchen die Meßkette auf folgende Art beſtimmt. Man rechnet auf eine Ruthe 12 gemeine rheinländiſche Fuße. Die 12 gemeine rheinl. Fuße werden in einer geraden Linie aufgetragen, und in zehn gleiche Theile getheilt; jeder Theil macht nun einen geometriſchen Fuß aus, ſo

daß

daß eine ſolche Ruthe 10 dergleichen Fuße hat. Jeder Fuß wird bei Berechnungen in 10 Zolle, und jeder Zoll in 10 Linien ꝛc. getheilt, ſo daß die ganze Eintheilung Decimaleintheilung, und folglich das ganze Maß Decimalmaß wird. Nun machen $1391\frac{1}{7}$, 12mal genommen, 16694 Theile oder eine Ruthe; der 10te Theil oder Ein Fuß hat demnach beinahe $1669\frac{1}{2}$ Theile.

Damit nicht jeder Feld- oder Forſtmeſſer nöthig hat, dieſe Eintheilung ſelbſt zu machen, ſo vertheilen die Königl. Kammern Echellons zu einer halben oder einer ganzen Ruthe, wodurch alſo mit einem gleichförmigen Maße in allen den Provinzen gemeſſen wird, in welchen das rheinl. Maß Statt findet.

Hieraus kann man ſehen, wie man ſich in andern Staaten zu verhalten hat, wenn nicht beſondere geſetzliche Vorſchriften vorhanden ſind.

§. 201.

Zum praktiſchen Gebrauche kann man ſich folgende Eintheilungen der gemeinen Längenruthen bekannt machen, woraus die geometriſchen entſtehen, wenn man die Ruthe in zehn gleiche Theile, oder Fuße theilt.

Tabelle
woraus man die Eintheilung der Ruthen einiger Oerter in landesüblichen Fußen erſiehet:

Die Anſpacher Ruthe hält	.	12 Fuße
. Baſeler .	.	16 .
. Mark Brandenburger	.	15 .
. Braunſchweiger	.	16 .
. Calenberger	.	16 .
. Danziger	.	15 .
. Engliſche (Rod)	.	$16\frac{1}{2}$.
. Erfurtiſche	.	14 .

Die Gieſenſche Ruthe	.	16 Fuße
. Halliſche	. .	15 .
. Hamburger	. .	15 .
. Leipziger	. .	$15\frac{1}{8}$ =
. Nürnberger	.	16 .
. Pariſer	. .	18 .
. Pfälziſche	= .	16 .
. Rheinländiſche	= .	12 .
. Weimariſche	. .	16 .
. Würtenbergiſche	.	16 .

Anmerkung.

Die Klafter oder Lachter in Deutſchland muß nicht mit der Pariſer Klafter (Toise) verwechſelt werden; denn die rheinländſche Klafter hält 6 Fuß rheinl.; die Pariſer Toise aber 6 Pariſer Fuße. Da nun der Pariſer Fuß größer iſt, als der rheinländiſche, ſo iſt auch nochwendig die Pariſer Toise größer als die rheinl. Klafter.

1) Hiernach läßt ſich das Verhältniß der Ruthen verſchiedener Oerter gegen einander angeben. So iſt z. B.

Die Rheinl. Ruthe	:	Pariſer Ruthe, wie
$(1391\frac{1}{3} \cdot 12)$	:	$(1440 \cdot 18)$
oder 83472	:	129600.
Die Halliſche Ruthe	:	rheinl. Ruthe, wie
$(1279\frac{1}{2} \cdot 15)$	:	$(1391\frac{1}{3} \cdot 12)$

2) Verlangt man die Menge der Quadratfuße, die auf eine, nach der Tabelle eingetheilte Ruthe gehen, zu wiſſen; ſo darf man nur von der Zahl der Fuße, die jede Ruthe hält, die Quadratzahl machen, und es iſt z. B.

1 rheinl. Quadratruthe nach der gemeinen Eintheilung 12 . 12 oder 144 Quadratfuß.

1 halliſche Quadratruthe ebenfalls nach der gemeinen Eintheilung 15 . 15 oder 255 Quadratfuße.

3) Das Verhältniß der Qaadratruthen verſchiedener Oerter, erhält man, wenn man die Glieder, welche das Verhältniß der Längenruthen ausdrücken, quadrirt. So iſt z. B.

rheinl. Quadratruthe : Pariſ. Quadratruthe, wie
$(1391\frac{1}{3})^2 . 12^2 \quad : \quad 1440^2 . 18^2$;

Halliſche Quadratrut. : Rheinl. Quadratrut. wie
$(1279\frac{1}{2})^2 . 15^2 \quad : \quad (1391\frac{1}{3})^2 . 12^2$

§. 202.

Da es an einigen Orten gebräuchlich iſt, Längen nach Ellen zu beſtimmen, auch darnach die Größe der Ruthen anzugeben, ſo wird es nicht unnütz ſeyn, die Länge der Ellen einiger merkwürdiger Oerter in Pariſer Linien, wovon 144 einen Pariſer Fuß (Pied du Roi) ausmachen, anzugeben.

Tabelle

einiger Ellenmaße in Pariſer Linien, verglichen mit der Berliner Elle, die gleich Eins geſetzt wird.

Namen der Oerter.	Pariſer Linien 144=Fuß	Einer Berliner Elle ſind gleich
Achen 1 Elle . .	296	0,999
Amſterdam 1 Elle . .	304,6	0,970
Aurich 1 Elle . .	298,3	0,990
Berlin, Halle, Königsberg, Stettin 1 Elle	295,6	1,
Brabrant 1 Elle . .	306,5	0,964
Braunſchweig 1 Elle . .	253	1,168

Namen der Oerter.	Pariſer Linien 144=Fuß	Einer Berliner Elle und gleich
Breslau 1 Elle . .	243,8	1,212
Caſſel 1 Elle . .	248,8	1,138
Cölln 1 Elle . .	308	0,959
Copenhagen 1 Elle .	278,1	1,062
Cracau 1 Elle . .	273 2	1,082
Danzig 1 Elle . .	254,2	1,162
Dresden 1 Elle . .	250,9	1,176
Elbingen 1 Elle . .	250,2	1,181
Emden 1 Elle . .	297,2	0,994
Erfurt 1 große Elle . .	243,7	1,212
— 1 kleine Elle .	179	1,651
Frankfurt am Mayn .	239,2	1,235
Göttingen 1 Elle .	258	1,145
Gotha 1 Elle . .	250,6	1,179
Hamburg 1 Elle .	254	1,163
Hannover 1 Elle .	258	1,145
Königsberg 1 kleine Berliner Elle	253,2	1, 67
Leipzig . . .	250,6	1,179
Magedeburg 1 alte Elle .	258,6	1,143
Memel 1 Elle .	254,2	1,162
Nürnberg 1 Elle .	292,4	1,010
Prag 1 Elle . .	262,6	1,125
Regensburg 1 Elle .	395,5	0,822
Salzburg 1 Elle . .	445,8	0,663
Schleſien 1 Elle .	255,3	1,157
Thorn 1 Elle .	252,4	1,171
Warſchau 1 Elle .	273	1,082
Wien 1 Elle . .	344,5	0,858

Dieſe Tabelle kann wegen der Beſtimmung des Holzes ihren Nutzen haben, weil in manchen Orten Längen dieſer Art, in Ellen ausgedrückt werden. Weis man, daß der Fuß eines Ortes eine halbe Elle deſſelben Ortes beträgt, ſo laſſen ſich die Ellen auch leicht in Fuße des Ortes, wenn deren Länge ſonſt nicht ausgemittelt werden könnte, verwandeln.

§. 203.

In Abſicht der Münzen muß derjenige, der Geldverkehre oder Kaſſen unter den Händen hat, und die Münzen verſchiedener Länder aufnehmen, oder auszahlen muß, wenigſtens die in Deutſchland bekannten Münzfuße kennen, und auſſer dieſen noch von den gewöhnlichſten Europäiſchen Münzen Kenntniß haben.

Unter den in Deutſchland bekannten Münzfußen ſind die vorzüglichſten

1) Der Reichsfuß von 1559, nach welchem die Cöllniſche Mark zu 10 Gulden, $10\frac{1}{2}$ Kreuzer ausgemünzt wird. Nach dieſem iſt 1613 befohlen worden, die Mark feines Silber zu 9 rthlr. 2 gl. auszumünzen.

2) Der Zinniſche Fuß, nach welchem 1667 feſtgeſetzt wurde, daß die feine Mark auf $10\frac{1}{2}$ rthlr. oder 15 Gulden 45 Kreuzer ausgemünzt werden ſollte.

3) Der Leipziger Fuß, nach welchem 1690 beſtimmt wurde, die feine Mark zu 12 rthlr. oder 18 Gülden auszuprägen. Chur-Hannover iſt dieſem Münzfuße treu geblieben.

4) Oeſterreich und Bayern ſchloſſen im Jahre 1753 eine Convention, worin die feine Cöllniſche Mark Silber auf 20 Gulden und die Wiener Mark zu 24 Gülden auszumünzen feſtgeſetzt ward; dieſer Fuß ward auch von den Fränkiſchen und Schwäbiſchen Kreiſen angenommen.

Hierauf ward von den drei Kreiſen Franken, Bayern und Schwaben 1761 ein Münzabſchied aufgerichtet, nach welchem die feine Mark Gold in Dukaten zu 283 Gulden, 5 Kreuzer, $3\frac{47}{71}$ Pfennige, und die feine Mark Silber zu 20 Gulden ausgemünzt

münzt werden ſollten. Nach dieſem Maßſtabe muß der Conventionsthaler 2 Gulden und der Dukaten 4 Gulden 10 Kreuzer innern Werth halten.

Demungeachtet ward in dieſen Kreiſen in der Folge der 24 Guldenfuß eingeführt, und wird noch jetzt beibehalten.

Ueberhaupt hat man in Zahlungen auf folgende Münzfuße zu halten.

1) Auf den Reichsfuß von 1559 bis 1667.
2) — — Zinniſchen von 1667 — 1690.
3) — — Leipziger von 1690 — 1749.
4) — — Conventionsfuß 1763.
5) — — Frankfurter, welcher 20 p. C. geringer iſt, als der Conventionsfuß.

Es betragen demnach in Conventionsgelde

100 Thaler nach dem Reichsfuß	— 144 rthlr.	5 gl.	6 pf.
100 — — — Zinniſchen	— 123 —	9 —	6 —
100 — — — Leipziger	— 110 —	21 —	6 —
100 — — — Frankfurther	83 —	8 —	—

Auch thun 20 gl. Conventionsgeld 1 rthlr. nach dem Frankfurther oder 24 gl. Conventionsgeld 1 rthlr. 4 gl. $9\frac{3}{5}$ pf. Reichsgeld.

In den Preußiſchen Provinzen, vorzüglich in den Marken, im Magdeburgiſchen, Halberſtädtſchen und Pommern rechnet man nach Reichsthalern zu 24 guten Groſchen, à 12 Pfennigen, und der Werth derſelben wird nach dem Preußiſchen Courantfuße die Cölniſche Mark fein Silber zu 14 rthlr. beſtimmt.

In Preußen aber auch nach Gulden zu 30 Gr. à 18 Pf. preußiſch Courant, nach Timpfen zu

18 gl.

18 gl. preußiſch Courant. In den Weſtphäliſchen Provinzen werden die Reichsthaler nach Stüvern, Schillingen und Mariengroſchen ꝛc. beſtimmt. In Schleſien rechnet man die Reichsthaler zu 24 Silbergroſchen à 12 Denare ꝛc.

Anmerkung.

Aus dieſer Verſchiedenheit ſieht man, daß auch derjenige Förſter, der große Kaſſengeſchäfte hat, ſich mit dem verſchiedenen Werthe der Münzen aller der Provinzen bekannt machen muß, mit welchen er zu thun hat, und ſich Tabellen nach dem Münzfuße entwerfen kann, nach welchem er überhaupt ſeine Kaſſe halten und Rechnung führen muß.

Die Geographie oder Statistik der verſchiedenen Länder und Provinzen enthalten zum Theil hiervon die ſicherſten Nachrichten, wenigſtens ſollte man in dergleichen Schriften genaue Auskunft erhalten. Zu den beſſern für den Preußiſchen Staat gehört: Die Erdbeſchreibung der Preußiſchen Monarchie von M. F. G. Lonhardi (Halle 1791 bis 1796) in Abſicht der Preußiſchen Münzen der 1te Band. Sachſen u. a. Provinzen haben ähnliche Schriften.

Tabellen von den vornehmſten Münzen nach ihrem gangbaren Werthe, findet man in folgender Schrift: Vergleichung der gewöhnlichſten Maße, Gewichte und Münzſorten; aus den beſten Autoren zuſammengetragen, verglichen und herausgegeben von J. C. W. Dresden 1787.

§. 204.

Die Gewichte der verſchiedenen Oerter ſind dem praktiſchen Forſtmanne ebenfalls zu wiſſen nöthig, weil theils Hölzer, theils Holzſämereien nach Gewichten beſtimmt, verkauft, und alſo auch darnach verrechnet werden.

Die Gewichte der Körper werden gewöhnlich nach Pfunden Handlungs- oder Kramergewicht, und im Großen nach Centnern beſtimmt. Ein dergleichen Pfund wird in 32 Loth, ein Loth in 4 Quentchen, und ein Quentchen in 4 Pfenniggewichte getheilt. Auf einen Centner rechnet man 110 Pfund.

Das Apotheker Pfund hat 12 Unzen, eine Unze 8 Drachmen, eine Drachme 3 Skrupel und ein Skrupel 20 Gran. Beim Golde, Silber und den Edelſteinen kommen noch andere Gewichtsnamen und Eintheilungen vor.

Folgende Tabelle enthält die Pfunde verſchiedener Oerter theils nach Leipziger Granen, deren 7680 ein Leipziger Pfund ausmachen, theils nach Aſſen des holländiſchen Troygewichts, 9728 aufs Pfund, berechnet.

Tabelle

zur Vergleichung der Pfunde.

Ein Pfund in	wiegt in Leipziger Granen	wiegt in Aſſen holl. Troygewicht.
Achen .	7710	9728
Amſterdam .	8125	10279
Anſpach .	8375	10608
Antwerpen .	7710	9697
Bamberg .	7976	10103
Bauzen .	7130	9020
Bayreuth .	8502	10770
Berlin . .	7697	9748
Braunſchweig .	7680	9716
Bremen . .	8100	10380
Breslau .	6667	8434
Cadix . .	7560	9580
Caſſel . .	5202	6589
Cölln am Rhein	7680	9728
Cracau . .	6660	8426
Danzig . .	7163	9062

Ein Pfund in	wiegt in Leipziger Granen	wiegt in Aſſen holl. Troysgewicht
Dresden . .	7680	9716
Erfurt . .	7754	9822
Erlangen .	8375	10608
Frankfurt am Mayn	7680	9720
Frankfurt a. d. Oder	7688	9738
Halle . .	7697	9748
Hamburg .	7980	10080
Hannover .	7977	10129
Königsberg neu Gewicht	7695	9748
Leipzig . .	7680	9716*
Lion . .	6885	8840
Livorno . .	5605	7131
London . .	7434	9439
Lübeck . .	7950	10059
Lüneburg .	8000	10125
Magdeburg .	7695	9748
Mannheim .	8130	10299
München . .	9225	11671
Nürnberg .	8385	10610
Paris . .	8065	10202
Prag . .	8450	10690
Regenſpurg .	9225	11671
Riga . .	6878	8701
Salzburg .	9210	11652
Speier . .	8375	10608
Turin . .	6063	7680
Ulm . .	7710	9754
Venedig groß Gewicht	7845	9955
Warſchau klein Gewicht	6215	7863
Wien . .	9215	11672
Würzburg .	7836	9926
Zürich . .	8693	10972

Anmerkung.

*) Das Leipziger. Pfund, welches der Herr von Clausberg zur Vergleichung gebraucht hat, ſoll um 12 Aß leichter geweſen ſeyn, als das Cöllniſche, was ſich aber nach verſchiedenen Tabellen, wenn man ſie mit einander vergleicht, nicht ganz zu beſtätigen ſcheint. Hiernach müßte das Cöllniſche Pfund, da es mit

mit dem Leipziger 7680 Leipziger Gran wiegt, auch 9716 aber nicht 9728 Aſſe in holländiſchem Troygewicht, ſchwer ſeyn.

§. 205.

Der Gebrauch dieſer Tabelle bezweckt die Verhältniſſe, nach welchem Pfunde verſchiedener Oerter in einander verwandelt werden können. Es verhält ſich demnach das Pariſer Pfund zum Londner Pfunde (beide in Leipziger Granen ausgedrückt) wie 8065 : 7434, oder es ſind 7434 Pariſer Pfunde gleich 8065 Londner Pfunden.

Auch verhält ſich das Pariſer Pfund zum Berliner Pfunde (beide in Aſſen holländiſch Troygewicht ausgedrückt), wie 10202 : 9748, oder es machen 9748 Pariſer Pfund 10202 Berliner Pfunde. Dieſer letzte Satz iſt auch hier der Reduktionsſatz, und da auf 1 Pfund Pariſer, $\frac{9748}{10202}$ Berliner Pfunde gehen, dieſe letzte Zahl die Reduktionszahl. Will man wiſſen, wie viel 24 Londner Pfunde in Pariſer Pfunden betragen, ſo ſchließt man 8065 L. Pf. : 24 L. Pf. = 7434 P. Pf. : x Pariſer Pfund. Und es

iſt $x = \frac{24 \cdot 7434}{8065} = 22 \frac{986}{8065}$ Par. Pf.

Anmerkung.

Auch kann man hiermit die Vergleichung der gewöhnlichſten Maße, Gewichte und Münzſorten (§. 202. und 203. in der Anmerk.) zu Rathe ziehen, worin man die Gewichtsvergleichung viel vollſtändiger findet.

§. 206.

Die Flächeninhalte der Forſten werden gewöhnlich in Quadratruthen, und Quadratfußen ausgedrückt, weil die kleinſten Abtheilungen auf der Meß-

kette

kette Fuße ſind. An manchen Ort wird auch wohl der Flächeninhalt in Quadratellen angegeben, die ſich denn, wenn die Elle zwei landesübliche Fuße hält, zu dem Quadratfuße verhalten, wie $1^2 : 2^2$, d. i. wie 1 zu 4.

Bei großen Forſten, ſo wie überhaupt bei großen Flächen, drückt man die Inhalte durch größere Flächenmaße aus, um die Zahlen nicht zu ſehr in den Ausdrücken anzuhäufen.

Aus folgender Tabelle kann man eine Menge Namen von größeren Flächenmaßen, und zugleich ihr Verhältniß zu den landesüblichen Quadratruthen ſehen, welche man, wenn es die Umſtände erlauben oder nöthig machen, Statt der kleinern Maße, nämlich Statt Quadratruthen und Quadratfuße zur Angabe der Größe einer Fläche brauchen kann.

Ein Anſpacher Morgen	hält	360 R^2
— Baſeler Juchart	—	140 —
— alter Morgen in der Churmark	—	300 —
— Mark-Brandenburgiſche Hufe	—	30 Morgen
— Braunſchweig. Morgen	—	120 R^2
— — — Vorling	—	$\frac{1}{2}$ Morgen
— — — Drohne	—	$\frac{3}{4}$ —
— Calenberg. Morgen.	—	120 R^2
— Danziger Morgen	—	300 —
— Engliſcher Acker (Acre)	—	160 —
— Erfurter Morgen	—	168 —
— Franzöſ. Arpent	—	100 —
— Journal oder Tagewerk in Bourdeaux	—	888 Q. Toiſen
— Gieſenſcher Wald- und Feldmorgen	—	160 R^2

Ein

Ein halliſcher Wieſenacker	—	200 R^2
— — Feldacker	—	300 —
(Der halliſche Feldacker iſt 60 halliſche Ruthen lang und 5 Ruthen breit).		
— Hamburger Morgen	—	600 —
(Ein ſolcher Hamburger Morgen iſt 120 Ruthen lang und 5 Ruthen breit).		
— Leipziger Acker	—	300 R^2
— Magdeburgiſ. Morgen	—	180 —
(Die Längenruthe zu 12 gemeinen rheinl. Fußen gerechnet).		
— Magdeburgiſche Hufe	—	30 Morgen
— Nürnberger Wald- und Feldmorg. oder Tagewerk	—	200 R^2
— Pommerſcher Morgen	—	440 R^2 rheinl.
— Rheinländiſcher Morg.	—	120 R^2
— — Waldmorgen	—	160 —
— Sächſiſcher Morgen	—	150 —
— — Acker	—	2 Morgen
— Sächſiſche Hufe hält verſchieden		12, 15, 18, 24 bis 30 Acker
— Weimariſ. Acker Holz	hält	160 R^2
— Würtenbergiſ. Morgen	—	150 R^2

Anmerkung.

Andere, entweder unbeſtimmte Maße, oder ſolche, welche bei der Angabe des Inhalts eines Forſtes oder Waldes vorkommen, ſchreiben die Forſtvermeſſungsreglements beſonders vor. Die aufgeführte Tabelle kann jedoch zu Vergleichungen dienen.

§. 207.

Auſſer dem §. 94. erwähnten Decimal Körpermaße, nämlich der Kubikruthen, Kubikfuße, worin nicht nur der Inhalt der geometriſchen Körper, ſondern auch gewöhnlich der Inhalt der Holzſtämme, der

Klaſ-

Klaftern ausgedrückt wird, giebt es noch einige andere Körpermaße, die hier erwähnt zu werden verdienen, weil ſie in der Ausübung, und vorzüglich im Forſtweſen nicht ſelten gebraucht werden.

Zu den Körpermaßen auſſer dem gewöhnlichen Kubikmaße, gehöret:

1) Das Balkenkörpermaß. Ein Balken oder Stab hat zwei entgegengeſetzte Grundflächen, die einerlei Größe und Figur haben, und vier Seitenflächen, wovon jede zwei entgegengeſetzten ebenfalls einander gleich ſind, und einerlei Größe haben, und gewöhnlich ſchneiden ſich alle rechtwinklig; und nur ein ſolcher Körper, der in der Geometrie ein rechtwinkliges Parallelepipedum, im gemeinen Leben aber ein Balken heißt, wird als Maßkörper angenommen. Iſt die Grundfläche eines Balkens ein Quadrat, deſſen Seite 1 F iſt, ſo iſt der Inhalt dieſes Quadrats, der Quadratzahl der Seite gleich, d. i. 1 F^2; wird nun die Höhe 10 oder 12 Fuß oder 1 Ruthe gewählt, ſo hat man im Produkte der Grundfläche, im erſten Falle eine Decimalbalkenruthe, im zweiten aber eine Duodecimalbalkenruthe. Da in der Baukunſt das Duodecimalmaß vorkommt, ſo wird die Größe eines Balkens im Forſte ebenfalls nach Duodecimalmaß, und zwar nach Duodecimalbalkenkörpermaß beſtimmt. Nun iſt 1 . 12 = 12; alſo hat die Balkenruthe 12 Kubikfuß Inhalt oder Größe; der Balkenfuß 12 Kubikzolle; der Balkenzoll 12 Kubiklinien. Man ſieht alſo, daß der Name des Balkenkörpermaßes von der Höhe oder Länge des Balkens abhängt und die Grundfläche der Balkenruthe 1 Quadratfuß, die Grundfläche des Balkenfußes 1 Quadratzoll, die Grundfläche des Balkenzolles aber 1 Quadratlinie iſt. Werden Balken, viereckige Wandſäulen, Pfoſten, Träger, Ober- und Unter-

Unterzüge ꝛc. nach einer vorgeſchriebenen Größe in Balkenkörpermaße aus einem Forſt verlangt, ſo kann der Förſter ſie nach vorgeſchriebener Größe ausſuchen und abliefern.

2) Das Cylindermaß. Ein Cylinder oder eine Rundſäule die einen Fuß im Durchmeſſer, ſo wie einen Fuß Höhe hat, heißt ein Cylinderfuß, und ein Cylinder, deſſen Durchmeſſer ſowohl, als die Höhe einen Zoll beträgt, ein Cylinderzoll. Da Bäume zu Mühlwellen, zu Röhren ꝛc. in dieſer Form vorkommen, ſo wird ihr Inhalt durch geometriſche Berechnungen bisweilen in Cylinderfüßen ausgedrückt.

3) In Preußen wird beim Holzhandel das Nutzholz, nämlich Stab- oder Faßholz insgemein nach folgendem Verhältniſſe berechnet:

Große Tauſend	Kleine oder ord. Tauſend	Ringe	Große Hundert	Kleine Hundert	Schock	Steigen	Stück oder Stäbe
1	$1\frac{1}{5}$	5	10	12	20	60	1200
	1	$4\frac{1}{6}$	$8\frac{1}{2}$	10	$16\frac{2}{3}$	50	1000
		1	2	$2\frac{2}{5}$	4	12	240
			1	$1\frac{1}{5}$	2	6	120
				1	$1\frac{2}{3}$	5	100
					1	3	60
						1	20

Auf den Ring Stabholz von 4 Schock oder 240 Stäbe werden wegen der darunter etwa befindlichen Wrackſtäbe gewöhnlich noch 8 Stäbe zugegeben, und man rechnet das Maß

Der Pipenſtäbe 5 Fuß lang, 1 à $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und 4 à 5 Zoll breit.

Der

Der Orthofſtäbe 4 Fuß lang, 1 à $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und 4 Zoll breit.

Der Tonnenſtäbe $2\frac{2}{3}$ à 3 Fuß lang, 1 à $1\frac{1}{4}$ Zoll dick und 4 Zoll breit.

Der ganzen Faßſtäbe $4\frac{1}{2}$ Fuß lang, 1 à $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und 4 à 5 Zoll breit.

Der halben Faßſtäbe $3\frac{1}{2}$ Fuß lang, à $1\frac{1}{4}$ Zoll dick und 4 Zoll breit.

Der Bodenſtäbe 5 à 7 Zoll breit.

Dabei vergleichet man 2 Ringe Orthofſtäbe mit 2 Ringen Pipenſtäbe und 2 Ringe Tonnenſtäbe mit 1 Ringe Pipenſtäbe, wornach alſo der Ring 4 Schock Pipen-, 6 Schock Orthof-, und 8 Schock Tonnenſtäbe hält. Eben ſo rechnet man auch 4 Schock Quadrat Orthof- oder Tonnenbodenſtäbe auf 1 Ring, und verſtehet unter dem Quadrate 3 bis 4 Stück nach der Beſchaffenheit der Breite zuſammengelegte Bodenſtäbe.

Auch verkauft man das Stabholz nach Schocken, und rechnet

auf 1 Schock gewrackte 60, und

— 1 — ungewrackte 62 Stäbe, ſo daß 1 Ring ungewrakt Stabholz immer 248 Pipen-, 372 Orthof- oder 496 Tonnenſtäbe beträgt. Franz- und Klappholz, desgleichen Fichtendielen, Sparr- und Bohlhölzer werden ebenfalls nach obigem Verhältniſſe verkauft, auf ungewracktes Franz- und Klappholz aber wohl bis 64 Stück oder Kloben gegeben.

Eichen, Schiffsholz und Planken, Fichtenbalken und Maſten, ſo wie alle Holzarten, die man nicht nach der Zahl verkauft, werden meiſtens mit rheinländiſchem Fußmaße nach ihrem kubiſchen Inhalte gemeſſen und verkauft, wozu man ſich im Preußiſchen des Duodecimalmaßes bedient, nach welchem der Kubikfuß 1728 Kubikzolle; der Kubikzoll 1728 Kubiklinien ꝛc. enthält.

Das Brennholz endlich wird nach Klaftern, Faden, Haufen und andern, meiſt willkührlichen Maßen verkauft.

Das Brennholzmaß iſt z. B. in Berlin der Haufen, welcher zu $4\frac{1}{2}$ Klafter von 6 Fuß Höhe und 6 Fuß Breite gerechnet wird. Ein ſolcher Haufen muß verordnungsmäßig 9 Fuß hoch ſeyn und 18 Fuß Länge haben. Rechnet man ihn zur gewöhnlichen Klobenlänge von 3 Fuß, ſo enthält er 486 Kubikfuß, zu $3\frac{1}{2}$ Fuß Klobenlänge aber 576 Kubikfuß.

Das Stadtfuder Holz zu Berlin 1 Klafter;

Das große Bauerfuder zu $\frac{2}{3}$ Klafter;

Das kleine Bauerfuder zu $\frac{1}{3}$ Klafter; und

Das Schock Reißholz zu $\frac{1}{3}$ Klafter.

Allgemeine Anmerkung.

Aus den angeführten Maßen verſchiedener Oerter ſieht man wenigſtens, auf was man Rückſicht zu nehmen nöthig hat, wenn man auf irgend eine Art Anwendung zu machen gedenkt. Beſondere Verordnungen, Reglements und Vorſchriften ſetzen den Forſtmann in den Stand, an Ort und Stelle die Maße zu brauchen, nach welchen es die geſammte Staatswirthſchaft für nöthig findet. Eben ſo verhält es ſich mit den Gewichten, Münzen u. dergl.

B.

Die umgekehrte einfache Regel Detri.

§. 208.

Die umgekehrte einfache Regel Detri iſt von der geraden oder gemeinen bloß darin verſchieden, daß man nicht zu den erſten drei gegebenen Proportionalzahlen, die

die vierte, ſondern zu der gegebenen zweiten, dritten und vierten, die erſte ſucht. Man nennt dieſe Regel Detri die umgekehrte deswegen, weil das zweite und dritte Glied der geraden Regel Detri, hier die Stelle der beiden erſten Glieder vertreten, und das erſte Glied in jener, das dritte Glied in dieſer wird. Befolgt man dieſe Vorſchrift, und ordnet die Glieder ſo, wie ſie die umgekehrte Regel Detri verlangt, ſo kann jede hieher gehörige Aufgabe dennoch nach §. 176. aufgelöſet werden.

Da aber dieſes wechſelsweiſe Verhältniß nicht aus der Größe der gegebenen Zahlen allein gefolgert werden kann, indem es in der Natur der gegebenen drei Glieder gegründet iſt, ſo muß man jeden Fall oder jede gegebene Aufgabe dieſer Art wohl unterſuchen, ob ſie ein umgekehrtes Verhältniß zulaſſen, oder nicht.

Im Allgemeinen kann man ſich folgende Regel merken:

1) Iſt das erſte Glied kleiner, als das dritte, und verlangt die Natur der Sache, daß das vierte kleiner werden müſſe, als das zweite;

2) Iſt das erſte Glied größer als das dritte, und die Natur der Sache erfordert auch hier, daß das vierte größer ſeyn müſſe, als das zweite: ſo gehört die Aufgabe in die umgekehrte Regel Detri.

§. 209.

Aufgabe.

Man ſoll zu drei gegebenen Proportionalzahlen die erſte nach der umgekehrten Regel Detri finden.

Auflöſung.

1) Man ordne die drei gegebenen Zahlen nach §. 208. ſo daß das dritte Glied zum erſten, das erſte aber zum dritten wird.

2) Multiplicirt man nun nach §. 76, das zweite Glied mit dem dritten, und dividirt das Produkt durch das erſte, ſo iſt dies eben ſo viel, als wenn man die beiden erſten Glieder multiplicirt, und das Produkt durch das dritte dividirt hätte. Der Quotient giebt das geſuchte vierte, und in der ungeänderten Proportion das erſte Glied.

Beiſpiele.

Es haben 40 Tagelöhner um ein Stück Forſtrevier innerhalb 24 Tagen einen Graben gezogen, um das Wild abzuhalten, daß es dem jungen Anfluge nicht ſchaden könne; da nun aber ein noch eben ſo großes Stück mit einem eben ſo großen Graben umgeben werden ſoll, und 60 Tagelöhner dazu beſtimmt ſind, um die Arbeit in etwas kürzerer Zeit zu vollenden, ſo iſt die Frage: In wieviel Tagen wird dieſer Graben fertig ſeyn? In 16 Tagen.

Der gemeine Anſatz iſt dieſer:

40 Tagelöhner : 24 Tagen = 60 Tagelöhner : x Tagen; hier giebt die Natur der Sache ſogleich, daß man in weniger als 24 Tagen die Arbeit vollenden müſſe, weil 60 Tagelöhner arbeiten, und 40 Tagelöhner ſchon in 24 Tagen fertig waren; demnach muß die geſuchte Zahl kleiner werden, als das zweite Glied. Es gehört alſo dieſe Aufgabe zur umgekehrten Regel Detri. Man ordne demnach die Glieder nach No. 1.

60 Tagelöhner : 24 Tagen = 40 Tagelöhn. : x Tagen.

```
      40
   ------
6) 96∅ | 16 Tage
   6.∅ |
   --
   36
   36
   --
    0
```

Oder: Man laſſe den Anſatz unverändert, und verfahre nach der zweiten Regel in No. 2.

40 Tagelöhner : 24 Tagen = 60 Tagelöhn. : x Tagen.

```
      40
   ------
6) 96∅ | 16 Tage.
   6.∅ |
   --
   36
   36
   --
    0
```

```
                   20
Kürzer: 4∅ : 24 = 60
         2 :  8    3
         16 Tage
```

Anmerkung.

Brüche, mehrerleinamige und gemiſchte Zahlen ꝛc. laſſen auch hier die Veränderungen und Abkürzungen zu, welche bei der geraden oder gemeinen Regel Detri ſtatt finden.

Es giebt zwei Horſte von gleicher Größe in einem Walde, die eine iſt 365 Ruthen lang und 120 Ruthen breit; die andere aber iſt 406 Ruthen lang; wie groß muß ihre Breite ſeyn? 107 Ruthen 8 Fuß 8 $\frac{36}{201}$ Zoll Decimalmaß.

$$365 : 120 = 406 : x$$

```
          120
        ------
         7300
         365
      ----------
406)   43800 | 107 Ruthen
       406
       ----
        3200
        2842
       -------
         358
          10
      --------
406)   3580 | 8 Fuß
       3248
       -----
        332
         10
       -----
406)   3320 | 8 36/203 Zoll.
       3248
       -----
          2
         72 | 36
        --- | ---
        406 | 203
```

Oder:

Oder:

```
406 : 365 = 120 : x
            120
         ---------
          7300
         365
       -----------
406)  43800 | 107 Ruthen.
      406
      -----
       3200
       2842
      --------
        358
          10
     -----------
406)   3580 | 8 Fuß.
       3248
      --------
         332
          10
      ---------
406)    3320 | 8 36/203 Zoll.
        3248
        --------
           2
         72 | 36
        --- | ---
        406 | 203
```

Anmerkung.

Hier tritt der Fall §. 208. No. 1 ein.

Es vollenden 60 Arbeiter während 16 Tagen irgend ein Werk; wie viel Tage würden 40 Arbeiter darüber zugebracht haben? 24 Tage.

60 Arbeiter : 16 Tagen = 40 Arbeiter : x Tagen oder 40 Arbeiter : 16 Tagen = 60 Arbeiter : x Tagen.

$40 : 16 = 60 : x$ Oder $4\not{0} : \not{1}\not{6} = 6\not{0} : x$

$4 \cdot 6 = 24$ Tage.

```
      60
   ------
4) 96ø | 24 Tage.
      ø
```

Anmerkung.

Hier iſt der Fall §. 208. n. 2.

Auf einem Reviere ſind zwei Wieſen von gleicher Größe. Die eine davon iſt 406 Fuß lang und $107\frac{197}{203}$ Fuß breit; die andere aber nur 365 Fuß lang; die Frage iſt: Wie breit die letztere ſei? 120 Fuß.

406′ lang $107\frac{197}{203}$′ breit = 365′ lang

```
              500          203
              214         -----
            -------        1095
             21900         730
              406         -----
            -------        74095
            131400
             876
          ---------
74095)  889140ø | 120 Fuß breit.
         74095
        --------
         148190
         148190
        --------
              0
```

Jemand will ſich ein Kleid von feinem Tuche machen laſſen, wozu 5 Ellen nöthig ſind. Nun ſoll das Kleid durchgängig mit Felbel gefüttert werden, der nur $2\frac{1}{4}$ Elle breit iſt, da das Tuch $2\frac{1}{2}$ Elle breit liegt; die Frage iſt: wieviel ſind Ellen Futter nöthig? 20 Ellen.

Man ſetzt: $2\frac{1}{2}$ Elle $= \frac{20}{8}$; $2\frac{1}{2}$ Viertel $= \frac{5}{8}$ Ellen,

alſo $\frac{20}{8}$ breit : 5 Ellen lang $= \frac{5}{8}$ breit

d. i. $\not{2}\not{0} : 8 = 5$

$4 \cdot 5 = 20$ Ellen lang.

Ferner:

Ferner: Wenn der Thaler zu 24 gr. und der Goldgülden zu 30 gr. gerechnet wird; wieviel Goldgülden geben 300 Thaler? 240 Goldgülden.

Wenn der Meißniſche Gülden zu 21 gr. und der Thaler zu 24 gr. gerechnet wird; wieviel geben 600 Mfl. an Thalern? 525 Thaler.

Ein Waldbeſitzer will um ſein Gehege einen Stangenzaun machen laſſen. Wenn 4 Arbeiter arbeiten, ſo werden ſie in 40 Tagen fertig. Da nun aber, 10 Arbeiter angeſtellt werden können, in wieviel Tagen werden dieſe damit fertig? In 16 Tagen.

Jemand will innerhalb 8 Tagen einen abgeſteckten Fleck in ſeinem Reviere von den Stuppen gereiniget und den Fleck zur Holzſaat zugerichtet haben, an welchem 16 Mann 20 Tage lang vollauf zu thun hätten, wenn es die Zeit litte; es iſt die Frage: Wieviel Mann müſſen angeſtellt werden, damit die Arbeit in den vorgeſchriebenen 8 Tagen zu Stande komme? 40 Mann.

II.

Die zuſammengeſetzte Regel Detri.

§. 210.

Die Aufgaben der zuſammengeſetzten Regel Detri und insbeſondere der geraden gründen ſich insgeſammt auf die einfache gerade Regel Detri, und die Auflöſung derſelben beſteht in der Ausübung folgender Regeln;

1) Man ſetzt die fünf gegebenen Glieder in Zahlen nach ihrer Ordnung hintereinander;

2) ſodann multiplicirt man die beiden erſten Glieder mit einander, und das Produkt giebt das erſte Glied der einfachen geraden Regel Detri.

3) Multiplicirt man nun auch das vierte und fünfte Glied, ſo giebt das Produkt das dritte Glied der einfachen geraden Regel Detri; demnach ſind die fünf gegebenen Glieder in drei verwandelt.

4) Macht man nun das Produkt des zweiten und dritten Gliedes, und dividirt daſſelbe durch das erſte Glied, ſo giebt der Quotient das ſechste Glied, oder die geſuchte Zahl (§. 194.).

§. 211.

Findet man, nach Beurtheilung der Natur der Aufgabe, (§. 208.) daß ſie zu der umgekehrten zuſammengeſetzten Regel Detri gehört, ſo befolge man bei der Auflöſung der Aufgabe folgende Regeln:

1) Man ſetzt die fünf gegebenen Glieder in Zahlen nach ihrer Ordnung hinter einander;

2) Dann multiplicire man das erſte Glied mit dem fünften, ſo giebt das Produkt das erſte Glied der einfachen geraden Regel Detri;

3) Multiplicirt man eben ſo das vierte Glied mit dem zweiten, ſo giebt das Produkt das dritte Glied der einfachen geraden Regel Detri;

4) Macht man nun das Produkt des zweiten und dritten Gliedes, und dividirt daſſelbe durch das erſte Glied, ſo giebt der Quotient das ſechste Glied, oder die geſuchte Zahl (§. 194.).

A.

Die zuſammengeſetzte gerade Regel Detri.

§. 212.

Aufgaben.

6 Klaftern Holz werden auf 7 Meilen weit zu fahren mit 9 Thalern gedinget. Wieviel Thaler wird man aber

aber nach dieſem Gedinge geben müſſen, wenn 24 Klaftern 6 Meilen weit verfahren werden? $30\frac{6}{7}$ Rthlr.

Der Anſatz iſt nach §. 210. dieſer:

6 Klaftern 7 Meilen : 9 Thalern = 24 Klaſt. 6 Meilen : x

$$\begin{array}{l} 7 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 \\ \hline 144 \end{array}$$

d. i. $42 : 9 = 144 : x$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 42)\ 1296 \mid 30\tfrac{36}{42} = 30\tfrac{6}{7} \text{ Rthlr.} \\ 126 \\ \hline 36 \end{array}$$

Abgekürzt: $\frac{6.7}{42} : 9 = \frac{24.6}{144}$

$$\begin{array}{r} 6)\ 7 : 9 = 24 \\ 9 \\ \hline 7)\ 216 \mid 30\tfrac{6}{7} \text{ Rthlr.} \\ 21 \\ \hline 6 \end{array}$$

Oder $\not{6} . 7 : 9 = 24 . \not{6}$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 7)\ 216 \mid 30\tfrac{6}{7} \text{ Rthlr.} \end{array}$$

Es hat Jemand auf ſeinem Reviere ein Stück Rodeland, welches 24 Ruthen lang und 55 Fuß breit iſt. Nun iſt bekannt, daß auf eine Fläche von 4 Ruthen Länge und 4 Ruthen Breite, eine Metze Fichtenſaamen ausgeſäet werden muß; wieviel Saamen wird nun das beſchriebene Stück Rodeland erfordern? $8\frac{1}{4}$ Metze.

Anmerkung.

Da hier Ruthen und Schuhe oder Fuße in einerlei Gliede vorkommen, ſo müſſen die Ruthen vor der Auf-

löſung

löſung durchgängig in Fuße verwandelt, oder überhaupt dasjenige, was unter verſchiedenen Namen gegeben iſt, muß unter gleiche oder einerlei Benennung gebracht werden.

4 Ruth. L. 4 Ruth. B. : 1 Metze = 24 R. L. u. 55 F. B. : x

```
 10        10                     10
40 Fuß    40 Fuß                 240 Fuß
          40                      55
        1600                    1200
                                 120
                          16)  132ØØ | 8 1/4 Metze
                               128ØØ
                                  4
                                 ── = 1/4.
                                 16
```

Oder: $4\not{0} \cdot 40 : 1 = 240 \cdot 55 : x$

```
     2) 20    40) 6      3
              2) 3   20)165 | 8 5/20 oder 8 1/4 Metze.
```

Ferner: Eine Fläche, 240 Fuß lang und 55 Fuß breit erfordert $8\frac{1}{4}$ Metze Fichtenſaamen; wieviel wird man ſolchen Saamen nöthig haben, wenn man eine Fläche, 40 Fuß lang und eben ſo breit, beſäen will? 1 Metze.

240′ lang . 55′ breit : $8\frac{1}{4}$ Metze = 40′ lang . 40′ breit : x

```
  55             33          40
1200             16         16ØØ
1200            198
132ØØ            33
   4      528)  528 | 1 Metze.
528             528
                  0
```

Wenn

Wenn 24 Klaftern Holz 6 Meilen wegzuſchaffen mit 30$\frac{6}{7}$ Rthlr. bezahlt werden; was wird man für 6 Klaftern, um ſolche 7 Meilen fortzuſchaffen, bezahlen müſſen? 9 Thaler.

Es macht Jemand mit einem Maurer ein Gedinge, für eine Mauer, die 12 Fuß lang, 6 Fuß dick, und 9 Fuß hoch iſt, 9 Thaler aufzumauern zu bezahlen. Nun ſoll auf irgend einem Jagdrevier ein Thiergarten gebauet werden, deſſen Umfang 880 Fuße in der Länge betragen ſoll. Wenn nun dieſe Mauer 3 Fuß dick und 9 Fuß hoch wird; was wird die geſammte Maurerarbeit nach dieſem Gedinge betragen? 330 Thaler.

12′lang 6′dick 9′hoch. 9 Th. = 880′lang 3′dick 9′hoch : x

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ \hline 72 \\ 9 \\ \hline 648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 880 \\ 3 \\ \hline 2640 \\ 9 \\ \hline 23760 \\ 9 \\ \hline \end{array}$$

$$648)\ 21384\not{0}\ |\ 330\ \text{Thlr.}$$

$$\begin{array}{r} 1944 \\ \hline 1944 \\ 1944 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\not{1}\not{2} . \not{6} . \not{9} : \not{9} = \not{8}\not{8}\not{0} . \not{3} . \not{9}$$

$$\begin{array}{c} 4 . 2 \\ \hline 8 \end{array} \qquad 3 . 110 = 330\ \text{Thaler.}$$

Endlich: 3 Arbeiter können innerhalb 9 Tagen einen Graben von 36 Ruthen aufwerfen; wieweit werden 5 Arbeiter in 3 Tagen mit dieſer Arbeit kommen? 20 Ruthen.

$$\not{3} . \not{9} : \not{3}\not{6} = 5 . \not{3}$$

$$4 . 5 = 20\ \text{Ruthen.}$$

B.

B.

Die zuſammengeſetzte umgekehrte Regel Detri.

§. 213.

Aufgabe.

Einen Graben von 20 Ruthen um einen Hegefleck zu ziehen, werden in 3 Tagen 5 Arbeiter erfordert; wieviel Arbeiter ſind nöthig, einen Graben von 36 Ruthen innerhalb 9 Tagen aufzuwerfen? 3 Arbeiter.

Anmerkung.

Da hier das erſte und zweite Glied **kleiner** iſt, als das vierte und fünfte, und der Natur der Aufgabe nach das **ſechste** Glied nothwendig kleiner ſeyn muß, als das dritte; ſo gehört dieſe Aufgabe nach §. 208. in die **umgekehrte zuſammengeſetzte Regel Detri**. Denn würde ſie nach der **geraden** aufgelöſet, ſo würde die geſuchte Anzahl der Arbeiter 27 betragen, welches aber gegen allen Sinn der Aufgabe ſtritte.

Auflöſung.

Man verfahre nach §. 211. und befolge die dort gegebenen Regeln auf folgende Art:

20 Ruth. 3 Tage : 5 Arbeiter = 36 Ruthen . 9 Tage : x

```
  9                    3
 ---                  ---
 180                  108
                        5
                     -----
                18)  540 | 3 Arbeiter
                     540
                     ---
                       0
```

Abge-

Abgekürzt: $20 . \not{3} : 5 = 36 . \not{9} . 3$

$$\frac{3}{60} \qquad \frac{5}{6)\ 180 \mid 3 \text{ Arbeiter}}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \hline 0 \end{array}$$

Oder: $\not{2}\not{0} . 3 : 5 = \not{3}\not{6} . \not{9}3$

$$\frac{5 . 3 \quad = \quad 9 . 5}{15 \qquad 15)\ 45 \mid 3 \text{ Arbeiter}}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ferner: 36 Ruthen würden von 9 Arbeitern innerhalb 9 Tagen ausgerodet und von Stöcken rein gemacht; wieviel Arbeiter ſind nöthig, 20 Ruthen binnen 3 Tagen zu reinigen? 15 Arbeiter.

36 Ruthen . 9 Tage : 9 Arbeiter = 20 Ruthen . 3 Tage : x

$$\frac{3}{108} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \hline 180 \\ 9 \\ \hline 108)\ 1620 \mid 15 \text{ Arbeiter} \\ 108 \\ \hline 540 \\ 540 \\ \hline 0 \end{array}$$

Oder $\not{3}\not{6} . \not{9} : \not{9} = \not{2}\not{0} . \not{3} : x$

$\not{9} . 3 \quad . \quad 5 = 15$ Arbeiter.

Auf irgend einem Reviere wurden von 4 Holzſchlägern innerhalb 6 Tagen, 48 Eichen zu Klafterholz geſchlagen. Nun ſtehen auf eben dieſem Reviere noch 96 Stück dergleichen Eichen. Wieviel Zeit wird erfordert, ſolche von

von 6 Holzſchlägern zu Klafterholz ſchlagen zu laſſen? 8 Tage.

$$\cancel{48} \cdot 4 : \cancel{6} = \cancel{96} \cdot \cancel{6} : x$$
$$4 \cdot 2 = 8 \text{ Tage.}$$

Aufgaben zur Uebung.

Ein Förſter dinget 5 Perſonen, Kiefernzapfen zu Saamen zu ſammlen. Dieſen giebt er in 14 Tagen 8 Thlr. 18 gr. Nun dinget ſich auf gleiches Gedinge ein anderer 9 Perſonen auf 4 Wochen; wieviel werden dieſe Lohn erhalten? 31 Thlr. 12 gr.

Wenn 100 Thlr. in einem Jahre 6 Thlr. Zinſen tragen; wieviel werden 420 Thlr. in 10 Monaten Zinſen geben? 21 Thlr.

Wenn 5 Tagelöhner in 14 Tagen 8 Thlr. 18 gr. Lohn erhalten; wie lange wird man 9 Perſonen auf eben den Fuß mit 31 Thlr. 12 gr. unterhalten können? 4 Wochen.

Wenn 420 Thlr. in 10 Monaten 21 Thlr. Zinſen geben; in wieviel Monaten werden 100 Thlr. 6 Thaler Zinſen geben? in 12 Monaten.

Wenn man jährlich von 100 Thlr. Kapital, 6 Thlr. Intereſſen bekommt; wieviel hat man Kapital anzulegen, daß man in 4 Jahren 480 Thlr. bekommen kann? 2000 Thlr.

Ein Fuhrmann bekommt von 26 Klaftern Holz, um ſolche 15 Meilen weit zu verfahren, $37\frac{1}{2}$ Thaler; wie weit kann er 8 Klaftern um 10 Thlr. verfahren? 13 Meilen.

§. 214.

Da es ſich zutragen kann, daß Aufgaben der zuſammengeſetzten umgekehrten Regel Detri, wegen eines Verſehens

ſehens im Anſatze, falſche Reſultate geben, ſo thut man wohl, um nicht auf Abwege zu kommen, dergleichen Aufgaben in zwei andere zu zerlegen, die ſich nach der gemeinen Regel Detri auflöſen laſſen.

Es ſei die letzte Aufgabe des vorigen §s. als Beiſpiel gegeben. Der Anſatz wird auf folgende Art gemacht:

1) 26 Klaftern : 8 Klaftern = $37\frac{1}{2}$ Thlr. : x

2	2
52	75

8

52) 600 | $11\frac{7}{13}$ Thlr.
52
80
52
28

4
28 | 7
52 | 13

2) $11\frac{7}{13}$ Thlr. : 10 Thlr. = 15 Meilen : x

13	10
40	150
11	13
150	450

15

15) 1950 | 13 Meilen.
150
45
45
0

Ferner: 5 Perſonen bekommen in 14 Tagen 8 Thlr. 18 gr.; wie lange können 9 Perſonen mit 34 Thalern 12 gr. erhalten werden? 4 Wochen.

1) 5 Perſ. : 9 Perſ. = 8 Thlr. 18 gr. : x

```
                 24
               ─────
                210
                  9      24
               ─────     ⌣
          5) 1890 | 378 | 15 3/4 Thlr.
             15      24
            ────    ────
              39     138
              35     120
             ────   ────
              40      18 gr.
              40
             ────
               0
```

2) 15 Thlr. 18 gr. : 31 Thlr. 12 gr. = 14 Tage : x

```
   24            24
  ────          ────
   68           126
   31            63
  ────          ────
  378           756
                 14
               ─────
               3024
               756
               ─────
      378)    10584 | 28 Tage oder 4 Wochen.
               756
              ─────
               3024
               3024
              ─────
                 0
```

Anmerkung.

Die bei der zuſammengeſetzten Regel Detri erlaubten Abkürzungen können auch hier angebracht werden.

§. 215.

Da ſich die zuſammengeſetzte Regel Detri, in die Regel Quinque und Regel Septem unterſcheidet, §. 193.

§. 193. ſo kann man dieſen Unterſchied hier allgemein auf folgende Art überſehen.

Iſt nämlich $a : b = c : w$
$d : e = w : y$
$f : g = y : x$
ſo iſt $(a \cdot d) : (b \cdot e) = c : y$, die

Regel Quinque,

und $(a \cdot d \cdot f) : (b \cdot e \cdot g) = c : x$, die

Regel Septem.

§. 216.

Einige Anwendungen der Regel Detri auf Decimalzahlen.

Da dieſe Aufgaben ſämmtlich, entweder zur einfachen geraden oder umgekehrten, oder zur zuſammengeſetzten geraden oder umgekehrten Regel Detri, die letzte mag nun Regel Quinque, oder Regel Septem ſeyn, gehören: ſo hat man keine andern Regeln zur Auflöſung nöthig, als diejenigen, welche bei den genannten Regeln ſchon angezeigt worden ſind.

Beiſpiele.

Es ſoll nach einem bekannten Viereck, deſſen längſte Seite $7^{\circ}2'$ und die kürzeſte $7^{\circ}9'2''$ beträgt, ein anderes berechnet werden, welches mit dem bekannten in gleichem Verhältniſſe ſtehet ſo, daß die längſte Seite 12° lang ſei. Es iſt die Frage: Wie lang die kürzeſte Seite wird ſeyn müſſen? $5^{\circ}5'2''5''' = 5525'''$ oder 5,525 Ruthen.

$172\not{0}'' : 792'' = 120\not{0}'' : x$

120

15840
792

172) 95040 | 5525‴ = 5° 5′ 2″ 5‴ = 5,525 Ruthen.
860

904
860

440
344

960
860

Reſt 100

Ein Thiergarten iſt 400° 9′ 8″ lang, und 324° 6′ breit. Nun ſoll ein anderer nach eben dieſem Verhältniſſe angelegt werden. Da aber derſelbe 315° lang ſeyn ſoll; ſo iſt die Frage: Wie breit muß er werden? 254° 9′ 9″ 7‴ oder 254,997 Ruthen.

```
40098″ : 31500″ = 32460″ : x
                  31500
                 ---------
                 16230000
                 3246
                 9738
                ----------
       40098) 1022490000 | 254° 9′ 9″ 7‴
              80196....
              -----
              220530...
              200490...
              ------
               200400..
               160392..
               ------
                400080.
                360882.
                ------
                 391980
                 360882
                 ------
                  310980
                  280686
                  ------
            Reſt   30294
```

Anmerkung.

Hätte man die Breite nur bis auf Zolle zu beſtimmen nöthig gehabt, ſo hätte man die Diviſion mit Zollen geendiget, und 254°9′9″ erhalten. Da hier aber noch 7 Linien zur Breite kommen, und überdies ein Reſt bleibt, ſo nimmt man ſtatt 7 Linien, 10 Linien, dieſe geben 1 Zoll, und 10 Zoll 1 Fuß. Da nun auch 10 Fuß eine Ruthe geben, ſo iſt in dieſem Falle die Breite beinahe 255 Ruthen. Gewöhnlich läßt man das, was unter der Hälfte iſt, in kleinen Maßabtheilungen weg, und was über die Hälfte iſt, ergänzt man zur nächſt größern Einheit. Dieſe Regel iſt jedoch nicht allgemein, ſondern die Umſtände und die Natur der Aufgabe ſelbſt, muß beſtimmen, auf welche Art man verfahren ſoll.

Ferner: Ein Viereck hält 625′ an Länge und 132′ an Breite. Wenn nun nach eben dieſem Verhältniſſe ein anderes angegeben werden ſollte, deſſen Länge aber 306′ betrüge; wie groß müßte deſſen Breite ſeyn? 6°4′6′ oder 646″ oder 6,46 Ruthen.

625′ : 306′ = 132′ : x
306
―――
792
396
―――
625) 40392 | 6°4′6″ = 6,46 Ruthen.
3750
―――
2892
2500
―――
3920
3750
―――
Reſt 170

Auf einem Forſtreviere findet ſich eine länglichgevierte Wieſe, deren Flächeninhalt 63 Quadratruthen, 10 Quadratfuß; die Länge aber 20 Ruthen, beträgt. Nun ſollen aus dieſer Länge 20 Quadratruthen abgeſchnitten werden; die Frage iſt: Wieviel Ruthen oder Fuße ꝛc. auf derſelben abzutheilen ſind? 6338‴

6310′ : 2000′ = 20° Länge : x Länge
2 0
―――
631) 4 00~~0~~ | 6°3′3″8‴ Länge, welche auf den 20 Ruthen, als der Länge der ganzen Wieſe, abzuſchneiden ſind.
3786~~0~~
―――
2140
1893
―――
2470
1893
―――
5770
5048
―――
Reſt 722

Ein

Ein vierſeitiger rechtwinkeliger Platz iſt 42 Schuhe breit und 108 Schuhe lang. Ein anderer hingegen ſoll eben ſo viel Flächeninhalt haben, und doch nur 21 Schuhe breit ſeyn: wie groß muß ſeine Länge ſeyn? 216′.

```
     21′ : 42′ = 108′ : x
                  42
                 ----
                 216
                432
               -----
          21) 4536 | 216′.
              42
              ----
               33
               21
              ----
               126
               126
              ----
                 0
```

Zwei Forſtbedienten ſollen irgend einen Forſt in zwei gleiche Theile theilen, und jeder ſoll auf der Hälfte des Forſtes das Holz beſonders zählen. Wenn nun der eine alle 3 Tage, 750 Ruthen, und der andere binnen eben dieſer Zeit, nur 500 Ruthen durchzählt, ſo wird der erſtere innerhalb 30 Tagen fertig. Die Frage iſt, in welcher Zeit wird der letztere fertig werden? In 45 Tagen.

```
   750°. 3 Tage : 30 Tagen = 500°. 3 Tage : x
     3                           3
  ------                      ------
  2250                         15ØØ
     3 0
  -------
15) 675ØØ | 45 Tage.
    60.
   -----
     75
     75
   -----
      0
```

Ferner: Ein Viereck hält 625' an Länge und 132' an Breite. Wenn nun nach eben dieſem Verhältniſſe ein anderes angegeben werden ſollte, deſſen Länge aber 306' betrüge; wie groß müßte deſſen Breite ſeyn? 6°4'6' oder 646'' oder 6,46 Ruthen.

625' : 306' = 132' : x

```
                 306
               -----
                 792
                396
               -----
      625)  40392 | 6°4'6'' = 6,46 Ruthen.
            3750
            -----
             2892
             2500
            -----
              3920
              3750
            -----
          Reſt 170
```

Auf einem Forſtreviere findet ſich eine länglichgevierte Wieſe, deren Flächeninhalt 63 Quadratruthen, 10 Quadratfuß; die Länge aber 20 Ruthen, beträgt. Nun ſollen aus dieſer Länge 20 Quadratruthen abgeſchnitten werden; die Frage iſt: Wieviel Ruthen oder Fuße ꝛc. auf derſelben abzutheilen ſind? 6338'''

6310' : 2000' = 20° Länge : x Länge

```
          2    0
       ---------
  631)  4 00ø | 6°3'3''8''' Länge, welche auf den
        37860                20 Ruthen, als der
       -------               Länge der ganzen Wie-
         2140                ſe, abzuſchneiden ſind.
         1893
        ------
          2470
          1893
        ------
           5770
           5048
        ------
      Reſt 722
```

Ein

Ein vierſeitiger rechtwinkeliger Platz iſt 42 Schuhe breit und 108 Schuhe lang. Ein anderer hingegen ſoll eben ſo viel Flächeninhalt haben, und doch nur 21 Schuhe breit ſeyn: wie groß muß ſeine Länge ſeyn? 216′.

$$21' : 42' = 108' : x$$

```
            108
             42
            ---
            216
           432
         ------
    21)  4536 | 216′.
         42
         ---
          33
          21
          ---
          126
          126
          ---
            0
```

Zwei Forſtbedienten ſollen irgend einen Forſt in zwei gleiche Theile theilen, und jeder ſoll auf der Hälfte des Forſtes das Holz beſonders zählen. Wenn nun der eine alle 3 Tage, 750 Ruthen, und der andere binnen eben dieſer Zeit, nur 500 Ruthen durchzählt, ſo wird der erſtere innerhalb 30 Tagen fertig. Die Frage iſt, in welcher Zeit wird der letztere fertig werden? In 45 Tagen.

$$750^{\circ} . 3 \text{ Tage} : 30 \text{ Tagen} = 500^{\circ} . 3 \text{ Tage} : x$$

```
       3                        3
    ----                     ----
    2250                     15ØØ
      3 0
    ------
15) 675ØØ | 45 Tage.
    60.
    ---
     75
     75
     ---
      0
```

Kehrt man die Aufgabe um, und ſucht die Zeit, welche der erſtere zur Forſtzählung nöthig hat; ſo hat man die Probe zur vorigen Aufgabe.

500°. 3 Tage : 45 Tagen = 750°. 3 Tage : x
3   9   3
―――
1500   2250
5
―――
7500
9
―――
67500   225) 6750 | 30 Tage.
675
―――
0

Ein Stück Feld, deſſen quadrirter Inhalt beträgt 180 Quadratruthen und 64 Quadratfuß, d. i. 18064 F². Dieſes Stück wird mit 4½ Scheffel Tannenſaamen beſäet. Wieviel wird man auf ein anderes Stück Feld haben müſſen, deſſen Inhalt 1129 Quadratruthen hält? 28 Scheffel 2 Metzen.

18064 F² : 112900 F² = 4½ Scheffel : x
2   9   9
―――
36128 : 1016100 | 28 Scheffel.
72256
―――
293540
289024
―――
4516
16 Metzen = 1 Scheffel.
―――
27096
4516
―――
36128) 72256 | 2 Metzen.
72256
―――
0

Ein

Ein Gehölze, welches auf einer viereckigen Grundfläche liegt, und 384′ lang und 203′ breit iſt, wird mit 710½ Thlr. bezahlt. Nun findet ſich ein anderes Stück, welches mit dem vorigen gleich gut mit Holz beſtanden, und gleichen Boden hat. Wenn nun daſſelbige 1215′ lang, und 256′ breit iſt; wieviel wird ſolches in Vergleichung mit dem vorigen werth ſeyn? 2835 Thaler.

384′ lang . 203′ br. : 1215′ l. . 256′ br. = 710½ thl. : x

203	256	1421
1152	7290	
768	6075	
77952	2430	
2	311040	
155904	1421	
	311040	
	62208	
	124416	
	31104	

155904) 441987840 | 2835 Thaler.
311808
1301798
1247232
545664
467712
779520
779520
0

III.

Die Regel Multiplex oder die Kettenregel.

§. 217.

Wenn mehrere Verhältniſſe oder Proportionen in einen einzigen Anſatz gebracht, und gleichſam ketten-weiſe mit einer Fragzahl verbunden werden, ſo nennt man dieſen Anſatz die Regel Multiplex oder die Kettenregel.

Die unter einander ſtehenden gleichnamigen Glieder der Verhältniſſe werden multiplicirt; der Exponent aber dieſes zuſammengeſetzten Verhältniſſes iſt die geſuchte Zahl.

Soll z. B. das Verhältniß eines Dukatens zu einem Groſchen in ſchwerem Gelde angegeben werden, ſo kann dies entweder durch ein einziges Verhältniß 66 : 1, oder durch die Zwiſchenverhältniſſe, nämlich des Dukaten zum Thaler, des Thalers zur Mark, und der Mark zum Groſchen geſchehen. Sonach wäre

Dukaten : Thaler = 11 : 4
Thaler : Mark = 3 : 1
Mark : Groſchen = 8 : 1

alſo (11.3.8):(4.1.1) = 66 : 1.

Folglich Dukaten : Groſchen = 66 : 1, d. i. nach dieſen angenommenen Verhältniſſen ſind 66 Groſchen ein Dukaten.

Oder:

4 Dukaten = 11 Thaler
1 Thaler = 3 Mark
1 Mark = 8 Groſchen

4 Dukaten = 264 Groſchen
4 4 div.

1 Dukaten = 60 Groſchen.

Will

Will man wiſſen, wie viel 1000 Thlr. Preuß. Geld in Holländ. Dukaten betragen, und man wüßte, daß der Cours gegen Gold 135 Procent wäre, d. i. 135 Thlr. Preußiſch Geld 100 Thlr. Holländ. Courant machten; daß ferner 1 Thlr. Holländ. Courant $2\frac{1}{2}$ Gulden Holländ. Cour. oder 2 Thlr. Holländ. Courant 5 fl. Holländ. Cour. machten; daß endlich 1 fl. = 20 Stüver, und 1 Dukaten = 5 fl. 4 Stüver = 104 Stüver wären: ſo würde man den Anſatz auf folgende Art machen, wobei man gleich große Zahlen in beiden Gliedern der Verhältniſſe, oder gleiche Faktoren vorhandener Produkte in dieſen Verhältniſſen, gegen einander wegſtreichen, und ſo die Rechnung abkürzen kann, nämlich:

x Dukaten	=	1000 Thlr. Preuß. Geld
27. ~~135~~ Thlr. Pr. Geld	=	100 Thlr. Holl. Cour. ~~50~~ 25
~~2~~ Thlr. Holl. Cour.	=	5 fl. Holl.
1 fl. Holl.	=	~~20~~ Stüver 5
13. ~~26~~ ~~104~~ Stüver	=	1 Dukaten
27 . 13 . x	=	1000 . 25 . 5;
oder 351 . x	=	125000
351	=	351 div.
giebt x	=	$356\frac{44}{351}$ Dukaten.

Anmerkung.

Aus dieſem Beiſpiele ſieht man deutlich, daß es vorzüglich darauf ankommt, auf beide Seiten des Gleichheitszeichens Dinge von einerlei Art zu ſetzen. So ſtehen hier ſowohl auf der einen, als auch auf der andern Seite Dukaten, Thaler Preuß. Geld, Thaler Holländ. Courant, fl. Holländ. und Stüver.

IV.

Die Reeſiſche Regel.

§. 218.

Die Reeſiſche Regel iſt nichts anders, als eine beſondere Methode, die Regel Detri, vorzüglich aber die

zu-

zuſammengeſetzte, ſo anzuſetzen, daß alle Faktoren des Diviſors mit der unbekannten oder geſuchten Zahl x auf die eine Seite, und die Faktoren des Dividendums auf die andere Seite zu ſtehen kommen.

Der Grund dieſes Anſatzes iſt dieſer: Jede praktiſche Proportion oder Proportionsaufgabe beſteht aus der Angabe und der Frage, und beide beſtehen aus Verhältniſſen, deren Glieder als Urſache und Wirkung, oder was dieſen gleichkommt, betrachtet werden können, z. B. Geſchwindigkeiten, Zeiten, Räume ꝛc.

Setzt man nun von der Frage die Urſache zur Linken, und die Wirkung zur Rechten: ſo kommt bei der Angabe die Wirkung zur Linken und die Urſache zur Rechten, und ſo kann man auch umgekehrt verfahren.

Beiſpiel:

1) Aus der einfachen Regel Detri.

Wenn 1 Pfund 6 Thaler koſtet; wie viel koſten 8 Pfund? 48 Thaler.

8 Pfund	x Thaler
6 Thaler	1 Pfund

$8 \cdot 6 = x \cdot 1$

oder 48 Thaler = x,

d. i. 8 Pfund koſten 48 Thaler.

Oder

x Thaler	8 Pfund
1 Pfund	6 Thaler

$x \cdot 1 = 8 \cdot 6$

$x = 48$, d. i.

8 Pfund koſten 48 Thaler.

Anmer-

Anmerkung.

Da man die Auflöſung dieſer Aufgabe aber eben ſo kurz und kürzer durch die einfache Regel Detri findet; ſo wendet man auf dergleichen Aufgaben in der Ausübung die Reeſiſche Regel nicht an.

2) Aus der zuſammengeſetzten Regel Detri.

Wenn 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, einen Damm von 400 Fuß in Zeit von 4 Wochen vollenden; in wie viel Wochen werden 16 Arbeiter einen Damm von 300 Fuß machen, wenn ſie täglich 12 Stunden arbeiten? $4\frac{4}{9}$ Wochen.

x Wochen	20 Arbeiter
16 Arbeiter	4 Wochen
12 Stunden	8 Stunden
300 Fuß	400 Fuß

$$x \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{12} \cdot 3\cancel{00} = \cancel{20} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{8} \cdot 4\cancel{00}$$

$$\cancel{2} \cdot 3 = 10 \cdot 4;$$

oder $x \cdot 3 \cdot 3 = 10 \cdot 4$

d. i. $x \cdot 9 = 40.$

Nun iſt $\frac{40}{9} = x = 4\frac{4}{9}$ Wochen.

Kommen Brüche unter den Zahlen vor, ſo werden ſie weggeſchaft, wenn man den Zähler an ſeiner Stelle ſtehen läßt, den Nenner aber wegſtreicht, und auf die entgegengeſetzte Seite ſchreibt. Z. B. Wie viel Groſchen ſind $\frac{2}{3}$ Thaler? 16 Groſchen.

x Groſchen	$\frac{2}{\cancel{3}}$ Thaler
1 Thaler $\cancel{3}$	24 Groſchen 8

alſo iſt $x = 8 \cdot 2 = 16$ Groſchen.

Anmer-

Anmerkung.

Die Reeſiſche Regel trug van Rees in der Schrift: Allgemeine Regel der Rechenkunſt (Aus dem Holländ. Bremen 1739) vor, woher ſie auch den Namen erhalten hat.

V.

Verbindung der Kettenregel mit der Reeſiſchen Regel.

§. 219.

Es giebt Fälle, wo beide, die Kettenregel ſowohl als die Reeſiſche, ihre Anwendung finden. Man kann z. B. ein Hausweſen von 10 Perſonen mit 50 Thaler Preuß. Courant für Brod, das Jahr hindurch erhalten, wenn der Berliner Scheffel 1 Thaler koſtet: Wieviel Caſſengeld hat man in dieſem Verhältniſſe für 8 Perſonen nöthig, wenn der Himten 18 Gr. koſtet? Unter der Vorausſetzung, daß 3 Scheffel = 5 Himten; 14 Thaler Caſſengeld = 15 Thaler in Golde, und daß Courant 5 Procent ſchlechter als Gold ſey, iſt der Anſatz folgender:

x Thaler Caſſengeld	8 Perſonen
10 Perſonen	18 Gr. Caſſengeld der Himten
24 Gr. Courant	50 Thlr Preuß. Courant
105 Thlr. Courant	100 Thlr Gold
15 Thlr. in Golde	14 Thlr. Caſſengeld
3 Scheffel	5 Himten

Das Facit iſt 44 Thlr. 10 Gr. 7 Pf. Caſſengeld.

Anmerkung.

Der erſte Theil dieſes Beiſpiels iſt nach der Reeſiſchen Regel geordnet; dann iſt das Preuß. Courant durch die Kettenregel auf Caſſengeld gebracht. Auch kommt Scheffelpreis und Himtenpreis vor. Dadurch mußte die Aufgabe nothwendig größer werden durch das Ver-

Verhältniß der Himten zu Scheffeln, oder 5 : 3. Daher iſt 5 in die Columne des Dividendums, und 3 in die des Diviſors geſetzt worden.

Dieſer letzten Hülfsregel kann man ſich in ähnlichen Fällen bedienen.

VI.

Die Geſellſchafts- und Vermiſchungsregel.

§. 220.

Die Geſellſchaftsregel ſowohl als die Vermiſchungsregel gründet ſich auf die allgemeine Aufgabe: Ein Ganzes in eine vorgeſchriebene Anzahl Theile nach einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen. Beide Regeln ſind nur dem Objekte nach verſchieden, und laſſen daher einerlei Auflöſung zu. Iſt das Ganze (allgemein bezeichnet) $= S$, und x, y, z ſind die zu wiſſenden Theile, die Verhältniſſe aber $a:b:c$, ſo iſt $a+b+c = S = a:x; = b:y; = c:z;$ und ſo in allen ähnlichen Fällen.

Es gehören demnach alle Aufgaben hieher, nach welchen an einem allgemeinen Lohne der Arbeit, oder erworbenen Gewinnſte, oder erlittenen Verluſte, mehrere Perſonen, die in eine Geſellſchaft zuſammen getreten ſind, Antheil haben; ſo wie diejenigen Aufgaben, nach welchen, wenn von einer Sache, die aus verſchiedenen Ingredienzien beſteht, als z. B. Schiespulver u. dergl. eine gewiſſe Quantität verfertiget werden ſoll, und gefragt wird: Wieviel von jeder Art der Beſtandtheile in die Vermiſchung gebracht werden muß, um die Sache mit der bekannten von gleicher Güte zu erhalten.

Der Lohn, oder der Gewinnſt, oder der Verluſt, wird entweder nach einer gewiſſen Zeit, oder er wird ohne

ohne Rückſicht auf Zeit, nach einer geleiſteten Einlage, oder verrichteter Arbeit, aus der ganzen Summe, jeder Perſon nach der Regel der Verhältniſſe zugetheilt.

§. 221.

Allgemeine Aufgabe.

Wie werden Aufgaben der Geſellſchaftsregel aufgelöſet?

Auflöſung.

1) Man bringt dasjenige, was die Perſonen, die in eine Geſellſchaft getreten ſind, zum Gewinnſte oder Verluſte gearbeitet oder beigetragen haben, insbeſondere in eine Summe.

2) Dieſe Summe ſetzt man nach der einfachen Regel Detri in die Stelle des erſten Gliedes. In die Stelle des zweiten aber ſetzt man den ſämmtlichen Gewinnſt oder Verluſt.

3) Den Beitrag jeder Perſon ſetzt man in die Stelle des dritten Gliedes, und löſt die Aufgabe nach §. 194. auf.

4) Dieſe Auflöſung wird, mit Beibehaltung des erſten und zweiten Gliedes, ſo vielmal wiederholt, als Perſonen dabei intereſſirt ſind, ſo erhält man jeder Perſon Gewinn oder Verluſt insbeſondere.

Anmerkung 1.

Sind die Beiträge der Perſonen überdies noch mit gewiſſen Zeiten verbunden, ſo muß jeder insbeſondere erſt mit der Zahl der Zeit multiplicirt, alsdann in eine Summe gebracht werden, ehe man die Regeln der Auflöſung anwendet.

Anmerkung. 2.

Die Aufgabe §. 221. faßt auch die allgemeine Aufgabe und Auflöſung der Vermiſchungsregel in ſich, wo nur Sachen und Begriffe davon geändert werden dürfen.

Beiſpiele.

Zwei Waldmänner treten in eine Geſellſchaft, in einem gewiſſen Reviere alle darin wachſenden Eicheln auf dieſes Jahr zu pachten, ſo, daß ſie nach Verhältniß ihres Angeldes auch den Gewinn mit einander theilen wollen. A giebt zu dieſem Pachte 24, und B giebt 36 Thaler. Nun findet ſichs, daß beide, nachdem die Eicheln ins Geld geſetzt worden, 12 Thaler zuſammen gewinnen. Die Frage iſt: Wie viel der Antheil eines jeden am Gewinn ſey? A gewinnt 4 Thlr. 19 Gr. $2\frac{2}{5}$ Pf. und B gewinnt 7 Thlr. 4 Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf., welches zuſammen 12 Thlr. beträgt.

Man ſetzt ſo:

A	giebt	24	Thaler
B	=	36	=
Summe		60	Thaler Pacht.

Nun ſchließt man:

60 Thlr. gewinnen 12 Thaler, was gewinnen 24 Thaler des A?

ohne Rückſicht auf Zeit, nach einer geleiſteten Einlage, oder verrichteter Arbeit, aus der ganzen Summe, jeder Perſon nach der Regel der Verhältniſſe zugetheilt.

§. 221.

Allgemeine Aufgabe.

Wie werden Aufgaben der Geſellſchaftsregel aufgelöſet?

Auflöſung.

1) Man bringt dasjenige, was die Perſonen, die in eine Geſellſchaft getreten ſind, zum Gewinnſte oder Verluſte gearbeitet oder beigetragen haben, insbeſondere in eine Summe.

2) Dieſe Summe ſetzt man nach der einfachen Regel Detri in die Stelle des erſten Gliedes. In die Stelle des zweiten aber ſetzt man den ſämmtlichen Gewinnſt oder Verluſt.

3) Den Beitrag jeder Perſon ſetzt man in die Stelle des dritten Gliedes, und löſt die Aufgabe nach §. 194. auf.

4) Dieſe Auflöſung wird, mit Beibehaltung des erſten und zweiten Gliedes, ſo vielmal wiederholt, als Perſonen dabei intereſſirt ſind, ſo erhält man jeder Perſon Gewinn oder Verluſt insbeſondere.

Anmerkung 1.

Sind die Beiträge der Perſonen überdies noch mit gewiſſen Zeiten verbunden, ſo muß jeder insbeſondere erſt mit der Zahl der Zeit multiplicirt, alsdann in eine Summe gebracht werden, ehe man die Regeln der Auflöſung anwendet.

Anmerkung. 2.

Die Aufgabe §. 221. faßt auch die allgemeine Aufgabe und Auflöſung der Vermiſchungsregel in ſich, wo nur Sachen und Begriffe davon geändert werden dürfen.

Beiſpiele.

Zwei Waldmänner treten in eine Geſellſchaft, in einem gewiſſen Reviere alle darin wachſenden Eicheln auf dieſes Jahr zu pachten, ſo, daß ſie nach Verhältniß ihres Angeldes auch den Gewinn mit einander theilen wollen. A giebt zu dieſem Pachte 24, und B giebt 36 Thaler. Nun findet ſichs, daß beide, nachdem die Eicheln ins Geld geſetzt worden, 12 Thaler zuſammen gewinnen. Die Frage iſt: Wie viel der Antheil eines jeden am Gewinn ſey? A gewinnt 4 Thlr. 19 Gr. $2\frac{2}{7}$ Pf. und B gewinnt 7 Thlr. 4 Gr. $9\frac{3}{7}$ Pf., welches zuſammen 12 Thlr. beträgt.

Man ſetzt ſo:

A giebt 24 Thaler
B „ 36 „

Summe 60 Thaler Pacht.

Nun ſchließt man:

60 Thlr. gewinnen 12 Thaler, was gewinnen 24 Thaler des A?

oder 60 : 12 = 24 : x

```
        12
        ──
        48
       24
      ────
   6) 288 | 4 Thlr.
      240 |
      ──
       48
       24 Gr. = 1 Thlr.
      ────
      192
      96
    ─────
 6)  1152 | 19 Gr.
      6 0 |
    ──
      55
      54
      ───
       12
       12 Pf. = 1 Gr.
      ───
       24
       12
      ────
  6)  144 | 2 2/5 Pf.
      120 |
      ──
```

$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

Alſo gewinnt A 4 Thlr. 19 Gr. $2\frac{2}{5}$ Pf.

Ferner:

60 Thaler gewinnen 12 Thaler, was gewinnen 36 Thaler des B?

oder

```
oder 60 : 12 = 36 : x
               12
               --
               72
              36
           ------
        6) 432 | 7 Thlr.
           420 |
           ---
            12
            24 Gr. = 1 Thlr.
           ---
            48
           24
          ----
        6) 288 | 4 Gr.
           240 |
           ---
            48
            12 Pf. = 1 Gr.
           ---
            96
           48
          ----
        6) 576 | 9 3/5 Pf.
           540 |
           ---
           36/60 = 3/5
```

Alſo gewinnt B 7 Thlr. 4 gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.

Abgekürzt:

$\cancel{60}:\cancel{12} = 24:x$

$5:24 = 4\frac{4}{5}$ Thaler des A Antheil.

$\cancel{60}:\cancel{12} = 36:x$

$5:36 = 7\frac{1}{5}$ Thaler des B Antheil.

Die Probe iſt:

Der Antheil des A =	4 Thlr.	19 Gr.	$2\frac{2}{5}$ Pf.	oder	$4\frac{4}{5}$ Thaler
„ „ „ B =	7 „	4 „	$9\frac{3}{5}$ „	„	$7\frac{1}{5}$ „
Der ganze Gewinn	12 Thaler			=	12 Thaler.

Dergleichen: Um gutes Schießpulver zu verfertigen, nimmt man zu einem Pfunde, oder zu 32 Loth Salpeter, 4 Loth Schwefel, und 6 Loth Kohlen. Wenn man nun 100 Pfund Schießpulver von eben der Güte verfertigen wollte; wieviel an Salpeter, Schwefel und Kohlen wird dazu nöthig seyn? $76\frac{4}{21}$ Pf. Salpeter; $9\frac{11}{21}$ Pf. Schwefel und $14\frac{6}{21}$ Pf. Kohlen.

Hier iſt

$32:4:6 = 16:2:3$; alſo

$16+2+3 = 21$ und die zu machende Quantität 100;

alſo ſetze man:

1) $21 : 16 = 100 : x$

$$x = \frac{16.100}{21} = 76\tfrac{4}{21} \text{ Pfund}$$

2) $21 : 2 = 100 : x$

$$x = \frac{2.100}{21} = 9\tfrac{11}{21} \text{ Pfund}$$

3) $21 : 3 = 100 : x$

$$x = \frac{3.100}{21} = 14\tfrac{6}{21} \text{ Pfund}$$

Nun iſt $76\frac{4}{21}$ Pfund
$9\frac{11}{21}$ „
$14\frac{6}{21}$ „

zuſammen 100 Pfund.

Beiſpiele zur Uebung.

Drei Arbeiter, A, B und C, haben einen Graben um einen Hegefleck aufgeworfen. Bei dieſer Arbeit hat A 225 Ruthen, B 125 Ruthen, und C 105 Ruthen verfertiget. Nun bekommen ſie für dieſe ganze Arbeit 50 Thaler baar, welche der Förſter des Reviers nach Verhältniß der Arbeit vertheilen und auszahlen ſoll. Wieviel wird jeder erhalten? A bekommt 24 Thlr. 17 Gr. $4\frac{80}{91}$ Pf. B bekommt

kommt 13 Thlr. 17 Gr. $8\frac{4}{91}$ Pf., und C bekommt die übrigen 11 Thlr. 12 Gr. $11\frac{7}{91}$ Pf.

Ferner: Vier Zimmerleute verfertigen einen Zaun um ein Stück eines Waldes auf Befehl, damit weder das Wild ſich daraus verlieren, noch auch dem nebenan ſtehenden Anfluge ſchaden könne. Der erſte verfertiget mit ſeinen Gehülfen 505 Ruthen; der zweite 625 Ruthen; der dritte 740 Ruthen; und der vierte 805 Ruthen. Nun bekommen ſie insgeſammt für ihre Arbeit, laut des Anſchlags aus der landesherrlichen Caſſe 1000 Mfl., welche der Förſter nach Verhältniß der Arbeit berechnen und auszahlen ſoll. Wieviel erhält ein jeder von dieſen 1000 Mfl.? Der erſte erhält 188 Mfl. 16 Gr. $5\frac{89}{107}$ Pf. Der zweite 233 Mfl. 13 Gr. $6\frac{54}{107}$ Pf. Der dritte 276 Mfl. 13 Gr. $4\frac{16}{107}$ Pf; und der vierte erhält endlich 300 Mfl. 19 Gr. $7\frac{55}{107}$ Pf.

Drei Bauern, A, B und C, kaufen von ihrer Herrſchaft eine Buſch- oder Waldwieſe, deren Inhalt 6085 Quadratfuße groß iſt. Dafür geben ſie 1500 Mfl. Als es aber zur Zahlung kommt, können B und C ihren Antheil nicht geben, der 500 Mfl. beträgt. B ſagt, er könne nicht mehr als 275 Mfl., und C giebt vor, er könne nicht mehr als 350 Mfl. erlegen. Hierauf entſchließt ſich A, daß er für die übrige Bezahlung ſtehen wolle, unter der Bedingung, daß dem B und C, einem jeden ſoviel von der Wieſe abgemeſſen und zugetheilt werde, als er Geld erlegen können, und er das größte Stück von der Wieſe zu ſeinem Eigenthum erhalte. Hierauf wird dem Förſter aufgegeben, einem jeden nach ſeinem erlegten Gelde ſeinen Antheil von der Wieſe abzuſtecken. Es iſt die Frage: wieviel am Flächeninhalte ein jeder beſonders von dieſer Buſchwieſe erhalte? A hat $3549\frac{7}{12}$ Quadratfuße; B aber $1115\frac{7}{12}$ Quadratfuße, und endlich C hat $1419\frac{10}{12}$ Quadratfuß erhalten.

Die Aufloͤſung iſt dieſe:

Das Kaufgeld betraͤgt 1500 Mfl.			
Dazu hat	A	beigetragen	875 Mfl.
=	B	=	275 =
=	C	=	350 =
		zuſammen	1500 Mfl.

Man ſchließt:

~~1800~~ : 6085 = ~~875~~ : x
7   7
12) 42595 | $3549\frac{7}{12}$ Quadratfuß fuͤr A
36
65
60
59
48
115
108
$\frac{7}{12}$

~~1800~~ : 6085 = ~~275~~ : x
60   11   11
6085
6085
6) 66935 | $1115\frac{7}{12}$ Quadratfuß fuͤr B.
6 0
6
6
9
6
33
30
$\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$.

~~1800~~

$\cancel{1800} : 6085 = \cancel{350} : x$

30 7 7

30) 42595 | $1419\frac{10}{12}$ Quadratfuß für C.

3 0

12

12

5

3

29

27

$\frac{25}{30} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

Probe: $3549\frac{7}{12}$ F^2

$1115\frac{7}{12}$

$1419\frac{10}{12}$

2

6085 Quadratfuß, welches der Inhalt der gan-
en Wieſe war.

Drei Forſtbedienten verdingen einem Fuhrmanne Holz, 8 Meilen weit zu fahren, für 288 Thaler. Nun hat der erſte 24, der zweite 32, der dritte aber 40 Klaftern zu fahren; wieviel muß jeder an Fuhrlohn an den Fuhrmann bezahlen? Der erſte 72 Thaler, der zweite 96 Thaler, und der dritte 120 Thaler.

Ferner C, D und E treten in eine Geſellſchaft und legen 292 Thaler zuſammen an, unter der Bedingung, daß ſie den Gewinn nach Verhältniß der Einlage mit einander theilen wollen. C giebt 80 Thaler auf 6 Monate, D aber 112 Thlr. auf 9 Monate, und E endlich 100 Thlr. auf 12 Monate. Mit dieſen 292 Thalern werden 168 Thlr. gewonnen; wieviel bekommt ein jeder nach Verhältniß der Einlage und der Zeit? C erhält 30 Thlr., D aber 63 Thaler, und E endlich 75 Thlr.

Hier rechnet man ſo:

C giebt	80 rthlr. auf	6 Monate,	alſo	80.6	= 480
D —	112 —	— 9 —	—	112.9	= 1008
E —	100 —	— 12 —	—	100.12	= 1200
				Summe	2688

Nun ſchließt man:

96

2688 : 168 = 480 : x

28 . 6 . 5 = 30 rthlr. für C.

48) 2688 : 168 = 1008 : x

8) 56 : 21 = 21

7 : 21 = 21

21

21

42

7) 441 | 63, alſo 63 rthlr. für D.

42

21

21

0

48) 2688 : 168 = 1200 : x

8) 56 : 21 = 25

7 : 21 = 25

25

105

42

7) 525 | 75 alſo 75 rthlr. für E.

49 Zuſammen 168 rthlr. Gewinn.

35

35

0

Vier

Vier Perſonen legen auf Hofnung des Gewinnſtes ein Kapital zuſammen, und kaufen ein Stück Holz, um es niederzuſchlagen. D giebt 600, E giebt 760, F giebt 890 und G giebt 1500 rthlr. Nachdem aber das Holz niedergeſchlagen und in Klaftern geſetzt worden, findet ſichs, daß ſie, ſtatt zu gewinnen, 400 rthlr. verlieren. Wie viel hat nun jeder Verluſt? D hat 64 rthlr. E hat 81 rthlr. 1 gl. $7\frac{1}{7}$ pf. F hat 94 rthlr. 22 gr. $4\frac{4}{7}$ pf. und G hat 160 rthlr. Verluſt.

Ferner: X, Y und Z legen gleiche Kapitalien an, und zwar X auf 10, Y auf 12, und Z auf 18 Monate, und kaufen einen Buſch. Nachdem das darin befindliche Holz in Klaftern geſchlagen, findet ſichs, daß ſie 500 rthlr. Gewinn haben, wie viel erhält ein jeder nach Verhältniß der Zeit? X bekommt 125, Y bekömmt 150 und Z die übrigen 225 rthlr.

Unter drei Forſtbediente, die ſich auf ihren Revieren in der Holzſaat hervorgethan haben, iſt eine Ehrenbelohnung von 600 rthlr. auszuzahlen verordnet worden, ſo, daß B dreimal ſo viel als A, und C viermal ſo viel als B erhalten ſoll. Wie viel bekommt jeder? A erhält 37 rthlr. 12 gl. B aber 112 rthlr. 12 gl. und C erhält 450 rthlr.

Hier verfährt man ſo: A = 1
B = 3 alſo 1 . 3
G = 12 — 3 . 4

zuſammen 16

Nun ſchließt man:

16 : 600 = 1 : x

48 | $37\frac{1}{2}$ rthlr. folglich A = 37 rthlr. 12 gl.

120

112

8

$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

16 : 600 = 3 : x

3

16) 1800 | 112½ rthlr. folglich B = 112 rthlr. 12 gl.

16

20

16

40

32

$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

16 : 600 = 12

4) ―――――

4 : 150 . 3 = 450 rthlr. — C = 450 rthlr.

Zuſammen 600 rthlr.

Drei Herrſchaften haben zuſammen eine Holzung für 3296 Thaler gekauft. Nachdem ſie dieſelbige einige Jahre benutzt haben, laſſen ſie das noch übrige Holz in Klaftern ſchlagen, und gewinnen daran noch 824 rthlr. Von dieſem Gewinnſte erhält a, 200 rthlr. b aber 320 rthlr. und c den noch übrigen Reſt. Es entſteht die Frage: Wieviel jede der Herrſchaften zu der obigen Kaufſumme beigetragen hat, da der Gewinnſt nach der Anlage zur Kaufſumme vertheilt worden iſt? a hat 800 rthlr. b hat 1280 rthlr. und c hat 1216 rthlr. zur Kaufſumme beigetragen.

Hier iſt a = 200 rthlr.

b = 320 —

alſo a + b = 520

Der ganze Gewinnſt iſt = 824 rthlr.

Der Gewinnſt von a + b = 520 —

alſo für c = 304 rthlr.

Nun

Nun iſt a = 200 rthlr. Gewinnſt
b = 320 — —
c = 304 — —

Alſo der ganze Gew. = 824 rthlr.

824 : 200 = 3296 : x
4 4

800 rthlr. zur Kaufſumme für a

824 : 320 = 3296 : x
4 4

1280 rthlr. zur Kaufſumme für b

824 : 304 = 3296 : x
4 4

1216 rthlr. zur Kaufſumme für c.

Probe:

Es iſt a = 800 rthlr. Kaufſumme
b = 1280 — —
c = 1216 — —

Zuſammen 3296 ganze Kaufſumme.

Schlußanmerkung
zur
Arithmetik.

§. 222.

Die nächſte Anwendung der Arithmetik, die das eigentliche Forſtweſen oder die Forſtwirthſchaft angehet, macht der Forſtbediente bei der Anfertigung der bei dem Geſchäfte der Abſchätzung einer Forſt nöthigen Holzbeſtandes-Tabelle, nach welcher ſich jeder Taxator und Waldvermeſſer richten muß, und welche zur Abſchätzung der Blöcke und Schläge nöthig iſt. Aus einer ſolchen Tabelle wird alsdenn eine Rekapitulation angefertiget, woraus man den ganzen Zuſtand eines Waldes oder Reviers mit allen darin befind-

befindlichen Holzarten nach den verſchiedenen Claſſen, gewiſſermaßen mit einem Blick überſehen kann.

Da ſich aber dergleichen Holzbeſtandes-Tabellen, ſo wie die daraus anzufertigende Rekapitulation, ganz nach abgemeſſenen Vorſchriften richten, und dieſe nicht an allen Orten übereinſtimmend, ſondern verſchieden ſind; ſo iſt auch hier kein beſonderes Beiſpiel zur Anfertigung derſelben mitgetheilt, zumal gegenwärtiger Unterricht, nicht die Forſtwirthſchaft einer gewiſſen Provinz allein, ſondern die Forſtwirthſchaft, ſo weit ſie mathematiſch iſt, allgemein bezweckt, und überdies in der Geometrie Beiſpiele vorkommen, wie man in Sachſen verfährt.

Jede Provinz oder jeder Staat handelt nach den, für den gegenwärtigen Zuſtand ſeiner Forſten zuträglichſten Maximen, und darnach ertheilt das Forſtdepartement auch die Vorſchriften zur Taxirung und Abſchäzung derſelben und ſchreibt der Gleichförmigkeit wegen Muſter vor, nach welchen die nöthigen Tabellen entworfen werden müſſen. Wer den in dieſem Lehrbuche ertheilten Unterricht in der Arithmetik gefaßt hat, wird auch im Stande ſeyn, nach einem vorgeſchriebenen Forſt-Reglement, die zur Bewirthſchaftung eines Forſtes nöthigen Tabellen abzufaſſen, oder die Berechnungen anzuſtellen, um die Reſultate in die Tabellen eintragen zu können. Ein Beiſpiel der Anfertigung einer Holzbeſtandes-Tabelle und daraus gezogenen Rekapitulation für Preußiſche Förſter, nach dem vom königlichen Forſt-Departement vom 10ten April 1787. bekannt gemachten Ingenieur-Reglement zur Vermeſſung der Forſten ꝛc. findet man in den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie für diejenigen, welche ſich dem Forſtweſen widmen. Vom K. Pr. Lieut. bei dem Feldartillerie- und öffentlichen Lehrer bei dem reitenden Jäger-Corps, Herrn J. F. von Oppen. Berlin 1792.

Anfangsgründe

der

Geometrie.

Erſter Theil.

Die theoretiſche Geometrie.

Einleitung,

welche Begriffe und Erklärungen enthält.

§. 1.

Die ausgedehnten ſtäten oder zuſammenhängenden Größen ſind der Gegenſtand der Geometrie. Nun ſind Linien, Flächen und Körper ausgedehnte zuſammenhängende oder ſtäte Größen, daher machen dieſe den Gegenſtand der Geometrie aus. Die Geometrie lehrt, wie man dieſe Größen mit einander vergleichen und aus bekannten oder gegebenen Größen dieſer Art, andere von eben der Art finden kann.

Anmerkung.

Das Wort Geometrie bedeutet eigentlich nach dem Griechiſchen Erdmeſſung. Man findet aber in der Geometrie die Gründe zu jeder Art von Ausmeſſung, wovon die Vermeſſung der Felder, Wieſen, Aecker, der Waldungen oder Forſten und kleinerer Theile derſelben, nur ein geringer Theil iſt.

§. 2.

Die Geometrie theilt man nach ihrer Beſtimmung ein, in die theoretiſche und praktiſche. In der theoretiſchen

tiſchen Geometrie werden bloß die Gründe entwickelt, wornach man geometriſche Körper oder Gränzen derſelben mit einander vergleichen und aus bekannten, unbekannte herleiten kann; in der praktiſchen Geometrie hingegen wird gezeigt, wie man die Lehren der theoretiſchen auf wirklich vorhandene Körper und ihre Gränzen anwendet.

Anmerkung.

Da die Anwendung der theoretiſchen Geometrie ſo allgemein iſt, daß man ſie zur Beſtimmung aller Größen oder aller körperlichen Gegenſtände und ihrer Gränzen anwenden kann, ſo enthält die praktiſche Forſtgeometrie nur einen kleinen Theil der geſammten praktiſchen Geometrie, nämlich nur dieſen: Die Größen der Flächen einer Forſt und die Gränzen dieſer Flächen, die Linien und Winkel, unter welchen ſich die erſten ſchneiden, zu meſſen, und ihre Größe, ſo wie die Größe der in der Forſt befindlichen körperlichen Gegenſtände, oder ihre Abmeſſungen anzugeben.

§. 3.

Die ausgedehnten Größen nehmen einen gewiſſen Raum ein, und dieſen Raum nennt man die geometriſche Ausdehnung. Iſt dieſe Ausdehnung nach allen Seiten oder Richtungen, d. i. nach Länge, Breite und Höhe oder Tiefe merkbar, ſo heißt ſie die körperliche Ausdehnung, oder ein geometriſcher Körper; iſt die körperliche Ausdehnung aber mit irgend einer Maſſe z. B. Holz ꝛc. erfüllt, ſo hat man einen phyſiſchen oder natürlichen Körper.

§. 4.

Die Ausdehnung der Körper an ſeinen Gränzen heißt des Körpers Oberfläche. Stellt man ſich dieſe Oberfläche theilweiſe vor, ſo hat man eine Fläche. Die

Gränze

Gränze einer Fläche iſt eine Linie und die Gränze der Linie ein Punkt.

§. 5.

Nach dieſer Vorſtellung ſagt man von einem Körper, er ſey dick, d. i. er habe Länge, Breite und Höhe oder Tiefe. Bisweilen drückt man Höhe oder Tiefe auch durch das Wort dick aus. Von Flächen ſagt man: ſie ſind lang und breit oder ſie haben Länge und Breite. Die Linien aber ſind bloß lang, oder ſie haben Länge ohne Breite, und der Punkt iſt die Gränze aller Ausdehnung, dem alſo weder Länge noch Breite zukommt.

Anmerkung.

Bei Flächen kommt Länge und Breite gleichbedeutend mit Länge und Höhe vor, wie z. B. bei den Dreiecken ꝛc. Auch braucht man Länge und Tiefe, ſtatt Länge und Breite, z. B. der Wald iſt lang und tief, d. i. der Wald iſt lang und breit.

In der Körperwelt giebt es überhaupt keine Gegenſtände, ohne die körperliche Ausdehnung. Handelt man daher in der Geometrie von Flächen und Linien, ſo betrachtet man nur die Gränzen der Körper und nicht die Körper ſelbſt. So iſt z. B ein Wald, oder Forſtrevier eine Fläche, d. i. ein Theil der Oberfläche der Erde, wobei weder die ganze Oberfläche, noch auch die Erde in Betrachtung kommt, woran ſich die Oberfläche als Gränze befindet. Auch ſind Zeichnungen von Punkten, Linien und Körpern nur Bilder, die den bezeichneten Dingen aber weſentlich zukommen; weswegen auch Punkte durch Punkte, Flächen durch Flächen und Körper durch Körper bezeichnet werden, wobei man der Vorſtellung mit Farben, Licht und Schatten häufig zu Hülfe kommt.

Linien und Punkte in der Ausübung ſind oft ſelbſt Körper, an welchen man aber nur einen gewiſſen Punkt oder eine gewiſſe Linie betrachtet. So iſt eine Gränzlinie um ein Forſtrevier oft ein Graben, alſo ein Kör-

per, und ein Gränzpunkt ein Hügel, Baum oder Stein. An dieſen Gegenſtänden aber wird nur das betrachtet, was durch den Namen Linie und Punkt ausgedrückt wird.

§. 6.

Hiervon hat man Gelegenheit genommen, die Geometrie in drei Haupttheile zu theilen. Der erſte handelt demnach von der Längenmeſſung oder der Euthymetrie (wovon auch die Trigonometrie ein Theil iſt); der zweite von der Flächenmeſſung oder der Epipedometrie, und der dritte von der Körpermeſſung oder der Stereometrie. Als Theile der Längenmeſſung kann auch die Höhen- und Tiefenmeſſung hieher gerechnet werden. Da aber Höhen und Tiefen ſich nach einerlei Regeln beſtimmen laſſen, ſo begreift man die hieher gehörigen Lehren unter der Höhenmeſſung, und handelt ſie entweder allein, oder in Verbindung der genannten drei Haupttheile ab.

§. 7.

Eine gerade Linie iſt eine ſolche, die ununterbrochen, in ihrer eigenthümlichen oder in einerlei Richtung fortgeht wie a b Fig. 1. Tab. I. und ihre Theile ſind ſelbſt gerade Linien. Jede gerade Linie wird durch ihren Anfangs- und Endpunkt, a und b, ſo wohl nach ihrer Größe, als auch nach ihrer Lage völlig beſtimmt. Uebrigens kann man jede gerade Linie über ihren Anfangs- und Endpunkt, ſo weit man will, in ihrer Richtung verlängern. Auch iſt die gerade Linie der kürzeſte Weg zwiſchen den beiden Punkten, die ihren Anfang und ihr Aufhören bezeichnen, und vermittelſt welcher man daher den Abſtand oder die Entfernung (Diſtanz) zweier Punkte von einander anzugeben im Stande iſt, und worunter man nichts anders verſteht, als die gerade Linie, die zwiſchen den beiden Punkten liegt.

Eine

Eine krumme Linie, wie a b Fig. 2, iſt eine ſolche, die ihre Richtung in jeder Stelle ändert; oder eine ſolche, die keine geradlinigen Theile hat. Da die gerade Linie der kürzeſte Weg zwiſchen zwei Punkten iſt, ſo müſſen alle krummen Linien oder jede zwei gerade Linien, die über der gegebenen zuſammen laufen, zwiſchen eben dieſen Punkten gezogen, länger als die gerade Linie ſeyn.

Anmerkung.

Von einer geraden Linie hat Jeder von ſelbſt eine richtige Vorſtellung. Wer dieſe nicht hat, kann auch nicht begreifen, was man unter Richtung (Direktion) verſteht. Daher ſagt man auch: Was eine gerade Linie ſei, iſt bekannt. Wenn behauptet wird, eine Linie entſtehe aus der Bewegung eines Punktes, ſo heißt das nicht, ſie beſtehe aus an einander liegenden Punkten, weil man ſich keine Bewegung von einem Orte zum andern ohne eine gewiſſe Entfernung denken kann. Dieſe Entfernung nun iſt ſelbſt eine Linie, und die ganze Linie beſteht aus ſolchen Entfernungen, alſo aus kleinen Linien, aber nicht aus Punkten. Da aber eine Entfernung aufhören kann, wo man will: ſo kann die Linie auch überall Punkte haben. In dieſem Sinne alſo läßt ſich jene Behauptung rechtfertigen.

Auf eine ähnliche Art müſſen die Vorſtellungen erklärt werden, nach welchen behauptet wird, daß aus der Bewegung einer Linie, ein Fläche und aus der Bewegung einer Fläche, ein Körper entſtehe. Eine Linie wird entweder mit zwei Buchſtaben bezeichnet, wovon der eine den Anfangs- der andere aber den Endpunkt vorſtellt; oder mit einem Buchſtaben, in welchem Falle aber die Linie abgeſondert von andern ſtehen muß, weil ſonſt leicht Verwechſelungen möglich ſind.

Auch dient der Begriff einer geraden Linie dazu, ein Lineal, an welchem man Bilder gerader Linien ziehen will, anzugeben und zu beurtheilen.

§. 8.

Eine **Kreislinie** wie Fig. 3. iſt eine ſolche, die von dem Punkte c an allen Orten gleichweit abſteht. Den Punkt c nennt man den **Mittelpunkt** oder das **Centrum**. Die gerade Linie cb die von einem Punkte der Kreislinie bis in den Mittelpunkt gezogen werden kann, heißt der **Halbmeſſer** oder **Radius**; die gerade Linie acd aber, welche in einem Punkte a der Kreislinie anfängt, durch den Mittelpunkt c geht, und ſich in einem entgegengeſetzten Punkt d der Kreislinie endiget, der **Durchmeſſer** oder der **Diameter**. Da nun der Durchmeſſer doppelt ſo groß iſt, wie der Halbmeſſer, ſo wird der Halbmeſſer auch **Semidiameter** genannt.

Eine gerade Linie wie ef, welche zwei Punkte der Kreislinie verbindet, doch ſo, daß in ihr nicht der Mittelpunkt liegt, heißt eine **Sehne** oder **Chorde** und das durch ſie abgeſchnittene Stück der Kreislinie ef aber ein **Bogen** oder **Bogenſtück der Kreislinie**. Mehrere aus einerlei Mittelpunkte mit verſchiedenen Halbmeſſern gezeichnete Kreislinien, heiſſen **koncentriſche**; alle aus verſchiedenen Mittelpunkten gezeichnete Kreislinien aber, **excentriſche Kreislinien**.

Eine Kreislinie iſt eigentlich die Gränze einer ebenen Figur, des Kreiſes, und heißt daher auch die **Peripherie** oder der **Umfang des Kreiſes**, oder der **Umkreis**. Jede Kreislinie, ſie ſei groß oder klein, kann in 360 gleiche Theile oder Bogen eingetheilet werden. Jeder ſolche Bogen, oder der 360ſte Theil dieſer Linie heißt ein **Grad der Kreislinie** oder ein **Grad der Peripherie des Kreiſes**. Jeden Grad theilt man aufs neue in 60 gleiche Theile, und nennt jeden ſolchen Theil, eine **Minute**; jede Minute erhält nach dieſer Theilung 60 **Sekunden**; jede Sekunde 60 **Tertien** u. ſ. w.

u. ſ. w. Grade werden mit Null (o), Minuten mit einem Striche ('), Sekunden mit zwei Strichen (''), Tertien mit drei Strichen (''') u. ſ. w. bezeichnet. Die Zahl 35° 7' 26'' 39''' heißt daher 35 Grade, 7 Minuten, 26 Sekunden, 39 Tertien der Cirkellinie oder der Kreisperipherie.

Da dieſe Zeichen mit den Zeichen der Ruthen, Fuße, Zolle und Linien übereinſtimmen, ſo muß man jedesmal aus den Umſtänden beurtheilen, ob die Rede von Cirkellinien oder von geraden Linien iſt. Denn durch Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. wird nicht die Länge des Bogens, ſondern ſein Verhältniß gegen die ganze Kreislinie angegeben.

§. 9.

Ein Winkel iſt die Neigung zweier Linien in einem Punkte, ſo, daß beide Linien zwar einerlei Anfangspunkt haben, ſonſt aber in ihrer Richtung verſchieden liegen, daß ſie nicht auf einander fallen, oder daß die Richtung der einen, die Richtung der andern nicht deckt. Sind die beiden Linien, welche den Winkel machen, gerade Linien, ſo heißt der Winkel: ein geradeliniger Winkel wie cab Fig. 5; ſind hingegen die beiden Linien, krumme Linien, ſo heißt der Winkel ein krummliniger Winkel; iſt endlich nur eine von beiden eine gerade, die andere aber irgend eine krumme Linie, ſo heißt der Winkel ein gemiſchtliniger Winkel. Die beiden Schenkel eines geradelinigen Winkels, machen zuſammengenommen eine gebrochene Linie aus. Steht eine ſolche gebrochene Linie über einer geraden, in ihrem Anfangs- und Endpunkte; ſo iſt die gebrochene Linie größer, als die gerade, die zwiſchen den beiden Punkten liegt (§. 7).

Der gemeinſchaftliche Punkt, in welchen beide Linien zuſammenlaufen, oder ſich ſchneiden, heißt des Winkels Spitze (Vertex) oder der Scheitelpunkt; die beiden Linien aber, die Schenkel des Winkels.

Anmerkung.

Jeden Winkel bezeichnet man entweder mit einem oder mit drei Buchſtaben, ſo daß der eine Buchſtabe des Winkels Spitze anzeigt, die drei Buchſtaben aber ſo ſtehen, daß der, der des Winkels Spitze angiebt, in der Mitte, diejenigen aber, ſo die Schenkel des Winkels anzeigen, am Anfange und am Ende vorkommen. So iſt a (Fig. 4 und 5) ein Winkel, aber auch bac, worin a des Winkels Spitze, ba aber den einen und ac den andern Schenkel bezeichnen. Kommen in einer Figur mehrere Winkel vor, ſo thut man wohl, wenn man alle Winkel mit drei Buchſtaben ausdrückt. Statt des Wortes Winkel ſetzt man auch wohl das Zeichen $<$.

§. 10.

Eine gerade Linie ſchneidet die andere, wenn ſie zwei Punkte, die auf entgegengeſetzten Seiten der andern, und zwar auſſerhalb derſelben liegen, verbindet und jede zwei gerade Linien haben nur einen Durchſchnittspunkt und nicht mehrere. Verlängert man daher die Schenkel eines geradelinigen Winkels über die Spitze, ſo haben beide Linien auf dieſer Seite ſonſt keinen Punkt mit einander gemein, denn fände man das Gegentheil, ſo müßten beide Linien zuſammen fallen (§. 7.), und es wären der Lage nach, nicht mehr zwei gerade Linien, ſondern es wäre nur eine einzige.

§. 11.

Zwei Winkel an einer gemeinſchaftlichen Spitze und an einem gemeinſchaftlichen Schenkel, heiſſen Nebenwinkel, wenn die beiden andern Schenkel in einer-

lei

lei gerader Linie liegen. Verlängerte man daher einen Schenkel, wie ab (Fig. 4 und 5) über a in der Richtung ab hinaus, ſo würde an a und ac (in beiden Figuren) ſogleich ein Nebenwinkel entſtehen.

Zwei Winkel aber an einem gemeinſchaftlichen Scheitelpunkte, wenn jede zwei einander entgegengeſetzte Schenkel in einer geraden Linie liegen, werden Scheitelwinkel oder Vertikalwinkel genannt. Verlängerte man daher beide Schenkel eines Winkels über die Spitze, ſo hätte man Scheitelwinkel eben ſo wohl, als in dem Falle, wenn zwei gerade Linien ſich ſchneiden.

§. 12.

Eine gerade Linie ac (Fig. 4) ſteht ſenkrecht, lothrecht, oder perpendikulär auf einer andern ab, wenn ſie mit ihr gleiche Nebenwinkel macht; die gerade Linie ab aber heißt eine waſſerrechte, horizontale oder ſcheitrechte Linie. Jeden dieſer gleichen Nebenwinkel, wie bac, nennt man einen rechten Winkel. Sind aber beide Nebenwinkel auf einer geraden Linie, wie in Fig. 5, ungleich, ſo ſteht der gemeinſchaftliche Schenkel ac ſchief und alle an einer ſolchen Linie ſtehenden Winkel, heißen ſchiefe Winkel. Das Zeichen des rechten Winkels iſt ein r oder R.

Anmerkung.

Die ſenkrechte Linie erhält man in der Ausübung, durch die Richtung der Schwere; eine waſſerrechte aber durch die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers. Lothrecht heißt eine Linie wie ac, weil man ſich dazu gewöhnlich eines Stück Bleies oder Meſſing, ein Loth ſchwer, bedient, es an einen biegſamen Faden hängt, und vermöge der Schwere herabſenken läßt. Den Namen Perpendikularlinie haben vermuthlich die Perpendikel, wie z. B. an Wanduhren veranlaßt. Horizontal heißt eine

Linie, wie ab, weil man im Freien ein Stück Feld überſieht, das kreisförmig erſcheint, deſſen Durchmeſſer eine gerade Linie zu ſeyn ſcheint, und der ſcheinbare Horizont heißt; ſcheitrecht hingegen, weil man durch Hülfe des Senkloths, Scheite, Breter, Flächen ꝛc. ſo richtet, daß ſie mit dem Senklothe rechte Winkel machen. Uebrigens dienen auch ohne ein Senkloth die Waſſerwaagen (Niveaus) dazu, Bilder ſolcher Linien in der Ausübung darzuſtellen.

§. 13.

Alle rechte Winkel ſind einander gleich, und jeden rechten Winkel kann man als das Maß (Norm) aller übrigen betrachten. Man hat daher den rechten Winkel, damit man alle übrigen Winkel bequem zu meſſen im Stande iſt, in 90 gleiche Theile getheilt, und jeden dieſer Theile einen Grad des rechten Winkels genannt. Jeder Grad wird abermals in 60 kleinere, aber unter ſich gleiche Theile getheilt, die man Minuten nennt; jede Minute hat auf dieſe Art 60 Sekunden, und jede Sekunde 60 Tertien ꝛc. Zeichen und Eintheilung ſind wie bei der Kreislinie §. 8. Demnach wäre 26° 15' 17'' 31''' die Zeichen durch Worte ausgedrückt, ein Winkel von dieſer Größe: 26 Grade, 15 Minuten, 17 Sekunden, 31 Tertien vom rechten Winkel.

Da nun ein Bogen der Kreislinie, zwiſchen den Schenkeln irgend eines Winkels, eben ſo viel Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. von der Kreislinie faſſet, als der Winkel Grade, Minuten, Sekunden ꝛc. vom rechten Winkel, ſo treffen die Zahlen für den Kreisbogen und den Winkel mit einander überein. Dieß aber muß nicht etwa auf die Idee leiten, als wenn man Winkel durch Bogen, und umgekehrt, Bogen durch Winkel meſſen könnte, denn daß dies nie geſchieht, erhellet aus dem Satze: das Maß und die zumeſſende Größe müſſen homogen,

gen, d. i. von einerlei Art ſeyn. Indeß ſchafft dieſe Eintheilung den Vortheil, daß wenn auf irgend eine Art die Größe des Bogens zwiſchen den Schenkeln eines Winkels gemeſſen worden iſt, man auch zugleich die Anzahl der Grade und Theile von Graden kennt, welche die Größe des Winkels angiebt; und ſo auch umgekehrt.

Anmerkung.

Auf den rechten Winkel gründet ſich ein, auch in den mathematiſchen Beſtecken befindliches, aber auf dem Papiere ſehr entbehrliches Werkzeug, der Winkelhaken, womit man die rechten Winkel an körperlichen Gegenſtänden zu unterſuchen im Stande iſt. Da nun dieſer Winkelhaken im Lateiniſchen Norma heißt, ſo nennt man auch bisweilen die ſenkrechte Linie, die auf einer andern geraden Linie rechte Winkel macht, die Normallinie.

§. 14.

Jeder ſchiefe Winkel iſt entweder größer als ein rechter, oder kleiner; ein Winkel, der größer iſt als ein rechter, alſo mehr als 90° mißt, heißt ein ſtumpfer, wie in Fig. 6. bac; ein Winkel aber, der kleiner iſt, als ein rechter, alſo weniger als 90° mißt, heißt ein ſpizzer Winkel, wie bac in Fig. 5.

§. 15.

Alle ſchiefe Winkel laſſen ſich entweder mit einem, oder mit zwei rechten Winkeln vergleichen. Der Winkel, den ein ſtumpfer erhalten muß, um zwei rechten Winkeln gleich zu ſeyn, und der, den ein ſpitzer erhält, um einem rechten Winkel gleich zu werden, heißt in beiden Fällen die Ergänzung, der Ergänzungswinkel oder das Complement. Jeder ſtumpfe Winkel wird durch einen ſpitzen zu 2 R, und jeder ſpitze Winkel, eben-

falls durch einen ſpitzen, aber nur zu einem rechten Winkel, oder R ergänzt. Und umgekehrt: Jeder ſpitze Winkel hat einen ſtumpfen zur Ergänzung zu 2 R; hingegen einen ſpitzen Winkel zur Ergänzung zu einem rechten Winkel, oder zu R. Hieraus folgt: Sind zwei oder mehrere Winkel einander gleich; ſo ſind auch ihre Ergänzungen gleich; und umgekehrt: Weiß man daß zwei oder mehrere Winkel gleiche oder einerlei Ergänzungen haben, ſo ſind die Winkel einander ſelbſt gleich.

§. 16.

Da eine ſenkrechte Linie auf einer andern geraden Linie, wie z. B. ac auf db (Fig. 4) auf beiden Seiten rechte Winkel macht, ſo ergeben ſich folgende Sätze:

1) Die Summe zweier Nebenwinkel auf einer geraden Linie, macht zwei rechte Winkel oder 180°.

2) Auf einer geraden Linien können überhaupt nicht mehr und nicht weniger als 2 R oder 180° vorkommen, die Anzahl der Winkel mag groß oder klein ſeyn, wenn ſie nur ſämmtlich eine gemeinſchaftliche Spitze haben.

3) Auch kann man jede gerade Linie ſelbſt als 2 R oder als einen Winkel von 180° betrachten, wenn man zwiſchen dem Anfangs- und Endpunkte ſich nur einen Punkt denkt, der des Winkels Spitze vorſtellt; denn auch die in gerader Linie entgegengeſetzte Lage beider Schenkel gehört unter den allgemeinen Begriff eines Winkels (§. 9.).

4) Jede zwei entgegengeſetzte Scheitel- oder Vertikalwinkel ſind gleich (§. 11).

5) Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum, ſind vier rechten Winkeln oder 4 R gleich, oder = 360°.

§. 17.

Durch den Saꜩ §. 16. n. 3. veranlaßt, kann man auch alle Winkel in hohle und erhabene eintheilen. Ein hohler Winkel iſt kleiner als zwei rechte; ein erhabener aber entweder eben ſo groß, oder größer als zwei rechte Winkel. Demnach wird ein hohler Winkel, entweder durch einen ſpiꜩen, oder einen rechten oder einen ſtumpfen, zu zwei rechten Winkeln; ein erhabener Winkel aber durch zwei rechte, oder durch einen ſtumpfen oder einen ſpiꜩen Winkel zu vier rechten Winkeln ergänzt. Oder kürzer: Hohle und erhabene Winkel werden allemal zu vier rechten Winkeln ergänzt. Bei dieſer leꜩten Ergänzung ergänzt der hohle den erhabenen, und umgekehrt, der erhabene den hohlen zu vier rechten Winkeln.

Die hohlen Winkel nennt man auch auswärtsgehende, ſo wie die erhabenen, einwärtsgehende Winkel.

§. 18.

Von zwei geraden Linien, die von einer dritten geraden Linie unter gleichen Winkeln durchſchnitten werden, ſagt man, daß ſie einerlei Lage haben. Gerade Linien aber, die in einerlei Fläche einerlei Lage haben, heiſſen Parallellinien, wie z. B. ab und cd Fig. 7. Die gleichen Winkel, welche die Linie ef mit ab und cd in den Durchſchnittspunkten macht, nämlich egd = ehb heißen die Abweichungswinkel. Läge in a (Fig. 8.) eine gerade Linie mit der durch b gezogenen parallel, ſo wäre die ſenkrechte Linie ab die Entfernung der beiden Parallellinien von einander.

Für die Parallellinien ſind folgende Stücke zu merken, die man als Kennzeichen der parallelen Lage anſehen kann:

Werden

Werden zwei Parallellinien von einer dritten durchſchnitten, ſo ſind

1) die Abweichungswinkel, wovon egd der äußere und ehd der innere heißt, einander gleich;

2) die Wechſelwinkel, wovon cgf auf der einen, und ehd auf der andern Seite der geraden Linie ef liegt, ſind ebenfalls gleich;

3) die Summe der beiden innern Winkel (auf einerlei Seite) dgf und ehd beträgt zuſammen, zwei rechte Winkel. Das Zeichen der Parallellinien iſt ∓ oder ⋕.

§. 19.

Jede Fläche, in welcher jede zwei Punkte durch eine gerade Linie ſo verbunden werden können, daß dieſe ganz in der Fläche liegt, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene (Planum). Eine unebene oder krumme Fläche iſt eine ſolche, auf welcher ſich kein ebener Theil angeben läßt. Alle andern Flächen, die aus Ebenen und krummen Flächen zuſammengeſetzt ſind, und als ein Ganzes betrachtet werden, heißen gemiſchte Flächen. Anfänglich ſetzt man in der Geometrie voraus, daß alle Punkte und Linien, die in Betrachtung kommen, in einerlei Ebene liegen: und alle Sätze und Lehren der Geometrie, welche man unter dieſer Vorausſetzung behauptet, führen zuſammen genommen den Namen der ebenen Geometrie, oder der Planimetrie. Daher ſind die §. 9. erklärten Winkel insgeſammt ebene Winkel.

Anmerkung.

Die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers in einem Teiche oder in einem andern nicht zu großen Waſſerbehälter, giebt nicht nur ein Bild einer Ebene, ſondern auch das Bild einer horizontalen Ebene. Die Oberfläche eines ſanft laufenden Fluſſes iſt zwar auch ein Bild einer Ebene, aber einer ſchiefen, oder gegen den

den Horizont geneigten Ebene. Betrachtet man hingegen die Oberfläche einer Kugel oder den gekrümmten Theil der Oberfläche eines Cylinders oder einer Walze, ſo hat man ein Bild einer unebenen oder krummen Fläche. Eben ſo giebt ein Stück der Oberfläche der Erde, unter dem Namen eines Ackerſtückes oder einer Wieſe in unebenen oder gebirgigen Gegenden, das Bild einer gemiſchten Fläche.

Die Tafel eines Reißbretes muß eine Ebene ſeyn, um darauf, wenn ſie mit Papiere beſpannt iſt, Bilder gerader Linien und Bilder ebener Flächen zu zeichnen. Man probirt ein Reißbret in dieſer Abſicht, wenn man ein geradelinig, vollkommen richtig gearbeitetes Lineal mit der Kante, an welcher dieſe gerade Linie als Gränze liegt, auf die Tafel legt, und findet, daß die Fläche der Tafel mit der geraden Linie der Kante des Lineals völlig zuſammen trift. Ueberdies iſt es bequem, wenn das Reißbret genau rechtwinkelig gearbeitet iſt, weil man alsdann mit Hülfe eines Kopflineals oder einer Reißſchiene, wobei aber vorausgeſetzt wird, daß Kopf und Lineal genau rechtwinkelig ſich treffen, und eines darauf gelegten rechtwinkeligen Dreieckes ſo wohl Parallellinien als auch ſenkrechte Linien ſo ziehen kann, als es der Entwurf irgend einer Zeichnung nur vorausſetzt. Die Reißſchiene wird in der Abſicht, zu ſehen, ob Kopf und Lineal ſich genau rechtwinkelig ſchneiden, auf folgende Art auf dem Reißbrete geprüft: Man legt das Lineal genau an den Rahmen des Reißbretes an, und zieht über die ebene Tafel eine gerade Linie; alsdenn kehrt man das Lineal um, legt den Kopf an die andere Seite und das Lineal wieder ſo an, daß die Kante auf die vorige gerade Linie trift, und zieht abermals eine gerade Linie: fallen nun beide gerade Linien in eine zuſammen, ſo iſt die Reißſchiene richtig gearbeitet. Im Gegentheile aber darf man ſich nicht darauf verlaſſen, wenn man nicht Fehler in der Zeichnung erhalten will, die doch auf alle Fälle vermeidlich ſind. Um nicht in ſolche Fehler, die von der Unrichtigkeit der Reißſchiene herrühren, zu fallen, bedient man ſich bloß eines gemeinen, aber richtig gearbeiteten Lineals und eines genau gearbeiteten rechtwinkeligen Dreiecks.

§. 20.

§. 20.

Eine ebene Figur iſt eine ebene Fläche oder überhaupt eine Ebene, welche von allen Seiten begränzt iſt.

Die Gränzen einer Figur zuſammen genommen, machen den Umfang oder den Perimeter der Figur aus. Sind die Gränzen einer Figur gerade Linien: ſo heißt die Figur geradelinig, und dieſe geraden Linien ſelbſt, heißen die Seiten oder Seitenlinien der Figur. Wird hingegen eine Figur von einer oder mehrern krummen Linien begränzt, ſo heißt die Figur eine krummlinige Figur. Sind endlich die Gränzen einer Figur aus geraden und krummen Linien zuſammengeſetzt, ſo wird ſie eine gemiſchtlinige Figur genannt.

Der ganze Umfang einer geradelinigen Figur als eine Linie betrachtet, gehört weder unter die geraden noch unter die krummen, ſondern unter die gebrochenen Linien. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit dem Umfange einer gemiſchtlinigen Figur. Der Umfang einer ſolchen ſo wohl, als auch jede andere Linie, die aus geraden und krummen Linien, als aus Theilen zuſammengeſetzt iſt, heißt eine gemiſchte Linie.

Anmerkung.

In der Ausübung trift man ſelten vollkommene Ebenen an; daher iſt es nothwendig, unter der Vorausſetzung: daß alle Punkte und Linien, die man durch Meſſung beſtimmt, in einerlei Ebene liegen, die in der Natur angenommenen Punkte und Linien auf einerlei Ebene zu bringen, welches durch Hülfe der zum Vermeſſen dienlichen Inſtrumente und künſtlichen Vermeſſungsmethoden möglich iſt.

§. 21.

Da eine gerade Linie allein, keine Figur begränzen kann; auch zwei gerade Linien keinen Raum entſchließen

können,

können, aber wohl eine einzige krumme Linie, wie z. B. die Kreislinie: ſo muß eine geradlinige Figur wenigſtens drei Seiten haben. So viel überhaupt aber, als eine Figur Seiten hat, ſo viel hat ſie auch Winkel. Die Winkel einer Figur können zum Theil hohle, und zum Theil erhabene ſeyn; auch können alle Winkel einer Figur hohle Winkel ſeyn. Alle Winkel, welche dem Innern der Figur zugekehrt ſind, heißen der Figur zugehörige oder einwärtsliegende Winkel, die man aber mit den Winkeln §. 17., die einwärtsgehende heißen, nicht verwechſeln muß. Die Ergänzung eines einwärtsliegenden, oder eines der Figur zugehörigen Winkels, könnte man auswärtsliegende, oder der Figur nicht zugehörige Winkel nennen. Ihre Größe beträgt allemal um des Winkels Spitze herum, mit dem einwärtsliegenden Winkel zuſammengenommen 4 R oder 360°.

§. 22.

Städte Größen decken einander, oder ſind kongruent, wenn man ſie ſo auf einander legen, oder wenn es Körper ſind, ſo in einander ſetzen kann, daß ihre Gränzen auf einander fallen. Von Körpern ſagt man unter dieſen Bedingungen: ſie paſſen in einander, ſo wie von den übrigen ſtäten Größen, Linien, Winkeln und Flächen: ſie paſſen auf einander. Hieraus ergeben ſich folgende Grundſätze:

1) Stäte Größen, die einander decken, ſind gleich.

2) Gleichgroße gerade Linien und gleichgroße geradelinige Winkel decken ſich.

3) Figuren, die auf einander, und Körper die in einander paſſen, ſind ebenfalls gleich, aber nicht umgekehrt; denn nicht alle gleichgroße Figuren oder Körper, die gleich ſind, decken ſich.

Anmer-

Anmerkung.

Die Vorſtellung von einwärts- und auswärts-liegenden Winkeln bei einer Figur, nutzt bei der Vermeſſung der Gränzen, wo beide Winkel nach ihrer gefundenen Größe gemeſſen und ins Meßregiſter eingetragen werden.

§. 23.

Die geradelinigen Figuren werden nach der Anzahl ihrer Winkel, oder nach der Anzahl der Seiten, oder nach beiden zugleich eingetheilt.

Nach der Anzahl der Winkel giebt es Dreiecke (Triangel), Vierecke und Vielecke oder Polygone.

Nach der Anzahl der Seiten hat man dreiſeitige, vierſeitige und vielſeitige Figuren.

Sind die Figuren nicht geradelinig, ſo drückt man durch die Beiwörter: krummlinig oder gemiſchtlinig, zugleich die Beſchaffenheit ihrer Seiten aus.

§. 24.

Ein geradeliniges Dreieck oder eine dreiſeitige Figur iſt eine Ebene von drei geraden Linien, als ihren Seiten, begränzt.

a) Nach den Winkeln (§. 12.) giebt es folgende Arten von Dreiecken:

1) rechtwinkelige Dreiecke, wie bac Fig. 9. die einen rechten Winkel a haben;

2) ſpitzwinkelige Dreiecke, wie abc Fig. 10, wenn alle drei Winkel ſpitz ſind;

3) ſtumpfwinkelige Dreiecke, wie cab Fig. 11, wenn ſie einen ſtumpfen Winkel a haben, und worin die Seite c, welche dem ſtumpfen Winkel a gegenüber ſteht, die größte Seite iſt. In jedem recht-

rechtwinkeligen Dreiecke, alſo auch in Fig. 9, heiſſen die Seiten, welche den rechten Winkel a einſchließen, alſo ac und ab Catheten oder Perpendikularſeiten, und die dritte, dem rechten Winkel gegen überſtehende Seite bc, welche zugleich die größte Seite im Dreiecke iſt, die Hypothenuſe.

b) Nach den Seiten giebt es folgende Arten von Dreiecken:

1) gleichſeitige oder reguläre Dreiecke, wie abc Fig. 12, wenn alle drei Seiten gleich ſind, alſo ab=ac=bc. Eine dieſer Seiten, welche man will, heißt die Grundlinie oder Baſis, wie etwa ab; die beiden andern aber, ac und bc werden die Schenkel genannt;

2) gleichſchenkelige Dreiecke, wie abc Fig. 13, wenn nur zwei Seiten gleich ſind, alſo ac=bc. Dieſe beiden gleichen Seiten heiſſen die beiden gleichen Schenkel, und die dritte, den vorigen ungleiche Seite ab heißt auch hier die Grundlinie oder Baſis. Dieſe Grundlinie kann kleiner ſeyn, als einer der beiden gleichen Schenkel; oder größer wie in Fig. 13. ABC.

3) ungleichſeitige Dreiecke, wie abc Fig. *, wenn keine Seite der andern gleich iſt. In ſolchen Dreiecken kann irgend eine Seite als Grundlinie oder Baſis betrachtet werden, und die übrigen beiden machen die ungleichen Schenkel aus. Der Winkel über der Grundlinie, heißt die Spitze, und die Höhe eines Dreiecks iſt die, von der Spitze deſſelben auf die Grundlinie gefällte ſenkrechte Linie.

Anmerkung.

Das rechtwinkelige Dreieck giebt zugleich ein Muſter, nach welchem man Dreiecke von gutem harten

Holze nebſt dazu ſchicklichen Linealen verfertigen läßt, um mit Dreieck und Lineal, ſenkrechte ſo wie Parallellinien auf dem Papiere zu zeichnen. Die Größe dieſer Werkzeuge richtet ſich nach der Größe der zu zeichnenden Linien.

§. 25.

Eine vierſeitige Figur oder ein Viereck iſt eine ebene Fläche, welche von vier geraden Linien als von ihren Seiten begränzt wird.

Dieſe Seitenlinien haben in Abſicht der Lage folgende Beſchaffenheit: Entweder ſind jede zwei einander gegenüber ſtehende Seitenlinien parallel, oder nicht. Im erſten Falle heißen die vierſeitigen Figuren Parallelogramme; im letzten Falle aber ſchlechthin Vierecke.

Die Parallelogramme werden daher von zwei Paar Parallellinien begränzt; die Vierecke hingegen von zwei Paar nicht parallelen Linien.

Schneiden ſich die beiden Paare Parallellinien unter rechten Winkeln, ſo entſtehen rechtwinkelige; ſchneiden ſich dieſe Parallellinien hingegen unter ſchiefen Winkeln, ſo entſtehen ſchiefwinkelige Parallelogramme.

A) Die rechtwinkeligen Parallelogramme, die auch Rechtecke heißen, ſind:

1) Das Quadrat oder reguläre Viereck, welches von vier gleichgroßen Seitenlinien begränzt wird, die ſich rechtwinkelig ſchneiden, und wovon jede zwei einander gegen überſtehende parallel ſind, wie abcd Fig. 14.

Jede Seitenlinie im Quadrate, wie ab oder cd heißt insbeſondere die Seite des Quadrats, und iſt für die Fläche oder den Inhalt eben das, was die Wurzel für die Quadratzahl in der Arithmetik

tik iſt; daher ſagt man auch, das Quadrat der Seite ab und verſteht darunter das Quadrat abcd, in welchem ab eine Seite iſt. Iſt cd die Grundlinie des Quadrats, ſo iſt ac die Höhe.

2) Das längliche Viereck oder das Oblongum abcd Fig. 15, welches von vier ſolchen Seitenlinien begränzt wird, die ſich rechtwinkelig ſchneiden, und von welchen jede zwei einander gegenüberſtehende, wie ab, cd und ac, bd einander gleich und parallel ſind. Iſt cd die Grundlinie des Oblongums, ſo iſt ac die Höhe; auch nennt man dieſe beiden Seiten cd und ac, oder ab und bd die Seiten des Oblongums, und dies rechtfertiget die Redensart, wenn man ſagt: das Oblongum der beiden Seiten cd und ac.

B) Die ſchiefwinkeligen Parallelogramme, die man auch verſchobene Parallelogramme nennt, ſind:

1) Die Raute oder das verſchobene Quadrat (Rhombus), welche von vier gleichen Seiten begränzt wird, die ſich unter ſchiefen Winkeln ſchneiden und wovon jede zwei einander gegenüberſtehende parallel ſind, wie abcd Fig. 16. Da die Winkel insgeſammt ſchiefe Winkel ſind, ſo ſind davon zwei einander gegenüberſtehende, wie a und d ſtumpf, aber einander gleich, und die beiden andern, einander gegenüberſtehenden, wie c und b ſpitz, aber ebenfalls einander gleich.

2) Die längliche Raute oder das verſchobene längliche Viereck (Rhomboides), welche von vier Seiten ſo begränzt wird, daß nur jede zwei einander gegenüberſtehende gleich und parallel ſind, und ſich ſämmtlich ſchiefwinklig ſchneiden, wie abcd Fig. 17. Auch hier ſind a und d ſtumpfe

Winkel, aber einander gleich; c und b hingegen ſind ſpitz und ebenfalls einander gleich.

Die Vierecke ſchlechthin ſind auch von zweierlei Art, nämlich ſolche, die zwei parallele mit zwei nicht parallelen Seiten verbunden, enthalten, und ſolche, bei welchen keine Seite mit der andern parallel iſt. Ein Viereck von der erſtern Art nennt man ein Trapez, wie ABCD Fig. 18. (worin aber AB ∦ CD gedacht werden muß); ein Viereck von der letztern Art aber ein Trapezoid, wie Fig. abcd Fig. 18.

Die Winkel dieſer Vierecke, nämlich des Trapez und Trapezoid ſind ungleich groß, ſo wie ihre Seiten.

In jedem Vierecke kann man aus der Spitze eines Winkels in die des gegen überſtehenden Winkels eine gerade Linie, wie bc in Fig. 14. 15. 16. 17 und 18. ziehen, ſo daß ſie ganz innerhalb der Fläche fällt. Eine ſolche Linie aber heißt eine Diagonale, oder Diagonallinie.

§. 26.

Eine vielſeitige Figur iſt eine ſolche ebene Fläche, welche von mehr als vier Seiten begränzt wird, und iſt

1) gleichſeitig, wenn ſie von mehr als vier gleich großen geraden Linien begränzt wird, die an ihrem Umfange auch lauter gleiche Winkel machen. Solche Figuren heißen insbeſondere reguläre Polygone, und ihre Peripherien können um oder in Kreislinien gezeichnet werden, aber auch ohne dieſe vorkommen, wie Fig. 19. 20. 21. 22, wovon Fig. 19. ein Fünfeck, Fig. 20. ein Sechseck, Fig. 21. ein Siebeneck, Fig. 22. aber ein Achteck iſt. Die Winkelſpitzen dieſer Figuren ſind ſämmtlich von ihrem Mittelpunkte, der innerhalb der Figur liegt, ſo wie ihre Seiten, von eben demſelben gleich weit entfernt;

2) **ungleichſeitig**, wenn ſie von mehr als vier **ungleichgroßen geraden Linien** begränzt wird, die an ihrem Umfange auch **ungleiche Winkel** machen. Solche Figuren nennt man **irreguläre Polygone**. Sie ſind am häufigſten in **Felder- Wald- und Revierabtheilungen** anzutreffen, und kommen unter ſehr vielen Abänderungen vor. Eine dergleichen Ebene iſt Fig. 23. von 6 Seiten; alſo ein **irreguläres Sechseck**.

§. 27.

Eine **krummlinige Figur** iſt eine ſolche ebene Fläche, die von einer oder mehrern krummen Linien begränzt wird. Man kann dieſe Art von Figuren ebenfalls in reguläre und irreguläre eintheilen.

a) Die **regulären** ſind:

1) die **Cirkel- oder Kreisfläche**. Sie iſt eine ebene Fläche, begränzt von einer Linie (Kreislinie), die von einem gewiſſen Punkte innerhalb der Figur (Mittelpunkt), allenthalben gleichweit entfernt iſt (§. 8.). Halbmeſſer, Durchmeſſer und Sehne ſind die der Kreislinie. Daher entſteht auch eine Kreisfläche, wenn ſich eine gerade Linie auf einer Ebene um einen feſten Punkt herumbewegt. Der feſte Punkt iſt der **Mittelpunkt**, und die gerade Linie der **Halbmeſſer**. **Theile** der Cirkel- oder Kreisfläche ſind folgende:

α) der **Ausſchnitt** oder **Sektor** bcdb Fig. 3. welcher von zwei Halbmeſſern cb und cd und von einem Kreisbogen db begränzt wird. Die Größe iſt verſchieden.

β) Der **Abſchnitt** oder das **Segment** ef Fig. 3, welchen eine Sehne ef und der von der Sehne abgeſchnittene Kreisbogen begränzt. Die Ab-

ſchnitte wachſen mit der Sehne, bis dieſe Durchmeſſer wird. In dieſem Falle iſt alsdenn der Abſchnitt ein **Halbkreis**; der Halbkreis aber iſt der größte Abſchnitt, weil die größte Sehne der Durchmeſſer iſt, und kein Abſchnitt von keiner andern Linie, als von einer Sehne entſtehen kann.

2) Die **Ovalfläche**. Sie iſt eine ſolche Ebene, die von zuſammengeſetzten Kreisbogen begränzt wird, wie Fig. 24, deren übrige Eigenſchaften aber nicht hierher gehören.

b) Die **irregulären krummlinigen Figuren** werden auf vielerlei Art von einer, oder von verſchiedenen krummen Linien begränzt, wie Fig. 25.

Anmerkung.

In der Natur giebt es außer den Durchſchnitten der Baumſtämme, wenig Kreisflächen, die den Forſtbedienten intereſſiren. Eben ſo ſelten und noch ſeltner kommen Ovalflächen vor. Deſtomehr aber giebt es irreguläre krummlinige Figuren, weil die geradelinigen Gränzen, wenn ſie nicht ſorgfältig bezeichnet oder **verſteinet** werden, bald verloren gehen, und ſich in krummlinige verwandeln. So hat gewöhnlich ein noch unvermeſſener oder unaufgenommener Wald krummlinige Gränzen, die man bei der Vermeſſung des Waldes, ſo weit es ohne Nachtheil geſchehen kann, in geradelinige verwandeln muß.

§. 28.

Gemiſchtlinige Figuren ſind ſolche ebene Flächen, welche theils von krummen, theils aber von geraden Linien begränzt werden, wie Fig. 26.

Ihre Form, die von der Verſchiedenheit der Seiten und der von dieſen entſtandenen Winkel herrührt, iſt mannichfaltig.

Anmerkung.

Gemiſchtlinige Figuren kommen in der Natur am häufigſten vor. Die Gränzen der Waldungen im Ganzen ſo wohl, als in den Theilen, findet man größtentheils gemiſchtlinig. Bei Vermeſſungen und Abtheilungen der Forſten in Reviere und kleinere Theile müſſen ſie vermieden, und in geradelinige verwandelt werden.

§. 29.

Geradelinige Figuren ſind einander ähnlich, wenn bei einer gleichen Anzahl von Seiten, die Winkel unter ſich gleich ſind, und die Seiten, welche gleiche Winkel einſchließen, einerlei Verhältniß haben; oder kürzer: wenn ihre Winkel gleich, und die gleichnamigen Seiten einander proportionirt ſind. Das Zeichen der Aehnlichkeit iſt (∼) Daher ſind auch alle Figuren, die auf einander paſſen, ähnliche Figuren.

Unter den krummlinigen Figuren ſind alle Kreiſe und Kreislinien einander ähnlich. Kreisbögen aber ſind dann einander ähnlich, wenn ſie ihren Peripherien proportionirt ſind.

Eben ſo ſind Ausſchnitte und Abſchnitte ähnliche Figuren, wenn ſie von ähnlichen Bogen begränzt werden, und ähnliche Bogen ſind ſolche, welche eine gleiche Anzahl von ihren Kreislinien faſſen.

§. 30.

Ein Körper iſt der Raum von einer gewiſſen Größe, in beſtimmte Gränzen eingeſchloſſen (§. 3.). Die Gränzen geben dem Körper das, was man ſeine Form oder Geſtalt oder Figur nennt: daher heißt auch ein von allen Seiten (nach der Länge, Breite und Dicke) begränzter Raum, eine körperliche Figur. Die Gränzen einer ſolchen Figur oder eines ſolchen Körpers ſind entweder ebene, oder krumme Flä-

chen, oder ſie ſind aus beiden zuſammengeſetzt. Man nennt ſie zuſammengenommen des Körpers Oberfläche. Der Arten der Körper giebt es vielerlei, z. B. eckige, welche von Ebenen, runde, welche von krummlinigen, und gemiſchte, welche von gemiſchtlinigen Flächen begränzt werden. Diejenige Fläche, worauf ein eckiger Körper ſteht, heißt ſeine Grundfläche, die dieſer entgegengeſetzte die Oberfläche (im beſondern Sinne) und die übrigen Flächen heißen Seitenflächen.

Anmerkung 1.

Die Entſtehung eines Körpers kann durch die Bewegung einer ebenen Fläche begreiflich gemacht werden, welche Fläche alsdann die erzeugende Fläche genannt wird.

Da die Gränzen der Körper, ſie mögen nun auf die eine oder die andere Art erklärt werden, Flächen ſind, ſo werden dieſe eben ſo gemeſſen und beſtimmt, wie man überhaupt Flächen im allgemeinen, und Ebenen im beſondern Sinne, zu behandeln gewohnt iſt.

So iſt z. B. die Seite einer Klafter Holz, die man nach Länge und Breite überſieht, eine Fläche, und zwar entweder eine Seitenfläche oder eine Grundfläche der Klafter. Die äußere Bedeckung eines Baumſtammes, wie die Rinde oder Borke, kann von unten bis oben als eine Fläche betrachtet, gemeſſen und berechnet werden. Schneidet man den Baumſtamm quer durch, d. i. rechtwinkelig der Länge entgegengeſetzt, ſo erhält man einen Durchſchnitt, der eine Fläche und in dem gegenwärtigen Falle eine Cirkel- oder Kreisfläche ſeyn wird. Dieſe Fläche kann wie eine Kreisfläche gemeſſen, berechnet, und nach ihr die Stärke des Baums im Durchſchnitte beurtheilt werden. Und ſo verhält es ſich in allen andern Fällen.

Anmerkung 2.

Da es der Körper, nach ihrer Form beurtheilt, ſehr viele giebt, deren Größe ſowohl dem Inhalte, als auch den Gränzen nach ſich ausmitteln, und davon in den verſchiedenen Geſchäften des menſchlichen Lebens Anwen-

dung

dung machen läßt; dieſe geſammten Körper aber in der Forſtwirthſchaft nicht vorkommen; ſo werden hier nur diejenigen erklärt, welche am gewöhnlichſten vorkommen, und den Forſtmann vorzüglich intereſſiren, weil ſonſt der Vortrag dieſer Lehren, als Geſchäftshülfsmittel, zu weit führen würde.

§. 31.

Ein Würfel oder Kubus iſt ein ſolcher eckiger Körper, der von ſechs gleichen Quadraten, die ſich nach der Länge, Breite und Dicke rechtwinkelig ſchneiden, begränzt wird, wie a Fig. 27. und entſteht, wenn ein Quadrat be an einer Linie cd, die der Länge deſſelben gleicht, und auf cb und ce ſenkrecht ſtehet, herunter bewegt wird. Das bewegte Quadrat iſt die erzeugende Fläche und macht mit dem gegenüberſtehenden, die entgegengeſetzten Grundflächen aus; die übrigen vier Quadrate aber heißen die Seitenflächen des Würfels. Da ſich dieſe ſechs Quadrate in Linien ſchneiden, welche der Länge des Würfels ſowohl, als ſeiner Breite und Dicke gleich ſind, ſo heißen ſie die Seitenlinien oder die Kanten des Würfels, die mit den Seitenlinien der Grund- und Seitenflächen nicht verwechſelt werden dürfen, und die nichts anders ſind, als die Gränzen dieſer Flächen.

Jede drei Quadrate ſchließen eine Ecke oder einen Winkel ein, der ein körperlicher Winkel iſt. Hier beim Würfel iſt jeder dieſer Winkel ein rechter Winkel und faßet 3 R ebene Winkel, oder 3 . 90, d. i. 270 Grade. Uebrigens ſind alle körperliche Winkeln gleich, wenn ſie von gleich vielen und gleichen ebenen Winkeln gemacht werden. Auch iſt jeder, mit der Grundfläche des Würfels parallele Durchſchnitt ein der Grundfläche gleiches Quadrat.

Anmerkung.

Mit der Form oder Geſtalt eines Würfels kommt die Geſtalt derjenigen Holzklaftern überein, deren Scheitlänge 3 Ellen oder 6 Fuß beträgt, mithin vermöge der Größe einer Klafter, auch eben ſo hoch und eben ſo breit ſeyn müſſen; demnach iſt eine ſolche Klafter ein Würfel, deſſen Länge, Breite und Höhe oder Dicke gleich, oder jede 6 Fuß iſt.

Auch ſind die ſogenannten Holzmalter, Würfel, die Länge, Breite und Höhe von einerlei Größe haben.

Die Seite des Würfels iſt dem Würfel, d. i. ſeinem körperlichen Inhalte oder dem Raume, der die Größe des Würfels ausmacht, eben das, was in der Arithmetik die Wurzel der Kubikzahl iſt.

§. 32.

Eine einzige Ebene kann keine körperliche Figur begränzen, denn ſie theilt nur, gehörig verlängert, den um uns her befindlichen Raum in zwei gleiche Theile. Aber eine einzige krumme Fläche begränzt Körper, wie z. B. die Oberfläche der Kugel. Auch können zwei oder drei ebene Flächen noch keinen Raum begränzen, folglich auch keinen Körper bilden, es werden wenigſtens vier dergleichen Flächen dazu erfordert. Denn man ſetze z. B. drei gleichſchenklige, aus Pappe geſchnittene Dreiecke mit ihren Spitzen und Seiten zuſammen, ſo werden dieſe einen Raum nicht eher völlig begränzen, bis unten noch ein viertes Dreieck dazu kommt. Wollte man auch den, von drei Dreiecken nur zum Theil begränzten Körper mit ſeinem unbegränzten Theile auf irgend eine Ebene, etwa auf eine Tafel ſtellen, und ſich überreden, daß der Körper mit drei Dreiecken völlig begränzt ſey, ſo würde doch die Ebene der Tafel ſelbſt das vierte Dreieck ausmachen. Da nun vier dreiſeitige ebene Figuren erfordert werden, einen Raum zu begränzen, um ſo mehr werden vierſeitige Figuren nöthig ſeyn, einen Körper zu bilden. Die Anzahl

zahl der Seitenlinien oder Kanten eines Körpers iſt größer, als die Anzahl der Seitenflächen.

Iſt allgemein S die Anzahl der Seitenflächen, ſo kann die Anzahl aller Seitenlinien der Seitenflächen in keinem Falle kleiner ſeyn, als 3. S (§. 21.). Da nun jede zwei an einander gränzende Seitenflächen allemal eine Seite mit einander gemein haben, die man alsdenn Seitenlinie oder Kante des Körpers nennt, ſo iſt die Anzahl aller Seitenlinien oder aller Kanten nur halb ſo groß, als die Anzahl aller Seitenlinien der geſammten Seitenflächen. Iſt K die Anzahl der Kanten eines Körpers, ſo kann K in keinem Falle kleiner ſeyn, als $\frac{3}{2}$ S.

Es ſei z. B. ein Würfel gegeben, ſo iſt die Anzahl ſeiner Seitenflächen 6, oder es iſt 6 = S; die Anzahl aller Seitenlinen der Seitenflächen aber iſt 4 . 6 oder 24, folglich größer als 3 S, oder 6 . 3 < 24, d. i. 18 < 24. Nun iſt K beim Würfel = 12, folglich 12 nicht kleiner als $\frac{3}{2}$ S, d. i. $\frac{3}{2}$. 6 oder $\frac{18}{2}$, oder 9, weil 12 offenbar größer als 9 iſt.

Auch iſt die Anzahl aller ebenen geradelinigen Winkel an der Oberfläche eines Körpers der Anzahl der Winkel aller Seitenlinien der geſammten Seitenflächen gleich. Da nun dieſe doppelt ſo groß iſt, als die Anzahl aller Kanten eines Körpers, ſo iſt, wenn K abermals die Anzahl derſelben bezeichnet, die Anzahl aller ebenen geradelinigen Winkel an der Oberfläche des Körpers 2 K.

Iſt auch hier der Körper ein Würfel, ſo iſt die Anzahl aller ebenen geradelinigen Winkel an der Oberfläche deſſelben 2 . 12 oder 24, welches auch vollkommen damit überein kommt, daß die Gränzen des Würfels 6 Quadrate ſind, und jedes Quadrat 4 Winkel hat, alſo 6 . 4 ebenfalls die Zahl 24 giebt.

Anmer-

Anmerkung 1.

Dieſe Betrachtungen kann man nun nach Abſicht und Gebrauch, wenn es nöthig ſeyn ſollte, auch bei andern eckigen Körpern anſtellen.

Anmerkung 2.

Da die ebenen Seitenflächen der eckigen Körper einander unter gewiſſen Winkeln ſchneiden, alſo nicht alle einerlei Lage haben können, und ſelbſt die Kanten der Körper mit den Seitenflächen gewiſſe Winkel machen; ſo gehört zu einer vollſtändigen Kenntniß der Körper, die Unterſuchung der mancherlei möglichen Lagen einer geraden Linie gegen eine Ebene, und die verſchiedenen Lagen einer Ebene gegen eine andere u. dergl. Den Theil der Geometrie nun, der dieſe und ähnliche Unterſuchungen lehrt, heißt die körperliche Geometrie oder die Stereometrie.

Körperliche Gegenſtände können ihrer Natur nach nur ſehr unvollkommen durch die geometriſche Zeichenkunſt abgebildet werden, weil die Oberflächen derſelben in mehr als einer Ebene liegen. Will man daher z. B. mehr als eine Seite an einer körperlichen Figur ſehen, ſo muß man die Körper entweder nach einer gewiſſen natürlichen Perſpektiv, wie die Körper unſerm Auge in einer gewiſſen Entfernung und in einer gegebenen Lage erſcheinen, abbilden, oder ſie müſſen nach wirklichen Regeln der geometriſchen Perſpektiv entworfen, und nach Geſetzen der Optik durch Hülfe des Lichts und des Schattens förmlich ausgearbeitet werden, welche letztere Kenntniß die eigentliche Perſpektiv lehret. Natürliche Farben und andere dergleichen Hülfsmittel helfen das erſetzen, was bei Entwürfen körperlicher Gegenſtände auf Forſtcharten, der Zeichnung ſelbſt an kunſtmäßiger Behandlung abgehet.

§. 33.

Aehnliche Körper überhaupt nennt man ſolche, die von gleich vielen und ähnlichen Flächen und ähnliche eckige Körper insbeſondere, die von gleich-

gleichvielen und ähnlichen Ebenen begränzt werden; gleiche und ähnliche d. i. kongruente Körper ſolche, die ſich decken. Körper aber können gleich ſeyn, ohne daß ſie zugleich ähnlich ſind.

§. 34.

Ein Balkenſtück oder Parallelepipedum iſt ein ſolcher Körper, der von ſechs ſolchen Ebenen, die ſich rechtwinkelig ſchneiden, und wovon nur jede zwei einander gegenüberſtehende parallel und gleich ſind, begränzt wird, wie a Fig. 28., und entſteht, wenn man irgend ein Oblongum als erzeugende Figur, wie abcd Fig. 15. an einer auf demſelben ſtehenden ſenkrechten Linie, entweder aufwärts = oder unterwärts bewegt.

Jede zwei einander entgegengeſetzte Flächen, die nach der Entſtehungsart des Körpers, gleich und parallel ſind, können, als die Grundfläche, die übrigen aber als Seitenflächen des Parallelogramms angeſehen werden. Jeder mit der Grundfläche parallele Durchſchnitt des Parallelepipedums, iſt ein der Grundfläche gleiches Oblongum.

Anmerkung 1.

Auf dieſer Form oder Geſtalt beruhen alle Holzklaftern und Malter, deren Scheitlänge größer oder kleiner iſt, als die Höhe oder Breite dieſer Klaftern und Malter. Ferner können alle aus rundem Holze beſchlagene, d. i. viereckig oder vierkantig bearbeitete Bauhölzer als Balken, Sägeblöcke, Schwellen, Rahmenſtücke, Riegel ꝛc. als ſolche betrachtet, und es kann die Arbeit des Beſchlagens ſelbſt darnach eingerichtet werden.

Anmerkung 2.

Würfel und Balkenſtücke heiſſen zuſammmen rechtwinklige Parallelepipeda und dieſe ſind

nichts

nichts anders als Prismen oder prismatiſche Körper, deren Grundflächen Parallelogramme ſind. Priſmen (Pfeiler) überhaupt aber ſind Körper, welche von lauter ebenen geradelinigen Figuren begränzt werden, wovon zwei einander entgegengeſetzte gleich, ähnlich und parallel, die übrigen aber insgeſammt in jedem Falle Parallelogramme ſind. Die zwei einander entgegengeſetzten ebenen geradelinigen Figuren, die gleich, ähnlich und parallel ſind, heißen im beſondern Sinne, die Grundflächen, die letztern aber die Seitenflächen des Priſma. Nach der Anzahl der Seitenlinien der Grundflächen, erhält das Priſma die Anzahl der Seitenflächen und den Namen; daher giebt es dreiſeitige, vierſeitige ꝛc. und vielſeitige Priſmen. Die Beſchaffenheit der Grundflächen beſtimmt denn auch die Beſchaffenheit der Priſmen. So giebt z. B. ein gleichſeitiges Dreieck, als Grundfläche, ein gleichſeitiges dreieckiges Priſma; hingegen ein ungleichſeitiges Dreieck, ein ungleichſeitiges dreieckiges Priſma. Und ſo verhält es ſich mit allen übrigen, auch vielſeitigen ebenen Figuren, die als Grundflächen der Priſmen vorkommen.

Die Höhe jedes Priſma iſt die Entfernung der einen Grundfläche von der andern.

Auch kann jedes vier- und überhaupt vielſeitige Priſma, folglich auch jeder Würfel und jedes Balkenſtück durch eine Ebene, wenn ſie durch zwei gleichliegende Diagonallinien in den Grundflächen geht, und Diagonalebene heißt, in zwei gleiche Theile getheilt, oder halbirt werden.

§. 35.

Da ein Würfel oder Parallelepipedum ein gerades oder ſchiefes heißt, je nachdem die Seitenlinien, und daher auch die Seitenflächen, auf den Grundflächen ſenkrecht ſind oder nicht: ſo giebt es überhaupt zweierlei Arten, nämlich gerade und ſchiefe, die man insgemein Priſmen nennt, und durch Beiwörter beſtimmt, ob ſie gerade oder ſchief ſind, weil man unter

ter Cubus und Parallelepipedum nur gerade verſteht.

Jeden ſolchen Körper kann man auch, der ſo wie der Würfel (§. 31.) begränzt wird, nur mit dem Unterſchiede, daß ſich die begränzenden Ebenen unter ſchiefen Winkeln ſchneiden, einen verſchobenen Würfel, und einen Körper, der ſo wie das Parallelepipedum (§. 34.) begränzt wird, und zwar auch mit dem Unterſchiede, daß ſich die begränzenden Ebenen unter ſchiefen Winkeln ſchneiden, ein verſchobenes Parallelepipedum oder ein dergleichen Balkenſtück nennen.

Ein verſchobener Würfel entſteht, wenn man einen Rhombus oder eine Raute (§. 25.) wie a b c d Fig. 16. an einer ſchiefen Linie ſo hoch oder tief bewegt, als die Seitenlinie a b der Raute beträgt.

Der erzeugenden Figur wegen, nennt man einen ſolchen Körper auch einen rautenartigen Würfel. Ein verſchobenes Parallelepipedum aber entſteht, wenn man einen Rhomboides oder eine längliche Raute (§. 25.) wie a b c d Fig. 17. an einer ſchiefen Linie, willkürlich hoch oder tief bewegt. Aus einer gleichen Urſache nennt man einen ſolchen Körper ein länglich rautenartiges Parallelepipedum oder ein dergleichen Balkenſtück.

Die den Grundflächen beider Körper parallelen Durchſchnitte ſind den Grundflächen gleiche Figuren.

Anmerkung.

Mit dem verſchobenen Würfel kann eine Holzklafter, deren Scheitlänge 6 Fuß beträgt, desgleichen auch ein gleichſeitiger Holzmalter verglichen werden, wenn beide an der ſchiefen Anhöhe oder am ſchiefen Abhange eines Berges ſtehen.

Mit dem verſchobenen Parallelepipedum aber kann jede Klafter oder jeder Malter Holz verglichen werden, deren Scheitlänge größer oder kleiner als ihre Breite und Höhe iſt, in dem Falle, wenn beide auf einer gegen den Horizont geneigten Fläche, d. i. wie vorhin, an einem Berge ſtehen.

§. 36.

Ein Kegel oder Conus iſt ein Körper, welcher von einem Kreiſe als Grundfläche, und von einer gekrümmten Oberfläche, welche die Kegelfläche, auch die koniſche Oberfläche heißt, begränzt wird. Die Kegelfläche aber iſt von einem Punkte, auſſerhalb der Grundfläche, als der Spitze, um die Peripherie der Grundfläche gelegt und ſo beſchaffen, daß jede gerade Linie von der Spitze nach der Peripherie der Grundfläche gezogen, ganz in dieſer Oberfläche liegt, wie adb Fig. 29. Die gerade Linie von der Kegelsſpitze nach der Peripherie der Grundfläche oder ad wird die Seitenlinie des Kegels genannt; die gerade Linie aber von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Grundfläche, hier dc, heißt die Axe, ſo wie die Entfernung (ſenkrechte Linie) der Spitze von der Grundfläche, die Höhe.

Ein Kegel iſt gerade, wenn ſeine Axe die Grundfläche ſenkrecht trifft, wie in Fig. 29; ſchief aber, wenn die Axe gegen die Grundfläche unter einem ſchiefen Winkel geneigt iſt.

Aehnliche Kegel nennt man ſolche, deren Axen den Durchmeſſern ihrer Grundflächen proportionirt ſind.

Ein gerader Kegel, wie Fig. 29. entſteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck bcd, um diejenige unverrückte Perpendikularſeite cd herumgedreht wird, welche die Höhe des Kegels angiebt. Dieſe unverrückte Perpendikularſeite iſt auſſer der Höhe auch die Axe des Kegels. Die Grund-

Grundfläche iſt der Kreis, den die zweite Perpendikular-ſeite cb durch die Bewegung beſchreibt; des bewegten Dreiecks Hypotenuſe db aber, giebt die Seitenlinie des Kegels.

Jeder Durchſchnitt durch die Axe des Kegels, alſo der Grundfläche gerade entgegengeſetzt, iſt ein gleichſchenkeliges Dreieck, und in dem Falle, daß der Durchmeſſer der Grundfläche der Höhe des Kegels oder ſeiner Axe gleich iſt, ein gleichſeitiges Dreieck. Alle Durchſchnitte aber, die der Grundfläche parallel geführt werden, ſind Kreiſe, der Grundfläche ähnlich, und dieſe Kreiſe werden deſto kleiner, je näher ſie der Spitze des Kegels liegen. Schneidet man einen Kegel mit der Grundfläche parallel, ſo heißt der zwiſchen beiden Durchſchnittskreiſen liegende Theil des Kegels: ein abgekürzter Kegel. Iſt der Kegel ein gerader, ſo iſt des abgekürzten Kegels Axe, zugleich ſeine Höhe.

Anmerkung.

Mit einem Kegel können Baumſtämme, von dem unterſten Theile des Stammes an der Wurzel an, bis zu der äußerſten Spitze des Schopfes gerechnet, verglichen werden. Alle mit der unterſten Kreisfläche des Baumes gelegten Durchſchnittsflächen geben auch hier immer kleinere Kreisflächen, je näher ſie der Spitze oder dem Schopfe des Baumes kommen. Auch kann man einen von ſeinem Schopfe befreiten Baumſtamm, wenn er ſich nach oben zu verjüngt, mit einem abgekürzten Kegel vergleichen.

§. 37.

In jedem Kreis ſo wohl, als um jeden, alſo auch in und um die Grundfläche eines Kegels, kann man (wie dies in der Folge dargethan werden wird) Dreiecke, Vierecke und Vielecke oder Polygone zeichnen. Legt man

man nun in die Seiten ſolcher Dreiecke, Vierecke oder Polygone Ebenen, welche in der Spitze des Kegels zuſammentreffen, ſo hat man einen Körper, den man eine Pyramide nennt.

Die Pyramide erhält den Namen von der Anzahl der Seitenflächen oder der Anzahl der Seitenlinien in der Grundfläche; daher giebt es dreiſeitige, vierſeitige ꝛc. und überhaupt vielſeitige Pyramiden. Die geraden Linien, in welchen ſich jede zwei Seitenflächen ſchneiden, heiſſen Seitenlinien der Pyramide; der Punkt, in welchem ſie zuſammen treffen, die Spitze, und die Entfernung der Spitze von der Grundfläche, die Höhe der Pyramide. Uebrigens giebt es, ſo wie bei den Kegeln, gerade und ſchiefe Pyramiden.

Iſt die Grundfläche der Pyramide ein Dreieck, ſo iſt die Pyramide dreiſeitig, und man kann jede Seitenfläche als die Grundfläche anſehen.

Jeder Durchſchnitt parallel mit der Grundfläche giebt eine der Grundfläche ähnliche Durchſchnittsfigur.

Wird eine Pyramide mit der Grundfläche parallel durchſchnitten, ſo heißt der Theil der Pyramide, zwiſchen beiden Durchſchnittsflächen: eine abgekürzte Pyramide, deren Höhe die Entfernung beider Durchſchnittsflächen iſt.

Anmerkung.

Kegelförmige Baumſtämme, wenn ſie nach gewiſſen Abſichten bis an den Schopf ſo beſchlagen werden, daß ſie gegen den Schopf zu dünner bleiben als ſie gegen das Saumende zu ſind, können mit Pyramiden verglichen werden; abgekürzte kegelförmige hingegen, wenn ſie auf eine ähnliche Art beſchlagen werden, mit abgekürzten Pyramiden. Auch kommen Einſatzgewichte, wie abgekürzte Kegel und dergleichen

gleichen Pyramiden vor. Eine ſolche Geſtalt trifft man auch bei Maßen einiger flüßigen Materien und der Körner an.

Die Berechnung abgekürzter Kegel wird unter andern auch auf die Geſtalt und Berechnung der Kohlenmeiler angewandt.

§. 38.

Kegel und Pyramiden, wenn ſie gleiche Grundflächen und einerlei Höhe haben, ſind gleich groß. Wenn man daher den Kegel nach allen ſeinen hierhergehörigen Eigenſchaften kennt, ſo ergeben ſich daraus auch die der Pyramide zukommende, und die etwa für die Forſtwirthſchaft nöthigen Eigenſchaften. Eben ſo ſind auch abgekürzte Kegel und dergleichen Pyramiden gleich, wenn ihre Grund- und Durchſchnittsfiguren gleich, und ihre Höhen einerlei ſind. Das Uebrige ergiebt ſich aus der Betrachtung der erwähnten Kegel und Pyramiden.

§. 39.

Ein Cylinder oder Walze (Rundbaum, Rundſäule) iſt ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisflächen, deren Mittelpunkte in einer geraden Linie, die ihre Axe heißt, liegen, als von ſeinen Grundflächen, und von einer gekrümmten Oberfläche, die Cylinderfläche genannt, begränzt wird, welche Cylinderfläche die Peripherie beider Grundflächen ſo umgiebt, daß jede gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte der Peripherie einer der beiden Grundflächen, der Axe parallel zieht, ganz in dieſe Oberfläche fällt wie ad Fig. 30. Die Höhe eines Cylinders iſt die Entfernung der beiden Grundflächen von einander. Der Cylinder heißt gerade oder ſchief, je nachdem die Axe auf den Grundflächen ſenkrecht oder ſchief ſtehet. Cylinder ſind ähn-

 lich,

lich, wenn ihre Axen den Durchmeſſern ihrer Grundflächen proportionirt ſind.

Ein gerader Cylinder wie Fig. 30. entſtehet, wenn ein Rechteck (§. 25 N. 1 oder 2). cbdf um eine ſeiner Seiten, etwa dc, welche unverrückt bleiben muß, ganz herumgedrehet wird. Die Cylinderfläche wird durch die der Axe dc entgegengeſetzte Seite, hier durch bf beſchrieben; die Grundfläche beſchreibt die Seite df und cb, und die Höhe dc iſt die Axe ſelbſt.

Jeder Durchſchnitt des Cylinders durch die Axe iſt ein Parallelogramm und insbeſondere ein Rechteck, wenn der Cylinder gerade iſt; jeder Durchſchnitt aber, mit den Grundflächen parallel, iſt ein Kreis, von der Größe der Grundflächen, und ſein Mittelpunkt liegt in der Axe des Cylinders.

Anmerkung.

Mit dem Cylinder vergleicht man jeden Baumſtamm, der von unten an mehrere Ellen oder Fuße hoch von einerlei Dicke iſt, wie z. B. Mühlwellen, eigentliche Rundbäume ꝛc.

Viele Gefäße flüſſiger Materien und vorzüglich die meiſten Maße dieſer Materien, ſo wie der Körner, ſind förmliche Cylinder.

§. 40.

Da ſich in und um die Grundfläche jedes Cylinders, eben ſo, wie beim Kegel (§. 37.) Dreiecke, Vierecke und überhaupt Polygone zeichnen laſſen, ſo darf man hier nur in jede zwei gleichliegende Seiten in den Grundflächen eine Ebene legen, ſo ſchneiden ſie ſich, und man hat ein Priſma (§. 34). Priſmen und Cylinder auf gleichen Grundflächen, in einerlei Höhe, ſind einander gleich.

Anmer-

Anmerkung.

Wie hohe oder lange Priſmen, bald von wenig, bald von mehrern Seiten, kommen beſchlagene, und durchaus gleichdicke Holzſtücke vor, die zu Ständern in Häuſer, in deutſche Windmühlen ꝛc. gebraucht werden. Da aber die meiſten vierkantig ſind, ſo werden ſie wie Balkenſtücke behandelt (§. 34.)

Schlußanmerkung.

Die bis hierher gegebenen Erklärungen und die mit unter angeführten Sätze betreffen bloß die einem praktiſchen Forſtwirthe unentbehrlichen Begriffe und übrigen Gegenſtände der Geometrie. Mehrere theoretiſche Sätze kommen in der Folge unter den praktiſchen Sätzen oder Aufgaben vor, die nur ſo weit entwickelt und den Gründen nach erörtert werden, als ſie der Ausübung unentbehrlich ſind.

Würde jeder geometriſche Satz nach der, der Mathematik eigenen Lehrart erwieſen, ſo würde zu wenig Raum zu der Entwickelung der unentbehrlichen geometriſchen Geſchäfte eines Förſters übrig bleiben.

Erſte Abtheilung.

Die Längenmeſſung oder die Euthymetrie.

§. 41.

Meſſen heißt überhaupt unterſuchen, wie vielmal eine bekannte Größe, das Maß, in der unbekannten, die man meſſen will, enthalten ſei. Das Maß muß bei allen Arten von Größenmeſſungen von der Art ſeyn, als die Größen ſind, die man mißt; daher muß man Linien oder Längen mit Linien, Winkel mit Winkeln meſſen, und aus eben dem Grunde ſollte man auch Flächen mit Flächen und Körper mit Körpern meſſen. Daß nicht Flächen und Körper unmittelbar gemeſſen werden, liegt in den Vortheilen der Geometrie, nach welchen man durch Hülfe der Kongruenz und Aehnlichkeit der Figuren, auch die Flächen- und Körpermeſſung auf bloße Linien- oder Längenmeſſung zurückführet.

Kennt man diejenigen Abmeſſungen der Flächen und Körper, die ihre Größe beſtimmen, ſo kann man, wenn dieſe unmittel- oder mittelbar gemeſſen worden ſind, die Inhalte der Flächen ſowohl, als der Körper, durch Rechnung in ſolchen Maßen angeben, die mit den zumeſſenden Größen von einerlei Art ſind. Demnach ſind alle wirkliche Meſſungen eigentlich keine andern, als Linien- oder Längen- und Winkelmeſſungen.

§. 42.

Zur Meſſung einer Länge oder Linie wählt man nun das in der Arithmetik genannte Längenmaß, den Pariſer Fuß (§. 197), und beſtimmt darnach, mit Hülfe der in der Arithmetik aufgeführten Tabelle (§. 198 und 199.) den landesüblichen Fuß, oder den Rheinländiſchen, wenn dieſer als ein angenommenes Maß eingeführt iſt. Die Anzahl von Fußen, die eine Ruthe ausmachen, findet man für verſchiedene Oerter in- und auſſerhalb Deutſchland in der Tabelle (§. 201 verglichen mit §. 202. der Arithmetik,) wornach man, nach der in der Geometrie allgemein angenommenen zehntheiligen Eintheilung (nach §. 91 und 92 der Arithmetik) eine zum wirklichen Meſſen brauchbare Länge zuſammenſetzt.

Im Preußiſchen wird bei Königl. Forſtvermeſſungen, laut Reglement zur Vermeſſung der Forſten (vom 10ten April 1787) der rheinländiſche Fuß als das Grundmaß angenommen, und zwar ſo, daß die Ruthe 12 ſolche Fuße, wovon jeder $1391\frac{1}{7}$ vom Pariſer Fuß iſt, enthält. Trägt man nun 12 ſolche rheinl. Fuße auf einen Stab, ſo hat man einen Maßſtab. Dieſer Maßſtab zum Meſſen gerader Linien auf dem Felde erhält aber nicht 12 Theile oder Fuße (wie im Bauweſen), ſondern nur 10 gleiche Theile (vermöge der Decimaleintheilung), und jeder ſolche Theil heißt ein geometriſcher Fuß.

In Sachſen wird die Dresdner oder Leipziger ſogenannte Werkelle zur Beſtimmung des Maßſtabes zum Grund gelegt, ſo daß ſeine Länge aus der Vergleichung der Werkelle zum rheinl. Fuß, 7 Ellen und 14 Zoll beträgt, wenn die Werkelle in 24 Zoll getheilt iſt. Dieſer Maßſtab aber wird auf eben die Art, wie im Preußiſchen, in 10 gleiche Theile oder in 10 geometriſche Fuße getheilt.

Anmerkung.

Vierenklee giebt den Leipziger Fuß zu 1007 Theilen des Rheinl. Fußes an, wenn der letztere in 1000 gleiche Theile getheilt iſt, und darnach hält die Ruthe 7 Ellen und 14 Zolle. Ob die Angabe der 1007 Theile völlige Gewißheit hat, bin ich nicht im Stande zu beſtimmen, weil mir ein richtiger Leipz. Fuß mangelt. Vielleicht ertheilt irgend ein Kunſtverſtändiger in Leipzig hiervon öffentlich Nachricht.

§. 43.

Linien oder Längen werden entweder auf dem Papiere, oder auf dem Felde gemeſſen.

1) Auf dem Papiere entwirft man ſich einen verjüngten Maßſtab und wählt dazu eine willkürliche gerade Linie (weil der Grad der Verjüngung der geometriſchen Figuren willkürlich angenommen wird), und trägt auf dieſe Linie mehrere gleiche Theile, unter dem Namen Ruthe. Eine von den Ruthenlängen theilt man aufs neue in 10 gleiche Theile, ſo hat man Fuße, welche man von 1 bis 10 mit Zahlzeichen notirt. Schreibt man nun die Zahl der übrigen Ruthen auf die dazu gehörigen Theilſtriche, ſo dient ein ſolcher Maßſtab wie Fig. 31. dazu, Linien auf dem Papiere nach Ruthen und Fußen zu meſſen, und auf dem Felde mit natürlichem (unverjüngten) Maße gemeſſene Linien auf das Papier zu tragen.

2) Auf dem Felde bedient man ſich, um gerade Linien zu meſſen, entweder eines Maßſtabes oder einer Meßkette. Beide müſſen an einerlei Orte entweder nach dem landesüblichen Maße, oder nach der örtlichen Elle oder dem örtlichen Fuße der ganzen Länge und den einzelnen Abtheilungen nach beſtimmt werden.

a) Der Maßſtab. Ein ſolcher Maßſtab iſt eine gerade, ungefähr zwei Zoll breite, und einen Zoll dicke

dicke vierkantige Stange von dauerhaftem ausgetrockneten Tannen- Lerchen- oder Büchenholze, worauf wie Fig. 1. Tab. II* (welche Kupfertafel Zuſätze enthält, und nach Tab. II. des theoretiſchen Theils eingeheftet werden muß) eine Ruthe (rheinl. oder landesübliches Maß) aufgetragen und in 10 Fuße getheilt wird. Den letzten Fuß oder alle kann man aufs neue in 10 Zolle und die Zolle ſelbſt noch in halbe- und Viertelzolle theilen. Da eine ſolche Stange 1 Ruthe lang iſt, ſo nennt man ſie auch Meß- oder Maßruthe, auch wohl die Meßſtange.

Wollte man dieſen Maßſtab mehrere Ruthen lang haben, ſo könnten mehrere durch Hülfe leichter und guter Charniere zuſammengeſetzt und als ein Ganzes gebraucht werden. Da aber die Charniere gewöhnlich das Biegen der Stäbe nicht ganz verhindern, ſo braucht man die Meßruthe gewöhnlich nur einfach.

b) Die Meßkette. Ihre ganze Länge beträgt gewöhnlich 5 Ruthen (rheinl. oder anderes landesübliches Maß), und jede Ruthe erhält 10 Fuß, und zwar jeden Fuß einzeln unter dem Namen eines Gliedes. Die Glieder Fig. 2. Tab. II* wie a b, c d ſind von Eiſen- oder Meſſingdrath in der Dicke eines Schreibfederkiels, und werden an ihren zuſammen gebogenen Enden a, b, c, d durch Ringe r von geſchlagenem Meſſinge oder gegoſſenem Eiſen an einander befeſtiget. Alle Entfernungen der Mittelpunkte dieſer Ringe, bei ausgeſpannter Kette, müſſen gleich ſeyn und die Größe eines Fußes erhalten. Die einzelnen Ruthen werden durch große Ringe mit Querriegeln, ſo wie die halben Ruthen durch kleinere Ringe mit andern Abzeichen, unterbrochen. An beiden Enden der Meßkette wer-

Anmerkung.

Vierenklee giebt den Leipziger Fuß zu 1007 Theilen des Rheinl. Fußes an, wenn der letztere in 1000 gleiche Theile getheilt iſt, und darnach hält die Ruthe 7 Ellen und 14 Zolle. Ob die Angabe der 1007 Theile völlige Gewißheit hat, bin ich nicht im Stande zu beſtimmen, weil mir ein richtiger Leipz. Fuß mangelt. Vielleicht ertheilt irgend ein Kunſtverſtändiger in Leipzig hiervon öffentlich Nachricht.

§. 43.

Linien oder Längen werden entweder auf dem Papiere, oder auf dem Felde gemeſſen.

1) Auf dem Papiere entwirft man ſich einen verjüngten Maßſtab und wählt dazu eine willkürliche gerade Linie (weil der Grad der Verjüngung der geometriſchen Figuren willkürlich angenommen wird), und trägt auf dieſe Linie mehrere gleiche Theile, unter dem Namen Ruthe. Eine von den Ruthenlängen theilt man aufs neue in 10 gleiche Theile, ſo hat man Fuße, welche man von 1 bis 10 mit Zahlzeichen notirt. Schreibt man nun die Zahl der übrigen Ruthen auf die dazu gehörigen Theilſtriche, ſo dient ein ſolcher Maßſtab wie Fig. 31. dazu, Linien auf dem Papiere nach Ruthen und Fußen zu meſſen, und auf dem Felde mit natürlichem (unverjüngten) Maße gemeſſene Linien auf das Papier zu tragen.

2) Auf dem Felde bedient man ſich, um gerade Linien zu meſſen, entweder eines Maßſtabes oder einer Meßkette. Beide müſſen an einerlei Orte entweder nach dem landesüblichen Maße, oder nach der örtlichen Elle oder dem örtlichen Fuße der ganzen Länge und den einzelnen Abtheilungen nach beſtimmt werden.

a) Der Maßſtab. Ein ſolcher Maßſtab iſt eine gerade, ungefähr zwei Zoll breite, und einen Zoll dicke

dicke vierkantige Stange von dauerhaftem ausgetrock⸗neten Tannen⸗ Lerchen⸗ oder Büchenholze, worauf wie Fig. 1. Tab. II* (welche Kupfertafel Zuſätze enthält, und nach Tab. II. des theoretiſchen Theils eingeheftet werden muß) eine Ruthe (rheinl. oder landesübliches Maß) aufgetragen und in 10 Fuße getheilt wird. Den letzten Fuß oder alle kann man aufs neue in 10 Zolle und die Zolle ſelbſt noch in halbe⸗ und Viertelzolle theilen. Da eine ſolche Stange 1 Ruthe lang iſt, ſo nennt man ſie auch Meß⸗ oder Maßruthe, auch wohl die Meßſtange.

Wollte man dieſen Maßſtab mehrere Ruthen lang haben, ſo könnten mehrere durch Hülfe leichter und guter Charniere zuſammengeſetzt und als ein Ganzes gebraucht werden. Da aber die Charniere gewöhnlich das Biegen der Stäbe nicht ganz verhindern, ſo braucht man die Meßruthe gewöhnlich nur einfach.

b) Die Meßkette. Ihre ganze Länge beträgt gewöhnlich 5 Ruthen (rheinl. oder anderes landesübliches Maß), und jede Ruthe erhält 10 Fuß, und zwar jeden Fuß einzeln unter dem Namen eines Gliedes. Die Glieder Fig. 2. Tab. II* wie ab, cd ſind von Eiſen⸗ oder Meſſingdrath in der Dicke eines Schreibfederkiels, und werden an ihren zuſammen gebogenen Enden a, b, c, d durch Ringe r von geſchlagenem Meſſinge oder gegoſſenem Eiſen an einander befeſtiget. Alle Entfernungen der Mittelpunkte dieſer Ringe, bei ausgeſpannter Kette, müſſen gleich ſeyn und die Größe eines Fußes erhalten. Die einzelnen Ruthen werden durch große Ringe mit Querriegeln, ſo wie die halben Ruthen durch kleinere Ringe mit andern Abzeichen, unterbrochen. An beiden Enden der Meßkette wer⸗

den ein Paar weite Ringe, wie bei A angebracht, im Durchmeſſer 1 oder 1½ Zoll, die dazu dienen, die Kette auf zwei Meßſtäbe unter dem beſondern Namen der Kettenſtäbe zu ſchieben. Da dieſe äußerſten Ringe weit ſind, ſo muß man, ſo wie bei denen, welche ganze und halbe Ruthen bezeichnen, das Maß des Fußes im Mittelpunkte anfangen und die Länge des daran befindlichen Gliedes darnach einrichten. Vermittelſt eines Hakens iſt das nächſte Glied an jedem Ende der Kette mit dieſen Ringen verbunden. Außer der Kette mit Fußen, muß man noch einen, in einzelne Zolle getheilten Fuß unter dem Namen eines Zollſtabes bei ſich haben, um am Ende der Meſſung einer Linie, außer den Fußen, auch noch die Zolle zu beſtimmen.

Anmerkung.

Die Meßkette muß, weil ſie ſich während der Arbeit doch etwas verziehen kann, von Zeit zu Zeit nach einem Grundmaße nachgerichtet oder korrigirt werden. Die Länge jedes Fußes beträgt auf der nach rheinl. Maße verfertigten Meßkette 1669½ Theile vom Pariſer Fuße, der in 1440 gleiche Theile getheilt iſt. Eine Meßkette aber nach der Dresdner oder Leipziger Werkelle (nach Vierenklee) hat Fuße von 9$\frac{1}{10}$ Zoll Leipz. Länge.

Diejenigen, welche die Meßkette entweder zu beſchwerlich, oder zu theuer, oder endlich dem Verziehen zu ſehr ausgeſetzt finden, meſſen mit Meßſchnüren. Eine Meßſchnur wird aus Hanf geſponnen und widerſinnig gedreht, in Oehl geſotten, und wenn ſie getrocknet iſt, durch zerlaſſenes Wachs gezogen, zuletzt aber mit hartem Wachſe beſtrichen und in Ruthen und Fuße abgetheilt, und durch Tuchſpitzen bezeichnet. Auf eine ſolche Schnur ſoll die Feuchtigkeit keinen merklichen Einfluß haben. Allgemein aber ſteht die Meßſchnur der Meßkette in der Richtigkeit nach, der Leichtigkeit wegen aber hat ſie Vorzüge. Am häufigſten braucht man die Meßſchnur, um gerade Linien zu bezeichnen, indem man die Schnur ausſpannt, und mit Maßſtäben, oder mit der Kette daran hinmißt, damit

mit man nicht aus der Richtung komme, wozu aber die Schnur eine ſehr anſehnliche Länge haben muß. Meß-ketten mit vorzüglicher Genauigkeit nach jedem vor-geſchriebenen Maße verfertiget der Univerſitäts-Mechanikus Herr Weickerdt in Leipzig.

§. 44.

Da in der Natur nicht an jedem Orte, wo man eine gerade Linie abſtecken oder meſſen will, Gegenſtände vorhanden ſind, welche die gerade Linie bezeichnen, und da es nicht in jedem Falle genug iſt, Anfangs- und End-punkt einer geraden Linie zu wiſſen, ſondern mehrere Punkte, welche in einerlei Linie liegen, ſo gehören dazu Werkzeuge, die derjenige beſitzen muß, welcher ſich mit der ausübenden Meßkunſt beſchäftiget. Dieſe Werkzeuge ſind:

1) Abſteckeſtäbe. Ihre Höhe beträgt 5 bis 6 Fuß. Sie werden wie Fig. 3. Tab. II* cylinder-förmig aus trockenem Tannenholze, ungefähr 1 bis 1½ Zoll im Durchmeſſer, gemacht. Um ſie feſt in den Boden einſetzen zu können, erhalten ſie eiſerne Spitzen oder Schuhe, etwa 2 bis 3 Zoll hoch, welche an den Stäben vernietet werden. Ihre Farbe iſt die natürliche Holzfarbe, oder man läßt ſie weiß an-ſtreichen.

2) Meßfahnen. Sie ſind dicker und höher als die vorigen, und erhalten nach Fig. 4. Tab. II* oben viereckige Stücken Leinwand unter dem Namen der Fah-nen, von weißer oder rother, am beſten aber von Orangenfarbe, damit ſie in der Ferne leuchten, und vom Grünen des Waldes abſtechen. Beträgt ihre Höhe 10 Fuß, ſo ragen ſie zweckmäßig hinter niedrigen An-höhen und Gebüſchen hervor.

3) Zeichenſtäbe. Sie ſind etwa 4 bis 6 Zoll lang, ½ Zoll dick und haben unten Spitzen Fig. 5. Tab. II*.

Man

Man braucht ſie um die Kettenlängen zu bezeichnen, und die Anzahl derſelben beſtimmt zugleich die Anzahl der Kettenzüge.

4) Kettenſtäbe. Sie gehören unter die Abſteckſtäbe und zeichnen ſich nur durch ihre Beſtimmung an der Kette aus.

Anmerkung.

Die Menge jeder Art von Stäben beſtimmt die Abſicht überhaupt, oder der beſondere Zweck irgend einer Vermeſſung.

§. 45.

Einige vorläufige Kenntniſſe, welche die Vorausſetzungen enthalten, worauf ſich alle Planmeſſungen gründen.

Alle Entwürfe von gemeſſenen Linien, Winkeln und ganzen Figuren auf dem Papiere, gründen ſich auf die Aehnlichkeit der Figuren, als auf eins der wichtigſten Hauptſtücke in der theoretiſchen Geometrie. Hat man eine Figur auf das Papier ſo gezeichnet, daß nicht nur alle Winkel den gemeſſenen Winkeln gleich, ſondern auch alle Seiten den auf dem Felde gemeſſenen proportionirt d. i. nach einem verjüngten Maßſtabe ſo aufgetragen ſind, daß die Anzahl der Ruthen, Fuße ꝛc. mit den gefundenen übereinſtimmt, ſo ſagt man: die Figur auf dem Papiere iſt ein Grundriß, ein topographiſcher Entwurf oder eine Charte von der Figur auf dem Felde. Die Zeichnungen oder Charten z. B. von einer Forſtgränze, von einem Revier oder überhaupt von einer Forſt, werden auf eben gelegtes Papier, auch zuweilen auf dem Reißbrete, alſo überhaupt auf einerlei Ebene gezeichnet, und doch trift man in der Natur ſelten alle Seiten und Winkel einer Figur in einerlei Ebene an.

Es müſſen alſo auch die Mittel angezeigt werden, wie man im Stande iſt, Figuren, deren Theile in verſchiednen Ebenen, z. B. in unebenen Gegenden liegen, und alle zu meſſende Stücke auf eine und dieſelbe Ebene oder auf einerlei Horizont zu reduciren.

Hierzu dienen folgende Erfahrungen, und daraus hergeleitete Sätze:

Die Richtungen der Schwere zweier, nicht weit von einander entfernter Körper, kann man, ſo weit es durch das Geſicht bemerkt wird, für gleichlaufend, oder parallel annehmen, ſo wie z. B. Fäden, die durch ſchwere, nicht zu weit von einander entfernte Körper ausgedehnt werden. Dieſe Richtungen nennt man Vertikallinien, und kommen mit den ſenkrechten oder lothrechten Linien (§. 12.) überein.

Ebenen in ſolche Vertikallinien gelegt, heiſſen Vertikalebenen (lothrechte, ſenkrechte). Jede Fläche oder Ebene, die eine oder mehrere Vertikallinien oder Vertikalebenen ſchneidet, nennt man eine Horizontalfläche oder Horizontalebene (§. 12.). Hat aber eine Fläche oder Ebene irgend eine andere Lage, ſo heißt ſie eine ſchiefe Fläche oder Ebene.

In dieſer Rückſicht nennt man die Oberfläche eines ſtillſtehenden, ſich nicht zu weit erſtreckenden Waſſers, und Ebenen des platten Landes in nicht zu großen Strecken, horizontale Ebenen. Abhänge an Bergen und Oberflächen anderer Unebenheiten auf der Erdoberfläche, ſind ſchiefe Flächen, weil die Richtung der Schwere mit denſelben ſchiefe Winkel macht. Hieraus wird begreiflich, daß man ſich in jedem Ort eine ſolche Horizontalfläche denken, und gehörig erweitert vorſtellen kann. Auch dient das Gewicht eines freihängenden Körpers dazu, eine Ebene, wie z. B. einen Maßſtab, die Tafel eines Meßtiſches, die Platte eines Winkelmeſſers ꝛc. in eine horizontale Lage zu bringen, und dieſe Lage der genannten

nannten Theile der Inſtrumente iſt bei jeder Vermeſſung nothwendig. Ein hierzu dienliches Werkzeug hat den Namen der Setzwage erhalten und hat folgende Einrichtung. Ein Stück Bret Fig. 6. Tab. II* in der Form eines gleichſchenkeligen Dreiecks acb, worin alſo ac=bc, erhält aus c in ſenkrechter Richtung einen feinen Riß ce, auf welchen ein Faden mit einer Kugel d (das Bleiloth) in die hinter der Kugel befindliche Vertiefung dann ſpielt, wenn die unter der Grundlinie ab des Dreiecks liegende Ebene AB horizontal iſt. Da nun die Ebene AB beweglich angenommen wird (ſie mag ſich nun an einem Maßſtabe oder Meßtiſche oder Winkelinſtrumente befinden); ſo kann man jederzeit durch Hülfe der Setzwage eine Ebene in die horizontale Lage bringen. Ein anderes zu eben dieſem Zwecke dienliches Inſtrument iſt die Waſſerwage Fig. 7. Tab. II*. Sie beſteht aus einem waſſer- und luftdichten cylindriſchen Gefäße abcd aus Meſſing; ihre Höhe bd=ac beträgt 1 Zoll, der Durchmeſſer ab=cd iſt etwa 3 Zoll, und der Deckel aebf iſt von auf beiden Seiten geſchliffenem Glaſe, welcher mit dem Gefäße feſt verbunden, und mit dem unterſten Rande ckld genau parallel ſeyn muß. Durch den Boden geht eine Oeffnung, die mit einer Schraube verſchloſſen und zuvor durch ſie das Gefäß mit gefärbtem Waſſer oder Weingeiſt angefüllt werden kann. Damit die Luft beim Anfüllen heraustreten und dem Waſſer Platz machen kann, befindet ſich im Boden eine zweite Oeffnung, die ebenfalls mit einer Schraube geſchloſſen wird. Der Boden des Gefäßes liegt um 1 Linie höher als der untere Rand, welcher genau abgeſchliffen wird, damit das Inſtrument feſt auf einer Ebene ſtehen kann.

Man läßt nun beim Anfüllen ſo viel Luft im Gefäße, daß ſie ſich in der Geſtalt einer kleinen Blaſe, wie bei g, zeigen, und unter dem Glasdeckel hin- und her ſpielen kann. Aus dem Mittelpunkte des Glasdeckels werden ver-

ſchiedene

ſchiedene koncentriſche Kreislinien eingeſchnitten, die dazu dienen, die Blaſe zu begränzen, woraus man ſieht, daß die Ebene, worauf die Waſſerwage ſteht, horizontal iſt. Auf jeder andern, gegen den Horizont geneigten Ebene, bleibt die Blaſe nicht unter dem Mittelpunkte des Glasdeckels. Daß die Luftblaſe gleichſam im Waſſer oben ſchwimmt, rührt von dem geringern ſpecifiſchen Gewichte der Luft gegen das Waſſer, und von der Eigenſchaft der Luft her, daß ſie ſich nicht mit dem Waſſer vermiſcht.

Hieraus läßt ſich die richtige Vorſtellung von der Möglichkeit eines horizontalen geometriſchen Grundriſſes einer Figur herleiten.

Man denke ſich z. B. die Punkte A, B, C, D Fig. 8. Tab. II* auf dem Felde, aber nicht in einerlei, ſondern in verſchiedenen Flächen oder Ebenen, ſo wie ſie in der Natur an Erhöhungen, Vertiefungen, an Hügeln und Gebirgsſpitzen ꝛc. angetroffen werden, und nehme wo man will, unter dieſen Punkten eine horizontale Ebene an mit abcd bezeichnet und denke ſich Vertikallinien von den Punkten A, B, C, D auf dieſe Ebene in Aa, Bb, Cc, Dd. Die Punkte a, b, c, d, wo die Vertikallinien die horizontale Ebene treffen, ſind die auf den Horizont reducirten Punkte, oder die Projektionen der Punkte A, B, C, D, ſo wie die Linien ab, bc, cd, da, die auf den Horizont reducirten Linien.

Auf dieſe Art kann man ſich leicht denken, daß es möglich ſei, jede in der Natur befindliche Linie, oder jeden Winkel, folglich auch jede Figur auf unebenem Boden, auf irgend einen Horizont zu reduciren. So wie die Punkte A, B, C, D, welche höher als die horizontale Ebene liegen, unter ſich auf einerlei Horizont reducirt werden können, eben ſo können dieſe Punkte auf eine über denſelben angenommene Horizontalebene reducirt werden. Wird daher beim Aufnehmen einer Linie, der Maßſtab

oder

oder die Meßkette jedesmal horizontal gehalten, und das Winkelmeßinſtrument horizontal geſtellt, ſo iſt man überzeugt, daß alle gemeſſenen Linien und Winkel, folglich auch alle aufgenommenen Figuren in einerlei Horizontalebene liegen; und das iſt es, was man bei jeder geometriſchen Vermeſſung, ſie betreffe nun das Forſtweſen oder die Oekonomie überhaupt, verlangt.

Kann man auch nicht in jedem Punkte, oder in jeder Station Meßſtab, Meßkette oder Winkelmeßinſtrument, in einerlei Horizontalebene bringen, ſo erhält man dennoch die Figur ſo, als wenn alle Stücke in einerlei Horizontalebene gemeſſen worden wären, weil die verſchiedenen Horizonte, in welchen man die Vermeſſung anſtellt, ſämmtlich parallel, folglich für einerlei bei dieſem Geſchäfte angenommen werden können.

Eine, aus auf die Art gemeſſenen Stücken, auf das Papier gezeichnete Figur, iſt eigentlich, wenn ſie der gemeſſenen ähnlich iſt, der Grundriß, den man verlangt.

Demnach erhält man von der Oberfläche der Berge, ja ſelbſt von großen Theilen der Erdoberfläche, die keine Ebene, noch weniger eine Horizontalebene iſt, ſo gemeſſen und auf die angezeigte Art auf dem Papiere entworfen, eine horizontale Ebene.

Ein Grundriß enthält alſo nicht die Summe aller Längen und aller Flächen auf Erhöhungen und Vertiefungen, ſondern nur den Raum, den die gegebene Figur auf einer darüber oder darunter liegenden Horizontalfläche einnimmt; demnach iſt der Grundriß von einer über Berge und durch Thäler gehenden Linie, ſo wie von einer Bergfläche kleiner, als die krumme Linie und die gekrümmte Oberfläche des Berges.

Ein Profilriß, der aber in der Forſtwirthſchaft nu dann vorkommt, wenn der Forſtbeamte auch die

Sorge

Sorge für den Waſſerbau ꝛc. hat, enthält diejenige Figur, die man bekommt, wenn man eine Gegend, die mit Berg und Thal abwechſelt, mit einer Vertikalebene ſchneidet, und die darauf erhaltenen Stücke zu Papiere bringt, oder eine Zeichnung davon entwirft. Hier wäre alſo gewiſſermaßen die Vertikalebene der Horizont, worauf man alle Punkte, Linien und ſo die ganze Figur, reduciren müßte. Profilriſſe erhält man durch Hülfe des Nivellirens, welches aber nicht unter die unentbehrlichſten Kenntniſſe eines Förſters gerechnet werden kann. Zieht man durch einen über der Horizontalfläche abcd, erhöhten Punkt C, die Linie $CN \# cb$, und $CI \# cd$; ſo ſind CN und CI horizontal, und $\angle ICN = \angle acb$. CN liegt in der durch cC und bB gelegten Vertikalebene und CI in der durch cC und dD gelegten, und es iſt $\angle ICN = dcb$ das Maß des Neigungswinkels, den die Vertikalebene durch C und D gelegt, mit derjenigen Vertikalebene macht, die in C und B liegt. Kann man daher auf dem Felde den Winkel ICN meſſen, ſo hat man dadurch zugleich den Winkel dcb, den die drei Gegenſtände D, C und B mit einander machen. Wird CI ſo weit verlängert, bis ſie in M die Vertikallinie dD ſchneidet: ſo iſt die Linie DC die wahre Entfernung der Gegenſtände D und C von einander, CM oder cd aber iſt ihre Entfernung nach der Horizontallinie, alſo ihr Horizontalabſtand, und dc iſt die Linie, die man bei dem unmittelbaren Meſſen mißt, und im Grundriſſe von CD auf das Papier trägt.

Da man nun bei Flächenvermeſſungen überhaupt, alſo auch bei dem Vermeſſen einer Linie horizontal verfahren ſoll, ſo muß man Entfernungen auf der Erdoberfläche nur durch den Horizontalabſtand anzeigen.

Auf eine ähnliche Art wird vorausgeſetzt, daß man, wenn Winkel gemeſſen werden ſollen, die dazugehörigen Inſtrumente ſo ſtellt, daß die Schenkel derſelben

in einerlei Horizontalebene liegen. Demnach würde der Winkel DCB, deſſen Schenkel CD und CB nicht in einerlei Horizontalebene liegen, nicht einerlei ſeyn mit dem Winkel MCN, deſſen Schenkel die erforderliche Lage haben und einerlei iſt mit dem Horizontalwinkel dcb.

Anmerkung.

Liegen Punkte auf dem Felde in verſchiedenen Horizonten ſo, wie die Punkte D, C, B, A, und man ſoll den Winkel DCB horizontal meſſen, damit man auf das Papier dcb erhalte; ſo gebe man dem Winkelinſtrumente die Einrichtung, daß man, wenn das Inſtrument horizontal geſtellt iſt, nach den Objekten D und B aus dem Punkte C ſo viſiren kann, als wenn alle drei Punkte D, C und B in einerlei Horizontalebene lägen, welches durch eine eigene Vorrichtung an Winkelmeßinſtrumenten, die unter dem Namen der Kippregel vorkommen wird, ſehr gut angeht. Hierdurch entgeht man entweder Fehlern unmittelbar, oder man iſt Rechnungen aus der ſphäriſchen Trigonometrie überhoben, durch welche man MCN aus den Neigungen CB und CD und DCB findet.

§. 46.

Die mehreſten Vermeſſungen, wozu auch die Vermeſſung der Forſte gehört, gehen dahin, die Figur, welche man mißt, auf den Horizont zu reduciren (§. 5.). Die Urſachen ſind folgende:

1) Weil man leichter eine Horizontalebene ſinnlich, durch Hülfe der Setz- oder Waſſerwage, darſtellen kann, als jede Ebene, die gegen den Horizont geneigt iſt, oder eine ſchräge Lage hat. Auch können die zum Meſſen nöthigen Werkzeuge leichter in eine horizontale, als in eine jede gegen den Horizont geneigte Lage gebracht werden.

2) Weil man in der Oekonomie bis jeƷt, wenn auch nicht völlig gegründet, annimmt, daß der natürliche Werth eines Ackerſtückes ꝛc. nur nach der Horizontalebene, worauf es ſich befindet, beurtheilet werden könne.

Anmerkung.

Die erſte Urſache iſt entſchieden wahr, und ſie iſt der vorzüglichſte Grund, warum Feld- Forſt- und andere Vermeſſungen horizontal vorgenommen werden. Bei Taxirungen kann man annehmen, daß auf mäßigen Bergen und Anhöhen, mehr Unterholz, Wiesewachs und dergl. ſtehe, als auf der darunter liegenden Horizontalebene ſtehen könne, wenn es auch beim Oberholze nicht wahr iſt.

Allgemeine Anmerkung über Horizontalvermeſſungen.

Ich glaube ſo viel wird in der Kürze hinreichen, ſich von dem einen Begriff zu machen, wornach ſo wohl eine Längen- als auch überhaupt eine Planvermeſſung angelegt werden muß. Die theoretiſche Geometrie ſeƷt voraus, daß man alle Längen und Winkel ſo meſſen könne, als wenn alle dazu gehörigen Stücke in einerlei Ebene lägen, die nur, nach der VorausſeƷung der praktiſchen Meßvorſchriften, horizontal angenommen werden darf, ſorgt aber nicht dafür, wie unvermeidliche Hinderniſſe in der Natur wegzuſchaffen ſind, und wie eine Vermeſſung in der Ausübung wirklich ſo unternommen werden muß, daß die gefundenen Stücke mit den VorausſeƷungen übereinſtimmen. Ob es gleich hier nicht möglich war, auf alles aufmerkſam zu machen, was dem praktiſchen Meßkünſtler zur Beurtheilung einer Vermeſſung auf einem gegebenen Boden nöthig iſt; ſo

in einerlei Horizontalebene liegen. Demnach würde der Winkel DCB, deſſen Schenkel CD und CB nicht in einerlei Horizontalebene liegen, nicht einerlei ſeyn mit dem Winkel MCN, deſſen Schenkel die erforderliche Lage haben und einerlei iſt mit dem Horizontalwinkel dcb.

Anmerkung.

Liegen Punkte auf dem Felde in verſchiedenen Horizonten ſo, wie die Punkte D, C, B, A, und man ſoll den Winkel DCB horizontal meſſen, damit man auf das Papier dcb erhalte; ſo gebe man dem Winkelinſtrumente die Einrichtung, daß man, wenn das Inſtrument horizontal geſtellt iſt, nach den Objekten D und B aus dem Punkte C ſo viſiren kann, als wenn alle drei Punkte D, C und B in einerlei Horizontalebene lägen, welches durch eine eigene Vorrichtung an Winkelmeßinſtrumenten, die unter dem Namen der Kippregel vorkommen wird, ſehr gut angeht. Hierdurch entgeht man entweder Fehlern unmittelbar, oder man iſt Rechnungen aus der ſphäriſchen Trigonometrie überhoben, durch welche man MCN aus den Neigungen CB und CD und DCB findet.

§. 46.

Die mehreſten Vermeſſungen, wozu auch die Vermeſſung der Forſte gehört, gehen dahin, die Figur, welche man mißt, auf den Horizont zu reduciren (§. 5.). Die Urſachen ſind folgende:

1) Weil man leichter eine Horizontalebene ſinnlich, durch Hülfe der Setz- oder Waſſerwage, darſtellen kann, als jede Ebene, die gegen den Horizont geneigt iſt, oder eine ſchräge Lage hat. Auch können die zum Meſſen nöthigen Werkzeuge leichter in eine horizontale, als in eine jede gegen den Horizont geneigte Lage gebracht werden.

2) Weil

2) Weil man in der Oekonomie bis jetzt, wenn auch nicht völlig gegründet, annimmt, daß der natürliche Werth eines Ackerſtückes ꝛc. nur nach der Horizontalebene, worauf es ſich befindet, beurtheilet werden könne.

Anmerkung.

Die erſte Urſache iſt entſchieden wahr, und ſie iſt der vorzüglichſte Grund, warum Feld- Forſt- und andere Vermeſſungen horizontal vorgenommen werden. Bei Taxirungen kann man annehmen, daß auf mäßigen Bergen und Anhöhen, mehr Unterholz, Wieſewachs und dergl. ſtehe, als auf der darunter liegenden Horizontalebene ſtehen könne, wenn es auch beim Oberholze nicht wahr iſt.

Allgemeine Anmerkung über Horizontalvermeſſungen.

Ich glaube ſo viel wird in der Kürze hinreichen, ſich von dem einen Begriff zu machen, wornach ſo wohl eine Längen- als auch überhaupt eine Planvermeſſung angelegt werden muß. Die theoretiſche Geometrie ſetzt voraus, daß man alle Längen und Winkel ſo meſſen könne, als wenn alle dazu gehörigen Stücke in einerlei Ebene lägen, die nur, nach der Vorausſetzung der praktiſchen Meßvorſchriften, horizontal angenommen werden darf, ſorgt aber nicht dafür, wie unvermeidliche Hinderniſſe in der Natur wegzuſchaffen ſind, und wie eine Vermeſſung in der Ausübung wirklich ſo unternommen werden muß, daß die gefundenen Stücke mit den Vorausſetzungen übereinſtimmen. Ob es gleich hier nicht möglich war, auf alles aufmerkſam zu machen, was dem praktiſchen Meßkünſtler zur Beurtheilung einer Vermeſſung auf einem gegebenen Boden nöthig iſt; ſo

wollte ich doch auf einige Dinge aufmerkſam machen, die demjenigen nicht entgehen müſſen, der auch nur mit einem leidlichen Grade der Zuverläßigkeit nicht allein Linien, ſondern auch Winkel, und mithin ganze Figuren in Grund legen oder vermeſſen will.

Ausführlicher findet man die, zur Ausübung dieſes Meßgeſchäftes nöthigen Lehren, in Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt ꝛc. im vierten Kapitel.

§. 47.

Aufgabe.

Den Horizontalabſtand zweier Punkte a und b oder eine gerade Linie auf dem Felde zu meſſen, und auf das Papier zu tragen.

Auflöſung.

A) Auf dem Felde.

Erſter Fall: Wenn der Boden eben, und horizontal iſt, folglich Anfangs- und Endpunkt der geraden Linie in einerlei Horizonte liegen.

1) Man bezeichne Anfangs- und Endpunkt durch Abſteckeſtäbe vertikal, wenn ſie nicht merkwürdige Gegenſtände in der Natur z. B. Bäume ꝛc. von ſelbſt bezeichnen.

2) In dieſe Punkte bringe man einen oder mehrere Abſteckeſtäbe ſo in einerlei Vertikalebene, daß man vor dem erſten alle übrigen nicht ſehe, d. i. daß ſie ſich decken, welches hier der Fall iſt, wenn eine Vertikalebene alle Stäbe an einerlei Seite trifft oder berührt. Von dieſer Operation ſagt man: man viſirt Stäbe in eine gerade Linie. Zum Viſiren in dieſem Sinne werden zwei Perſonen erfordert, eine, welche viſiret,

viſiret, und A, die andere, welche den Stab hält, welcher einviſiret werden ſoll, und B heiſſen mag. Die Perſon, welche viſiret, oder A tritt ohngefähr einen Schritt hinter den erſten Stab, der den Anfangspunkt bezeichnet, das Geſichte auf den Endpunkt zugerichtet. Bei dieſer Arbeit druckt man ein Auge zu, und ſtellt ſich ſo, daß die Geſichtslinie an die Stäbe im Anfangs- und Endpunkte ſo treffe, daß ſie beide an einerlei Seite berühret, aber nicht ſchneidet. B tritt um einen Schritt aus der Viſirlinie, oder Viſirebene (weil man durch jede drei Punkte eine Ebene legen, folglich auch als durchgelegt, denken kann), hält den Stab zwiſchen zwei Fingern vertikal über dem Boden, und ſieht nach A hin. A redet mit B vier Zeichen mit der Hand ab, wovon zwei horizontal rechts und horizontal links die Gegenden angeben, wohin der Stab von B hingehalten werden ſoll. Ein Schlag von A mit der Hand unterwärts, heißt: der Stab ſoll eingeſetzt, d. i. in den Boden eingeſteckt werden; ein Schlag aufwärts aber zeigt an, daß die Stäbe ſich nicht decken, und der einzuviſirende herausgenommen, und aufs neue gehalten werden muß. Steckt der Stab mit der Spitze in der Viſirebene, ſo wird er nun oben vertikal gerichtet, welches nach den erſten beiden Zeichen geſchiehet. In jedem Falle müſſen jede drei ſenkrechte Stäbe in einerlei Vertikalebene ſtehen. Uebung allein verſchafft in dieſem Geſchäfte Fertigkeit.

3) Iſt die Vertikalebene zu Stande gebracht, ſo wird die Linie mit der Meßkette oder Meßſchnur, oder auch mit Meßſtäben gemeſſen. Zum Meſſen gehören ebenfalls zwei Perſonen; eine, welche die Meſſung führt, und die andere, welche einen Gehülfen vorſtellt. Die erſte heiſſe auch hier A und die zweite B. Der eine Kettenſtab af wird nun mit der daran befindlichen Kette

in a Fig. 9. Tab. II* vertikal eingeſteckt, und der Gehülfe B wird von A in die Richtung a b gebracht, wo er in c ſeinen Kettenſtab c g vertikal einſetzt, den linken Fuß an das von der Spitze des Stabes c g gemachte Merkmal anſetzt, den Stab c g auszieht, und den Kettenring auf die Mitte des Stabes ſchiebt. Hat B die Kette gehörig geradelinig ausgeſpannt, welches durch Hülfe des Aufſchlagens mit der Kette auf den Boden möglich iſt, ſo wird ein Zeichenſtab in c geſteckt, und mit der Meſſung fortgefahren.

Auf dieſe Art erhält man die Kettenlängen, a c, c d, de, eb, : ſo daß a c + c d + d e + e b = a b d. i. der ganzen Linie oder dem Horizontalabſtande a und b gleich iſt. Iſt die Kette nun 50 Fuß lang, ſo iſt a b = 50 mal 4, oder 200 Fuß. Bliebe zuletzt noch eine Länge zu meſſen übrig, welche keine volle Meßkettenlänge beträgt, ſo beſtimmt man auf der Kette die Anzahl der Fuße, und addirt dieſe zu den ganzen Kettenlängen. Wäre noch ein Theil zu meſſen, kleiner als ein Fuß, ſo kann man dieſen, wenn es nöthig iſt, auf einem Zollſtabe beſtimmen, und der mit der Kette gemeſſenen Länge zuſetzen und man hat die Länge der ganzen Linie.

Zweiter Fall: Wenn der Boden uneben iſt, alſo die Theile der Linie, und mithin auch vielleicht a und b nicht in einerlei Horizonte liegen.

Man behandelt Stäbe und Kette anfänglich wieder wie vorhin; zieht aber jedesmal die Kette horizontal aus, welches man entweder nach dem Augenmaße, oder durch einen mit einem Bleilothe verſehenen Halbkreis, oder durch eine verkehrt aufgehangene Setzwage, worauf die Mittellinie ſenkrecht gezogen iſt, erfährt, ſo daß man Fig. 10 Tab. II* anſtatt a c, die Horizontallinie a l, anſtatt c d, die Horizontallinie l d, und ſo fort, für d e, die Linie n o, für e b aber die Linie e p

und

und zuſammen al + ld + no + ep ſtatt der krummen Linie ab erhält. Da nun al + ld + no + ep den Horizontalabſtand der Punkte a und b beſtimmt, ſo iſt auch hierdurch der Aufgabe ein Genüge geleiſtet.

Dritter Fall: Wenn der Boden gebirgig iſt, ſo daß die beiden Punkte a und b auf verſchiedenen Seiten des Berges liegen.

Man verfahre wie vorhin, und ſpanne die Kette in jeder Station horizontal aus. Hierdurch erhält man Fig. 11. Tab. II* den Horizontalabſtand von a und b. Denn anſtatt ac hat man mn, anſtatt cd aber op, anſtatt de, pq und anſtatt eb die Linie rs, und es iſt mn + op + pq + rs = ac + cd + de + eb = ab.

B) Auf dem Papiere.

Man nehme die auf dem Felde gemeſſene Linie, von einem dazu entworfenen Maßſtabe, zwiſchen die Spitzen eines Handzirkels, und trage ſie auf eine, in unbeſtimmter Länge zuvor gezogene gerade Linie, und bezeichne Anfangs- und Endpunkt; ſo hat die Linie auf dem Papiere nach dem verjüngten Maßſtabe die Länge, welche die gerade Linie auf dem Felde im natürlichen Maße hat.

Anmerkung 1.

Hieraus läßt ſich begreifen, wie man im dritten Falle verfahren müßte, wenn man ſich zur Beſtimmung des Horizontalabſtandes der beiden Punkte a und b, anſtatt der Meßkette oder der Meßſchnur, der Meßſtäbe bediente. Der Meßſtab m ſteht im höher liegenden Punkte n auf dem Boden, und wird in m ſo lange gehoben, bis eine darauf geſetzte Setz- oder Waſſerwage die horizontale Lage angiebt. Iſt dieſe ausgemittelt, ſo iſt mn der Horizontalabſtand der Punkte a und c. Auf ähnliche Art wird bei den übrigen Horizontalbeſtimmungen verfahren, um ſo in mn + op + pq + rs den Horizontalabſtand ab zu finden.

Anmerkung 2.

Zum Auftragen der Linien, Winkel und überhaupt zur Zeichnung der Figuren und Verfertigung geometriſcher Plane, iſt ein mathematiſches Beſteck oder ein ſolches Reißzeug nöthig, worin 1 Handzirkel, 1 Stückzirkel mit dazugehöriger Reißfeder und Bleiſtifthülſe, 1 große Reißfeder, 1 Transporteur, und 1 Maßſtab, worauf einige Zolle Pariſer Maß, einige Zolle rheinländiſches oder anderes Landesübliches Maß, in natürlicher Größe genau aufgetragen, ſich befinden.

Reißzeuge dieſer Art verfertiget von vorzüglicher Güte der Univerſitätsmechanikus, Herr Hetzel der Aeltere, in Halle. Der Preis iſt 5 Thaler in Gold. Hat man auſſer dieſen Stücken noch einen Haarzirkel, einen dreifüßigen Kopierzirkel, und einen Transporteur mit einer beweglichen Regel, in Viertelgrade getheilt, ſo hat man alles, was an Inſtrumenten zum Auftragen der Figuren erforderlich iſt.

Alle übrigen geometriſchen Zeicheninſtrumente ſind zwar nützlich, aber zur gegenwärtigen Abſicht entbehrlich, und ſind überdem auch ziemlich koſtbar. Die Eigenſchaften eines guten Reißzeuges, ſo wie einiger anderer dahin gehörigen geometriſchen Werkzeuge findet man in Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt. Kap. 3. N. III. §. 58. u. f.

§. 48.

Aufgabe.

Eine gerade Linie auf dem Papiere durch einen gegebenen Punkt, mit einer andern geraden Linie parallel zu ziehen.

Auflöſung.

Die Auflöſung iſt vielerlei:

1) Es ſei die gegebene Linie ab. Fig. 32. Man nimmt die Entfernung des gegebenen Punktes von ab in den Zirkel,

Zirkel, in welchem der eine Schenkel einen Bleiſtift oder eine Reißfeder faſſet, legt das Lineal an a b, und zieht mit der Spitze des einen Schenkels an a b hin, ſo beſchreibt der andere die Linie c d ⧺ a b.

2) Oder man zeichnet aus zwei angenommenen Punkten auf a b, die etwa zwiſchen a und b liegen, in der Entfernung der zweiten Linie, Blindbogen (d. i. bloß mit Bleiſtift, ohne daß ſie mit Tuſche überzogen werden); legt das Lineal ſo auf dieſe Bogen, daß die Kante deſſelben ſie trifft oder berührt. Zieht man in dieſer Lage am Lineal hin, ſo iſt auch hier c d ⧺ a b.

3) Oder man zieht vermittelſt eines Parallellineals Fig. 33. eine Linie c d ⧺ a b, wenn man das eine f g an a b ſo legt, daß die Kante des Lineals mit a b zuſammentrifft, und es in dieſer Lage feſthält, das andere Lineal e g aber vorwärts ſchiebt, welches durch Hülfe der Schrägbänder e f und g h möglich iſt, und die Linie c d an der Kante e g hinzieht.

Da die Entfernung der einen Parallele hier auf die Länge der Bänder e f und g h eingeſchränkt iſt; ſo zieht man in der größten Weite, um welche ſich beide Lineale entfernen können, eine Blindlinie an e g nämlich e f Fig. 34; an dieſe e f legt man das Lineal a b, und ſchiebt das obere abermals vorwärts und zieht an e g eine andere gerade Linie c d, die mit der gegebenen parallel iſt. Auf dieſe Art kann man durch jeden Punkt, in jeder gegebenen Entfernung eine Linie c d ⧺ a b ziehen.

4) Oder, wenn der Punkt e Fig. 35 gegeben iſt, und man ſoll durch e eine Linie c d ⧺ a b ziehen; ſo kann man auch eine Zirkelſpitze in e ſetzen, und mit der andern einen Blindbogen ziehen, der a b trifft oder berührt. Mit dieſer Oeffnung des Zirkels beſchreibt man auch

aus g in ab einen ſolchen, und zieht durch e eine gerade Linie ſo, daß ſie den aus g gezeichneten Bogen berühre, ſo iſt cd ∓ ab.

Anmerkung.

Ungeachtet dieſe Methoden auf richtigen Sätzen beruhen, ſo ſind ſie in der Ausübung doch von keinem ſichern Werthe. Die Parallellineale taugen ſo verfertiget wenig, und durch Methoden, die im folgenden angezeigt werden ſollen, kann man ſie gänzlich entbehren.

§. 49.

Winkel werden theils auf dem Felde, theils auf dem Papiere gemeſſen, und auf eine ähnliche Art entweder auf das Feld oder auf das Papier aufgetragen. Die hierzu nöthigen Inſtrumente heiſſen Winkelmeſſer. Den Winkelmeſſer zum Gebrauche auf dem Papiere, nennt man einen Transporteur, und den zum Gebrauche auf dem Felde ein Aſtrolabium. Beide gründen ſich auf die Kreislinie und ihre Eintheilung, und auf den Kreisbogen, der mit einem willkürlich gewählten Halbmeſſer zwiſchen den Schenkeln eines Winkels aus der Spitze beſchrieben werden kann (§. 8 und 13).

Ein Transporteur iſt ein, gewöhnlich aus Meſſing verfertigtes Werkzeug, und beſteht aus einem Lineale, über welchem ſich ein Halbkreis unter dem Namen eines Halbringes (weil ein kleinerer Halbkreis daraus geſchnitten iſt) in ſeine 180 Grade getheilt befindet, deſſen Mittelpunkt in der Kante des Lineals als dem Durchmeſſer des Halbkreiſes liegt. Dieſer Mittelpunkt wird durch eine Spitze ſcharf markirt und dient die Spitze des Winkels, der gemeſſen werden ſoll, anzugeben, ſo wie das Lineal an einen der Schenkel des Winkels zu liegen kommt. Die Grade auf dem Halbringe werden bis in

Vier-

Viertelgrade getheilt, und in zwei concentriſchen Kreislinien von 0 bis 180 vor- und rückwärts bezeichnet.

Ein Winkelmeſſer zum Gebrauch auf dem Felde iſt entweder ein Aſtrolabium, oder eine Bouſſole oder ein ſogenannter Höhenmeſſer oder ein Meßtiſch, oder ein Scheibeninſtrument.

Man ſetzt auch Winkelmeſſer aus Theilen des Aſtrolabiums und der Bouſſole zuſammen, und gebraucht es mit vieler Bequemlichkeit auf dem Felde. Ein ſolches Werkzeug mag ein Winkelmeſſer im Allgemeinen heißen.

Fig. 13. Tab. II* ſtellt die ebene Platte des Winkelmeſſers bloß geometriſch entworfen, und von oben herab anzuſehen vor. Auf dieſer Platte werden mehrere concentriſche Kreislinien aus dem Mittelpunkte C mit einem Halbmeſſer, etwa 6 Zoll groß, gezeichnet, und die Kreislinie ſelbſt in 360 Grade getheilt. Die Grade in Viertelgrade aufs neue eingetheilt, geben dem Inſtrumente eine Vollkommenheit mehr. Die Zahlen der Grade werden erſt von A nach D, B, E zu ſo aufgetragen, daß ſie von 0 oder 10 anfangen, ſo von 10 zu 10 fortgehen, bis ſie ſich in 360 auf A endigen. Auf eine gleiche Art werden die Zahlen von 360 an auch rückwärts von 10 zu 10 aufgezeichnet, ſo daß man z. B. bei 45° unter dieſer Zahl 315° findet, welche Zahl die Ergänzung von 45 zu 360 iſt. Uebrigens iſt die Platte nicht völlig maſſiv, ſondern nur ihr äußerſter Rand, etwa in der Breite eines Zolles.

Von A nach B geht ein Streifen Metall mit dem Rande verbunden ſo, daß C in die Mitte trift. Dieſen nennt man das unbewegliche Lineal, welches am Aeußerſten des Randes auf jeder Seite in A und B rechtwinkliche aufrechte Streifen hat, die durch Gelenke nach Umſtänden niedergedrückt und wieder aufgerichtet werden können. Dieſe Streifen erhalten die zweckmäßige Vorkehrung

kehrung zum Durchſehen oder Viſiren, und heißen daher die Dioptern des unbeweglichen Lineals, woher auch das Lineal mit den Dioptern zugleich, das unbewegliche Diopternlineal heißt. Die Einrichtung der Dioptern ſieht man Fig. 14. Tab. I *. a enthält in der Mittellinie, die auf den Durchmeſſer der Platte trifft, ſo wie b, theils kleine Oeffnungen, theils größere mit eingeſpannten Pferdehaaren übers Kreuz. Die Diopter a heißt, wenn dicht hinter ihr das Auge ſteht, die Okulardiopter, und b, weil man hinter ihr das Objekt ſucht, welches in die gerade Richtung oder Viſirlinie gebracht werden ſoll, die Objektivdiopter. Liegt der Gegenſtand, nach welchem man viſirt, etwas tief, ſo ſieht man durch die Oeffnungen in a und durch das Kreuz in b; ſteht hingegen der Gegenſtand etwas hoch, ſo ſtellt man das Inſtrument ſo, daß das Auge hinter die Oeffnungen in b, das Objekt aber hinter das Kreuz in a kommt. Wird in die ſenkrechten Linien der beiden Dioptern a und b eine Ebene gedacht, ſo trift dieſe den Durchmeſſer, folglich auch den Mittelpunkt des Inſtruments, und heißt die Viſirebene oder auch die Zuverſichtsebene, weil in dieſer Ebene das Auge und der Theil des Gegenſtandes liegt, nach welchem man viſirt, und das Inſtrument darauf ſtehen läßt, während daß ein Winkel gemeſſen wird. Aus eben dieſer Urſache nennt man auch die auf dem unbeweglichen Lineale AB ſtehenden Dioptern, die Zuverſichtsdioptern.

Das Lineal DE iſt um den Mittelpunkt C beweglich, und trift mit der äußern abgefaſeten Schärfe in den Durchmeſſer des Inſtruments, liegt mit den Enden auf dem Rande der unbeweglichen Platte, zeigt als ein Zeiger die Anzahl der Grade in jeder Richtung an, und hat auf jeder Seite am Ende eine ſenkrechtſtehende Diopter, wovon die eine ebenfalls Okular- die andere aber Objektivdiopter heißt. Dieſes Lineal wird auch die Alhidade genannt, deren Dioptern die Alhidadendioptern

heiſſen,

heiſſen, und kann mit den Dioptern innerhalb der Zuverſichtsdioptern auf dem ganzen Rande herumgedrehet werden. Auf der Alhidade DE ſteht eine cylindriſche Büchſe, die ihren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte C des Inſtruments gemein hat. Um einige Linien vom Boden dieſer Büchſe entfernt, liegt ein ſchmaler Rand, der wie der Rand des Aſtrolabiums in 360 Grade getheilt iſt. Wegen des kleinern Durchmeſſers, der aber nicht unter 5 bis 6 Zoll ſeyn ſollte, können keine Viertel- ſondern höchſtens halbe Grade angebracht werden. Im Mittelpunkte C ſteht ein feiner ſpitzer Stift, worauf ſich eine Magnetnadel, auf einem in der Mitte angebrachten Häkchen, herumdrehet, die vermöge ihrer Natur eine Richtung gegen Mitternacht, doch ſo nimmt, daß ſie z. B. in der Gegend von Halle 18° weſtwärts von der Nordlinie angerechnet, ſteht. Die Nordlinie iſt gegen Norden mit N, gegen Süden mit S bezeichnet; dieſe Richtung iſt durch C rechtwinkelig durchſchnitten, auf der einen Seite und zwar rechts (das Geſichte nach Norden gekehrt) wird Oſt durch O und links Weſt durch W angezeigt. Werden die Zahlen von 10 an bis 360 auf dem Rande herum, wie auf dem Rande des Aſtrolabiums, angebracht, und wird die Büchſe oben mit einem Glasdeckel geſchloſſen, ſo dient das Ganze durch Hülfe des unveränderlichen Standes der Magnetnadel ebenfalls dazu, Winkel zu meſſen, weil ſich mit der Alhidade die Büchſe mit der Eintheilung unter der ſchwebenden Magnetnadel umdrehet. Dieſe ganze Einrichtung nennt man eine Bouſſole.

Der ſo zuſammengeſetzte Winkelmeſſer wird nun durch eine, an der untern Seite der unbeweglichen Platte, im Mittelpunkte angebrachte Hülſe auf eine Vorrichtung geſetzt, die eine Horizontalbewegung zuläßt und mit einem Stative verbunden werden kann.

Die Vorrichtung beſteht aus einer Meſſingplatte ab Fig. 13. die auf eine Holzſcheibe aufgeſchraubt wird, welche unter

unter ſich eine Holzſchraube hat, die in eine Mutter des hölzernen Statives paßt. Auf dieſer Meſſingplatte ſitzt die Nuß, in ihrer ſtarken Einfaſſung c, welche von oben bis etwas über die Mitte einen Einſchnitt hat, und ſich oberwärts in einen Cylinder endiget, der herunter gedrückt und dann in die Öffnung gelegt wird, wenn das Inſtrument vertikal hängen, und als Höhenmeſſer gebraucht werden ſoll, ſonſt aber vertikal in die Höhe ſteht. Auf dieſen Cylinder wird die Hülſe d aufgeſetzt und durch die darin befindliche Schraube e befeſtiget. Die Einfaſſung der Nuß wird an dieſe durch die Schraube f feſtgehalten, und nur dann loſe geſtellt, wenn das darauf ſtehende Inſtrument entweder horizontal oder vertikal geſtellt werden ſoll.

Das Stativ beſteht aus einem cylindriſchen Stücke, welches ſich in ein dreiſeitiges, etwa 3 Zoll langes Priſma endiget, an deſſen Seitenflächen drei Füße angeſchroben werden, vermittelſt welcher man das Ganze in die ſenkrechte Lage bringen kann. Die Richtung des Mittelpunkts des Winkelmeſſers nach der Schwere trifft in ein, an der Mitte der Grundfläche des Priſma angebrachtes Senkloth, welches den Standpunkt auf dem Boden bezeichnet.

Die wagerechte Stellung des Winkelmeſſers durch Hülfe des Statives erfährt man durch eine Setz- oder Waſſerwage, die man auf den Glasdeckel der Bouſſole ſetzt.

Fig. 13. Tab. II* enthält bei AB die Platte des Winkelmeſſers mit Linealen und Dioptern im Aufriſſe, das Auge ſenkrecht gegenüber geſtellt, und ſoll bloß dazu dienen, die Vorrichtung mit ihren Theilen zu ſehen, vermittelſt welcher das Inſtrument ſowohl geſtellt, als auch auf das Stativ gebracht werden kann.

Anmerkung.

Einen Winkelmeſſer, der ein halbes Aſtrolabium heißt, mit einer damit verbundenen Bouſſole, nebſt einer

einer zuſammengeſetztern Vorrichtung und dazu gehörigem Stative, findet man beſchrieben und abgebildet in Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt. Kap. 3. N. II. §. 35 ꝛc.

Der Meßtiſch iſt im Ganzen nichts anders, als ein Reißbret mit einer auf der untern Fläche im Mittelpunkt angebrachten Hülſe, um es auf die Vorrichtung Fig. 13. Tab 1i* zu befeſtigen. Um das Reißbret oder den Meßtiſch horizontal zu ſtellen und feſt zu halten, hat man die gedachte Vorrichtung mit einem Holzteller unter ab verſehen, mit welchem die Schraube ins Stativ verbunden iſt, und der überdies die Einrichtung hat, daß durch dieſen Teller drei Holzſchrauben, ſo hoch als die Vorrichtung, ſenkrecht durchgehen und den Tiſch ſtützen, damit er auf keine Seite wanken kann. Verbindet man mit einem ſo eingerichteten Meßtiſche auf der einen Seite ein Lineal mit Verſicherungsdioptern, und einer Bouſſole, auf welcher nur allein die Richtung der Magnetnadel gezeichnet iſt, und hat auf der obern Ebene deſſelben ein von aller Verbindung iſolirtes Diopterlineal, ſo iſt derſelbe nicht nur zum Meſſen der Winkel, ſondern zum Aufnehmen aller Figuren auf dem Felde, folglich auch zur Vermeſſung eines Forſtreviers geſchickt, ohngeachtet man die Winkel nicht in Graden und Theilen von Graden ausgedrückt erhält. Mit Hülfe einer Gabel, an welcher unterwärts ein Bleiloth hängt, kann man die auf dem Felde gegebenen Punkte auf den Tiſch projiciren.

Da man durch den Gebrauch des Meßtiſches nicht nur die Winkel auf dem Papiere von eben der Größe erhält, wie ſie auf dem Felde gefunden werden, ſondern auch die ganze Figur nach einem verjüngten Maßſtabe ſo bekommt, daß ſie der gemeſſenen ähnlich iſt; ſo hat der Meßtiſch den Vortheil, daß er den Grundriß z. B. eines Reviers liefert, da man dieſen, beim Gebrauch eines andern Inſtruments, erſt aus den gemeſſenen Stücken zu Hauſe oder beſonders zu zeichnen genöthiget iſt.

Anmer-

Anmerkung.

Die Meßtiſche haben außer den gedachten Stücken, die zu den weſentlichen gehören, noch verſchiedene Einrichtungen, um ſie außer der Bewegung durch die Nuß, mit einer Schraube ohne Ende ſanft und genau horizontal zu bewegen. Man ſehe Meinerts Anfangsgründe der Feldmeßkunſt. Kap. 3. §. 41 ꝛc. Eine etwas abgeänderte Einrichtung findet man in der Schrift: Der verbeſſerte Meßtiſch, für Freunde der praktiſchen Geometrie. 1788.

Das Scheibeninſtrument hat die Haupteinrichtung mit dem Meßtiſche gemein, nur daß es rund iſt, und daß im Mittelpunkte der Scheibe das Diopterlineal um einen Stift beweglich iſt. Wird der Rand oder Rahmen der Scheibe mit einem meſſingenen Ringe mit der Eintheilung der Kreislinie in Grade ꝛc verſehen, ſo kann man die Winkel auf eben die Art, wie mit dem Aſtrolabio meſſen.

Anmerkung.

Die ſo eingerichtete Scheibe, heißt die verbeſſerte Zollmanniſche Scheibe, die Zollmann in ſ. Geodäſie, Halle 1744. Kap. 3. beſchreibt.

Ein zuſammengeſetztes Inſtrument, welches als Aſtrolabium, Scheibe, Meßtiſch, Bouſſole, Quadrant, Dendrometer und Waſſerwage gebraucht werden kann, findet man beſchrieben und abgebildet in der Beſchreibung eines wohlfeilen Winkelmeßinſtruments ꝛc. Von Fr. Karl Hartig. Frankfurt am Mayn 1796.

Der Quadrant enthält den vierten Theil einer Kreislinie mit Abtheilungen in Grade und kleinere Theile, und dient ebenfalls alle Winkel zu meſſen, weil man von gegebenen ſtumpfen Winkeln jedesmal einen rechten abſchneiden und den übriggebliebenen ſpitzen Winkel mit einem Quadranten meſſen kann.

Der Dendrometer (Baummeſſer) dient auch zur Meſſung der Höhe der Bäume und iſt alſo auch ein Höhenmeſſer.

§. 50.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu meſſen.

Auflöſung.

1) Auf dem Papiere.

Legt man den Mittelpunkt des Transporteurs auf die Spitze des Winkels ſo, daß die Kante des Lineals am Transporteur den einen Schenkel des gegebenen Winkels deckt, ſo läuft der andere Schenkel unter dem Ringe deſſelben durch und trifft entweder mit irgend einem Theilſtrich zuſammen, oder fällt zwiſchen zwei einander zunächſt ſtehende. Zählt man nun von o Grad an, bis dahin, wo der zweite Schenkel des Winkels hin trifft, ſo hat man die Anzahl der Grade ꝛc. die der Winkel faſſet.

Hat der Transporteur aber ein bewegliches Lineal (eine bewegliche Regel), ſo rückt man dieſes, wenn das unbewegliche in einem Schenkel des gegebenen Winkels, und der Mittelpunkt in der Spitze des Winkels liegt, ſo weit, bis die Kante den andern Schenkel trifft. Die zwiſchen den Kanten der Lineale liegenden Grade geben die Größe des Winkels an.

2) Auf dem Felde.

Man ſtellt den Winkelmeſſer (von welcher Art er auch ſei, wenn man nur Horizontalwinkel durch ihn zu meſſen im Stande iſt) mit dem Mittelpunkte ſenkrecht über des gegebenen Winkels Spitze, richtet durch Hülfe der Nuß die Verſicherungsdioptern in den einen Schenkel, der mit einem Abſteckeſtabe bezeichnet ſeyn muß, und führt

das bewegliche Diopterlineal ſo weit um den Mittelpunkt, bis der Stab auf dem zweiten Schenkel in den Faden der Objektivdiopter trift. Die Anzahl der Grade, die zwiſchen den beiden Linealen auf dem Ringe des Aſtrolabiums ſtehen, geben die Größe des Winkels an.

Hat man den Meßtiſch gebraucht, ſo hat man, indem man in beiden Richtungen der Schenkel Linien am Diopterlineal gezogen hat, die Größe des Winkels unmittelbar, die man überdies mit dem Transporteur in Graden ꝛc. ausdrücken kann.

Der Gebrauch der Scheibe mit dem eingetheilten Ringe zeigt, wie das Aſtrolabium, die Größe des Winkels in Graden ꝛc.

Die Bouſſole giebt den Winkel in Graden an, wenn man die Abweichung der Magnetnadel von der Nordlinie, die man auf beiden Schenkeln erhalten hat, von einander ſubtrahirt, wenn ſie auf einerlei Seite der Nordlinie abweicht; hingegen, wenn ſie auf beide Seiten dieſer Linie abweicht, ſo muß man beide Abweichungswinkel addiren.

Zur Erläuterung dient Fig. 12. Tab. II*, wenn der Winkel mit dem Aſtrolabio gemeſſen wird. Es iſt der gegebene Winkel a c d; des Winkels Spitze iſt c. Wird nun der Mittelpunkt C des Inſtruments über c ſenkrecht gebracht, und werden die Verſicherungsdioptern auf den Stab a f ſo eingerichtet, daß der Faden der Objektivdiopter die Mitte trift, und trift auf eine ähnliche Art der Faden in der Objektivdiopter des beweglichen Lineals die Mitte des Stabes d g, ſo zeigt der Bogen zwiſchen A und D auf dem Ringe des Inſtruments die Anzahl der Grade ꝛc.

§. 51.

Aufgabe.

An eine gegebene gerade Linie ab einen Winkel in den Punkt a zu zeichnen.

Aufloͤſung.

1) **Wenn der Winkel in Graden gegeben iſt;** Fig. 36.

Man legt das Lineal des Transporteurs ſo an ab an, daß der Mittelpunkt auf a faͤllt; zaͤhlt alsdenn die Anzahl der Grade ab, die der Winkel erhalten ſoll, markirt die Lage des Schenkels ac mit einer Nadelſpitze in das Papier, und zieht ac, ſo iſt ∠ cab der verlangte Winkel.

2) **Wenn der Winkel bac auf dem Papiere gegeben iſt;** Fig. 37.

Soll bac an die Linie de in den Punkt d kommen, ſo ſetzt man den Zirkel in a, und beſchreibt mit einer beliebigen Oeffnung einen Bogen zwiſchen den Schenkeln ab und ac. Mit unverruͤckter Zirkeloͤffnung beſchreibt man aus d auf de ebenfalls einen Bogen, nimmt die Weite oder Entfernung der beiden Durchſchnittspunkte auf ab und ac, traͤgt ſie aus dem Punkte, wo der Bogen de ſchneidet, ſo weit auf dem Bogen fort, als ſie reicht, und zieht df durch d und den Durchſchnittspunkt des Bogen mit der aufgetragenen Weite; ſo iſt ∠ fde = ∠ bac.

3) **Auf dem Felde.**

a) **Mit dem Winkelmeſſer;** Fig. 38.

Iſt ab die gegebene Linie und a der Punkt, an welchen der Winkel getragen werden ſoll; ſo ſetzt man den Mittelpunkt des Winkelmeſſers ſenkrecht uͤber a und bringt die Verſicherungsdioptern in ab,

zählt die Anzahl der gegebenen Grade auf der Theilung des Ringes ab, rückt das bewegliche Lineal mit der Kante an den Theilſtrich und viſirt einen Stab ein, ſo hat man die Lage des Schenkels ac, deſſen Neigung gegen ab in a der verlangte Winkel cab iſt.

b) Mit der Meßkette oder Meßſchnur; Fig. 39.

Es ſei der gegebene Winkel bad. Dieſen Winkel ſoll man an ac in c tragen. Man nehme auf ab die beliebige Weite aF, und auf ad die Weite aD ebenfalls beliebig, und markire F und D durch Stäbe. Hierauf mißt man DF. Trägt man nun aD aus c nach d, und nimmt aF und FD in die Kette oder Schnur, hält F an d, und a an c, indem man die Kette oder Schnur, wie zuvor, ſtraff ausſpannet, ſo fällt die Weite aF mit cf und fd mit FD zuſammen, und der Winkel dcf iſt gleich dem Winkel bad.

§. 52.

Aufgabe.

Auf dem Felde eine Linie durch e parallel mit ab abzuſtecken. Fig. 40.

Auflöſung.

Man ſteckt in der gegebenen Linie ab, in einer willkürlichen Entfernung von a ſowohl als von b, einen Stab, alſo in d ein, desgleichen markirt man auch den gegebenen Punkt e mit einem Stabe. Trägt man nun den Winkel ade in e gegen c zu (§. 51.) und verlängert ce in ihrer eigenthümlichen Richtung nach f, ſo iſt fc ∦ ab (§. 18.), und fc läuft durch e.

Anmerkung.

Auf dieſe Art giebt jedes der drei erwähnten Kennzeichen der Parallellinien (§. 18.) eine Methode, wie man mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallelinie abſtecken kann.

§. 53.

§. 53.

Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte c (Fig. 41.) auf einer geraden Linie ab, eine ſenkrechte Linie zu errichten.

Auflöſung.

1) Auf dem Papiere.

a) Man ſetzt den Zirkel in c und trägt beliebige, aber gleichgroße Linien aus c nach d und f, ſetzt den Zirkel in f und beſchreibt mit beliebiger Oeffnung einen Bogen über ab, ſchneidet dieſen Bogen aus d mit derſelben Oeffnung des Zirkels in g. Zieht man nun gc; ſo iſt gc ſenkrecht auf ab in dem gegebenen Punkte c. Hätte man den Zirkel bei den Bogen weniger geöfnet, ſo wäre vielleicht der Durchſchnitt in e gefallen. Da man nun jede gerade Linie durch Anfangs- und Endpunkt, alſo durch c und e verlängern kann, ſo hat man cg durch Verlängerung von ce.

b) Oder man trägt mit dem Transporteur in c einen rechten, d. i. einen Winkel von 90° und zieht ce oder cg, ſo iſt ce ſowohl als cg ſenkrecht auf ab in c.

c) Oder man legt den einen Schenkel des Winkelhakens an cb, ſo trifft der andere in ce, und eine Linie an ce von e nach c gezogen, ſteht ebenfalls ſenkrecht auf ab in c.

d) Mit Hülfe eines rechtwinkeligen Dreiecks und eines Lineals.

Läßt man ſich aus dünngearbeitetem Birnbaumholze ein rechtwinkeliges Dreieck (§. 24.), mit gleichen oder ungleichen Schenkeln oder Perpendikularſeiten und ein dazu paſſendes Lineal verfertigen, ſo kann man mit Hülfe dieſer beiden Stück, ſenkrechte Linien

ſo genau errichten, als man es durch Zeichnung möglich machen kann.

Man legt nämlich die kleine Perpendikularſeite ſo an den Punkt c der geraden Linie ab, daß er auf die Mitte derſelben trifft, und hat die Hypotenuſe linker Hand. An dieſe wird das Lineal dicht an gelegt und in dieſer Lage feſtgehalten. Schiebt man nun das Dreieck über c ſo weit aufwärts, bis c an der andern größern Perpendikularſeite zum Vorſcheine kommt, ſo kann man an dieſer Seite durch c eine Linie ziehen, ſo lang als es dieſe Seite zuläßt, und ſie ſteht ſenkrecht auf ab in c.

Oder, wenn ab parallel mit der einen Seite eines Reißbretes iſt, ſo ſchlägt man die Reißſchiene rechtwinkelig ſo an, daß ſie ab trifft; ſetzt man nun das rechtwinkelige Dreieck mit der kleinern Perpendikularſeite auf das Lineal an c und zieht an der längern Perpendikularſeite eine Linie, ſo ſteht auch dieſe ſenkrecht oder perpendikulär auf ab in c.

2) Auf dem Felde.

a) Trägt man aus c nach f eben ſo viel Ruthen oder Fuße, als aus c nach d, und nimmt die Hälfte der Meßkette oder Meßſchnur genau in die Hand, indem der Anfangs- und Endpunkt in d und f durch Stäbe befeſtiget ſind; ſo hat man, wenn die Kette oder Schnur ſtraff angezogen wird, den Punkt e oder g in der Mitte derſelben, und die Linie ce oder cg kann durch Hülfe des Viſirens verlängert werden, und es iſt nicht nur ce oder cg, ſondern jede in dieſer Richtung verlängerte Linie auf ab in c ſenkrecht.

b) Oder man theilt die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ſo ab, daß der kleine Kathet drei, der große vier, und die Hypotenuſe fünf gleiche Theile

Theile erhält. Nach dieſem Dreiecke theilt man eine Schnur (die im Wetter ſich nicht verzieht) in zwölf gleiche Theile; (groß oder klein iſt hier zwar gleich viel, aber es iſt beſſer für die Richtigkeit des Gebrauchs, wenn die gleichen Theile groß ſind, alſo jeder mehrere Fuße faßt).

Legt man den Anfang in c, drei Theile von c nach f, ſo trifft der Abtheilungspunkt, den man in die Hände nimmt und die Schnur anzieht, in e, und es iſt ce oder die Abtheilung mit den vier gleichen Theilen ſenkrecht auf ab in c.

Anmerkung.

Hat man zum Gebrauche keine auf dieſe Art in 3, 4 und 5, oder zuſammen in zwölf gleiche Theile getheilte Schnur, ſo nimmt man dazu die Meßkette, zählt aber für jeden einzelnen Theil drei Fuße, damit die Theile nicht zu klein werden, mithin die Stäbe in den gefundenen Punkten nicht zu nahe an einander kommen, weil man im Gegentheil bei irgend einer nöthigen Verlängerung nicht genau viſiren kann.

Ein Dreieck dieſer Art nennt man ein Pythagoriſches Dreieck, welches ſich auf den allgemeinen Satz des Pythagoras gründet: In jedem rechtwinkeligen Dreiecke, wie z. B. cab Fig. 9. iſt das Quadrat der Hypotenuſe ſo groß, als die Summe der Quadrate auf den Katheten.

Wendet man dieſen Satz auf die Zahlen 3, 4 und 5 an, ſo iſt $3^2+4^2=5^2$; oder es iſt $9+16=25$. Iſt daher die Hypotenuſe bc und einer der Katheten, etwa ab bekannt, ſo kann man ac finden.

Denn es iſt $bc^2 = ab^2 + ac^2$

$ab^2 = ab^2$ ſubtrahirt

$bc^2 - ab^2 = ac^2$

folglich auch $\sqrt{(bc^2 - ab^2)} = ac$, d. i. Wenn man vom Quadrate der Hypotenuſe das Quadrat des bekannten Kathet ſubtrahirt, und aus dem Reſte die Quadratwurzel zieht, ſo findet man den andern Kathet.

Eben ſo iſt auch, wenn bc und ac bekannt ſind

$$\begin{array}{l} bc^2 = ac^2 + ab^2 \\ ac^2 = ac^2 \quad \text{ſubtrahirt} \\ \hline bc^2 - ac^2 = ab^2 \end{array}$$

folglich auch $\sqrt{(bc^2 - ac^2)} = ab$.

Die Rechnung ſelbſt kann man vornehmen, wenn man $bc = 5$, $ac = 4$ und $ab = 3$ ſetzt.

c) Mit Hůlfe des Aſtrolabiums, oder eines jeden Horizontalwinkelmeſſers, kann man auf a b in c Fig. 41 auf eine ſehr leichte Art eine ſenkrechte Linie ſetzen. Man bringe nåmlich den Mittelpunkt des Inſtruments über c, die Verſicherungsdioptern in a b und ſtelle das bewegliche Diopternlineal auf 90°, viſire einen Stab in dieſe Richtung, ſo trifft dieſer in e oder g ꝛc. und die Linie e c oder g c iſt ſenkrecht auf a b in c.

§. 54.

Aufgabe.

Eine andere Methode, Parallellinien zu ziehen.

Aufloͤſung.

1) Auf dem Papiere.

Es ſei a b Fig 35 die gegebene Linie und e der Punkt, durch welchen c d ∦ a b gezogen werden ſoll.

Man lege das §. 53 nr. d beſchriebene Dreieck mit der Hypotenuſe an a b ſo, daß e um die Mitte trifft, und der kleine Kathet linker Hand liegt. Legt man nun das Lineal an dieſen kleinen Kathet, und ſchiebt das Dreieck bis e, zieht die Linie c d, ſo iſt e d rückwårts nach c verlångert, alſo c d ∦ a b.

Oder errichtet man in zwei verſchiedenen Punkten zwiſchen a und b, zwei gleich hohe Perpendikularlinien, und

und zieht durch die Endpunkte eine gerade Linie, ſo iſt auch dieſe mit ab parallel.

Anmerkung.

Dieſe letztere Methode gründet ſich auf den Satz: Parallellinien ſind durchgängig gleichweit von einander entfernt, und ſie giebt zugleich ein Mittel, auf dem Felde auf eine leichte Art Parallellinien zu erhalten.

2) Auf dem Felde. Errichtet man auf irgend eine Art auf der Linie ab in zwei zwiſchen a und b liegenden Punkten, ein paar ſenkrechte Linien von gleicher Länge, und verlängert die Richtung der Endpunkte durchs Einviſiren mehrerer Stäbe, ſo iſt cd ≑ ab.

Dieſe Methode leitet auf ein Verfahren, wenn z. B. in einem Forſt eine Schlaglinie auf einen Baum trift, die Richtung derſelben, des Hinderniſſes ungeachtet, richtig fortzuſetzen.

Es ſei ab Fig. 15 Tab. II* die Richtung der Schlaglinie und treffe in b an einen ſtarken Baum (deſſen horizontalen Durchſchnitt der Kreis vorſtellt); man errichte auf ab, entweder mit dem Winkelmeſſer, oder vermittelſt der in 12 gleiche Theile eingetheilten Schnur oder Kette, alſo durch das pythagoriſche Zahlendreieck und mit Stäben, die ſenkrechte Linie bc, trage auf dieſe bc, etwa 2 oder 3 Ruthen von c nach d. Ferner errichte man in c abermals eine ſenkrechte Line cd auf bc und verlängere cd bis auf die andere Seite des Baums. Errichtet man in d auf eben die Art de ſenkrecht auf cd, und macht de = bc; errichtet man ferner auf der verlängerten cd in f die ſenkrechte Linie fg = eb = bc, ſo kann man eg durchs Viſiren verlängern, und eg ſowohl als die verlängerte eh fällt mit ab in einerlei Richtung, und es iſt eh die Fortſetzung der Schlaglinie ab.

ab. Hätte man anſtatt der Linie gf, in e die Linie eh rechtwinkelig oder ſenkrecht auf ed geſetzt, ſo wäre eh ebenfalls dieſe Fortſetzung.

Anmerkung.

Aus der Auflöſung No. 2. erhellet, wie man verfahren kann, wenn man bei Horizontalmeſſungen gerader Linien auf ein Hinderniß ſtößt, z. B. etwa auf einen Sumpf, Teich, oder auf jungen Anflug, der nicht niedergetreten werden ſoll ꝛc. Man kann nämlich die Richtung der geraden Linie allgemein ſenkrecht unterbrechen, rechtwinkelig abgehen, die Meſſung parallel mit der zu meſſenden Linie fortſetzen und ſich, wenn nun das Hinderniß rückwärts liegt, rechtwinkelig an die zu meſſende Linie wieder anſchließen, und ſo die Meſſung fortſetzen.

§. 55.

Aufgabe.

Auf eine gerade Linie ab, aus einem über derſelben liegenden Punkte c eine ſenkrechte Linie zu fällen. Fig. 42.

Auflöſung.

1) Auf dem Papiere.

a) Man ſetzt den Zirkel in c und öffnet denſelben ſo weit, daß ein Bogen aus c die Linie ab in e und d ſchneidet. Aus d und e macht man nun unterwärts der Linie ab in f einen Kreuzſchnitt, und zieht, das Lineal an c und f gelegt, cf, bis dieſe Linie ab trifft, ſo ſteht ſie ſenkrecht auf ab.

Anmerkung.

Läge c ſeitwärts ab, ſo daß ein Bogen aus c, die Linie ab nicht in zwei Punkten träfe, ſo verlängere man

ab bis dies möglich wird, verfahre alsdenn wie vorhin, und man erhält auch in dieſem Falle eine ſenkrechte Linie auf ab.

b) Oder man lege den kleinen Kathet an die gerade Linie ab ſo, daß c etwa um die Mitte über derſelben, die Hypotenuſe aber linker Hand liegt. Legt man nun das Lineal an die Hypotenuſe und ſchiebt das Dreieck ſo weit über ab, bis c am größern Kathet zum Vorſchein kommt, ſo kann man an dieſem Kathet durch c die ſenkrechte Linie auf ab ziehen.

Eben ſo leicht iſt die Aufgabe auf einem Reißbrete aufgelöſt, wenn man das Anſchlagelineal an ab, das Dreieck aber mit dem großen Kathet ſo legt, daß c in ſeine Richtung fällt, und alsdenn an dieſem Kathet von c nach ab eine gerade Linie zieht. Dieſe Linie ſteht ebenfalls auf ab ſenkrecht.

2) Auf dem Felde.

Man nehme zwei gleiche Theile auf der Meßkette, woran aber jeder länger ſeyn muß, als die Entfernung des Punkts c von ab: ziehe dieſe Theile, indem man den Anfang beider in c hält, ſo an, daß ſie die Linie ab ſchneiden, meſſe von einem Durchſchnittspunkte zum andern und halbire die Entfernung, ſo iſt die Linie von dieſem Mittelpunkte nach c ſenkrecht auf ab.

§. 56.

Aufgabe.

Aus dem Endpunkte b einer geraden Linie ab Fig. 43, eine ſenkrechte Linie zu errichten.

Auflöſung.

1) Auf dem Papiere.

a) Man wähle über ab den Punkt c, ſetze den Zirkel in dieſen Punkt und öffne denſelben bis b und ſchneide

de mit cb die Linie ab in d. Zieht man nun dc, und trägt cd auf die Verlängerung aus ce nach e ſo, daß ce = dc wird, und zieht bc, allenfalls, wenn es nöthig iſt, verlängert bis f, ſo iſt eb oder fb ſenkrecht auf ab in b.

b) Durch Hülfe des rechtwinkeligen Dreiecks und eines Lineals, iſt die Aufgabe auch nach §. 53 aufzulöſen. Auch kann man dabei den Winkelhaken anwenden.

2) Auf dem Felde.

Man errichte auf ab in b mit irgend einem Winkelmeſſer oder durch Hülfe des Pythagoriſchen Zahlendreiecks und der Meßſchnur, einen rechten Winkel, und ſetze in die Richtung des zweiten Schenkels den Stab e, ſo kann man be nach f oder ſo weit man will, verlängern, und es iſt bf ſenkrecht auf ab in b.

§. 57.

Aufgabe.

Jede gegebene gerade Linie ab Fig. 44 und 45, alſo auch jeden zu dieſer Linie als einer Sehne gehörigen Kreisbogen, zu halbiren.

Auflöſung.

Man macht aus a und b mit willkürlichem Halbmeſſer über und unter der geraden Linie ab in c und d Kreuzſchnitte, und zieht cd, ſo iſt ſowohl die gerade Linie Fig. 44, als auch der Bogen ab Fig. 45 halbirt.

Soll dieſe Aufgabe auf dem Felde aufgelöſet werden, ſo mißt man ab und dividirt die erhaltene Zahl der Ruthen, Fuße ꝛc. durch zwei; ſo giebt der Quotient die Hälfte, die von a nach b, oder umgekehrt von b nach a zu aufge-

aufgetragen wird. Den Theilungspunkt markirt man mit einem Abſteckeſtabe.

Anmerkung.

Hiernach kann man eine gerade Linie ſowohl als einen Bogen, in 4, 8, 16, 32, 64 ꝛc. gleiche Theile theilen.

§. 58.

Aufgabe.

Einen Winkel bac Fig. 46. zu halbiren.

Auflöſung.

Aus a, als der Spitze des Winkels, beſchreibt man mit einem willkürlichen Halbmeſſer ae, den Bogen ed, und aus e und d einen Kreuzſchnitt mit dem Halbmeſſer ef=df in f; zieht man nun die Linie af, ſo iſt der Winkel in zwei gleiche Theile getheilt, oder es iſt ∠baf=∠caf.

Oder man mißt den Winkel durch Hülfe des Transporteurs auf dem Papiere; dividirt die Anzahl ſeiner Grade durch 2, ſo giebt der Quotient die Hälfte, oder die Anzahl der Grade für baf=caf. Auf dem Felde bedient man ſich des Winkelmeſſers, und bezeichnet die gefundene Hälfte mit dem Stabe f.

Anmerkung.

Hieraus ſieht man, wie ein Winkel in 4, 8, 16, 32 ꝛc. kurz in eine ſolche Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann, die ein Produkt der Zahl 2, ein oder mehreremale mit ſich ſelbſt iſt.

Einen Winkel, auſſer dem rechten, in 3 gleiche Theile geometriſch zu theilen, iſt nach Gründen der Elementarmathematik unmöglich. Mechaniſch aber läßt ſich jeder Winkel in ſo viele gleiche Theile theilen, als man will; dieſe Theilung beruhet auf dem Probiren. Arithmetiſch laſſen ſich die Winkel ſo weit in eine jede beliebige Anzahl gleicher Theile theilen, als die Zahl der Grade ꝛc. des Winkels ſich durch die Theilungszahl ohne Reſt, der bemerkt werden kann, dividiren laſſen.

Ein rechter Winkel wird in drei gleiche Theile getheilt, wenn man auf einem ſeiner Schenkel ein Stück abſchneidet, aus den Endpunkten des Abſchnittes der geraden Linie aber mit dieſem Abſchnitte als Halbmeſſer einen Kreuzbogen zeichnet und dieſen mit des rechten Winkels Spitze durch eine gerade Linie verbindet, ſo iſt der kleinſte Theil des Winkels $\frac{1}{3}$ vom Ganzen. Halbirt man nun den noch übrigen Theil, ſo hat man den rechten Winkel in drei gleiche Theile getheilt.

§. 59.

Aufgabe.

Jede gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflöſung.

1) Arithmetiſch.

Man meſſe die Linie mit der Kette oder Schnur, oder mit Meßſtäben uud beſtimme die Länge in Ruthen, Fuß ꝛc. Die Zahlen, welche die Länge angeben, dividire man durch die Zahl der Theile, ſo hat man die Ruthen, Fuße ꝛc. für jeden Theil ins beſondere. Z. B. man hätte die Linie 36 Ruthen, 6 Fuß = 366 gefunden, und wollte den 6ten Theil wiſſen, ſo iſt $\frac{366}{6} = 61$ Fuß dieſer Theil. Dieſe 61 Fuß trage man mit der Meßkette 6 mal auf die gemeſſene Linie, ſo iſt ſie in 6 gleiche Theile getheilt.

2) Geometriſch.

Dieſe Methode kann nur auf dem Papiere gebraucht werden, und beſteht darin. Soll z. B. eine Linie in 7 gleiche Theile getheilt werden, ſo verbinde man mit dieſer Linie eine andere von unbeſtimmter Länge, unter einem beliebigen Winkel, und trage auf die unbeſtimmte Linie 7 gleiche Theile, von welcher Größe man will. Den

Endpunkt dieſer und der gegebenen Linie verbinde man abermals mit einer geraden Linie, ſo hat man ein Dreieck, worin die leztere Linie die Grundlinie heiſſen mag. Mit dieſer Grundlinie ziehe man durch alle Theilungspunkte Parallelen, ſo theilen dieſe die gegebene Linie in 7 gleiche Theile, wie verlangt worden iſt.

§. 60.

Ein verjüngter Maßſtab, wie Fig. 31. hat nicht Vollſtändigkeit genug, um Forſtvermeſſungen mit Richtigkeit darnach aufzutragen, oder Forſtcharten zu entwerfen. Hierzu giebt es Maßſtäbe in mathematiſchen Beſtecken auf Meſſing getragen, die zweckmäßiger gebraucht werden können. Da die Forſtvermeſſungsreglements jeder Provinz vorſchreiben, nach welcher Größe eine Charte gezeichnet werden ſoll, ſo kann man ſich nach dieſer Größe einen dazu zweckmäßigen Maßſtab entweder auf hartes trocknes Holz, oder auf Meſſing verfertigen laſſen, und nach Vollendung der Zeichnung dieſen Maßſtab auf dem Papiere entworfen, der Zeichnung beifügen.

§. 61.

Aufgabe.

Einen verjüngten Maßſtab zu zeichnen; Fig. 47.

Aufloſung.

Hierzu nimmt man die Länge von drei Decimalzollen (oder jede andre nach den Meßverordnungen vorgeſchriebene Länge) von natürlicher Größe, wie ſie Meßkette und Meßſtäbe enthalten, und nennt dieſe Länge auf dem zu entwerfenden Maßſtabe 100 Ruthen. Das Verhältniß der Zahlen, 3 natürliche Zolle ſind gleich 100 verjüngten Ruthen, giebt zugleich das Verhältniß aller Linien der Charte gegen die Linien in der Natur an. Dieſe Länge von 3 Zollen oder 100 ver-

verjüngte Ruthen trägt man auf eine gerade Linie von a nach b, und theilt ſie in 10 gleiche Theile, alſo in 10 mal 10 Ruthen. Die letzte Abtheilung von 10 Ruthen, nämlich von c nach a theilt man abermals in 10 gleiche Theile, ſo hat man einzelne Ruthen. In a wird eine ſenkrechte Linie ad auf ab, ſo wie in b die Linie be errichtet. Die Länge von ad = be iſt willkürlich, nur muß man ad ſowohl als be in 10 gleiche Theile theilen; daher kann auch ein Theil auf ad kleiner, größer oder gleich ſeyn einem Theile auf ac. Durch die Theilungspunkte auf ad ziehet man Parallellinien mit ab. Aus den Abtheilungen 10, 20, 30 ꝛc. in ab errichtet man ebenfalls ſenkrechte Linien, die mit ad und be parallel laufen. Die Punkte auf ac, bringt man entweder durch ein auf ac in die Abtheilungen geſetztes rechtwinkeliges Dreieck, auf die Linie de bis zur Perpendikularlinie aus c, oder trägt ſie unmittelbar mit dem Zirkel auf. Verbindet man nun die Theilungspunkte wechſelsweiſe, auf ab, 10 mit 20 auf de und eben ſo 10 auf ab mit dem Endpunkt der Perpendikularlinie aus c, und ſo fort von 20 auf de mit 30 auf ab durch Transverſallinien ꝛc. ſo hat man durch dieſen Entwurf einen verjüngten Maßſtab, auf welchem man Ruthen, Fuße und Zolle hat. Da nun jede Ruthe 10 Fuß hat, und der Maßſtab 100 Ruthen faſſet, ſo giebt dies eine 1000 theilige Eintheilung, wornach auch ein ſolcher Maßſtab ein tauſendtheiliger Maßſtab genannt wird.

Gebrauch dieſes Maßſtabes.

Soll z. B. eine Linie von 200 Ruthen und 4 Fuß vom Maßſtabe genommen werden, ſo ſetzt man den Zirkel auf ab in die Abtheilung 20 und zwar von c nach b zu, wo Zehner von Ruthen ſtehen, alſo in die 4te Parallellinie, öffnet denſelben bis man von c nach a die Transverſallinie trifft, vor welcher das Zahlzeichen 4 ſtehet; ſo hat man 200 Ruthen. Soll man aber 207 Ruthen und 5 Fuß

nehmen,

nehmen, ſo ſetzt man die eine Zirkelſpitze in der Linie ab von c nach b, wo 20 ſteht, alſo in die 5te Parallellinie, und die andere Zirkelſpitze dahin, wo von der Zahl 70 die Transverſale die 5te Parallellinie trifft.

§. 62.

Da die Cirkellinien oder Kreisperipherien und die Ovallinien unter den krummen Linien, die ſich nach gewiſſen Regeln der Elementargeometrie zeichnen laſſen, für die Forſtgeometrie die brauchbarſten ſind, ſo iſt es nöthig, daß man beide zu zeichnen verſtehe. Die Zeichnung einer Kreislinie ergiebt ſich aus §. 27, wo die Beſchreibung eines Kreiſes gezeigt worden iſt; daher kommen nur die noch unberührten Fälle hier vor.

§. 63.

Aufgabe.

Durch drei gegebene Punkte a, b, c Fig. 48, die nicht in einerlei gerader Linie liegen, eine Kreislinie zu beſchreiben.

Auflöſung.

Man verbindet jede zwei dieſer Punkte mit geraden Linien, oder denkt ſich in dieſe Punkte Linien, ſo müſſen ſie Sehnen des Kreiſes werden, der durch alle drei Punkte geht. Halbirt man die Sehnen ab und bc durch die ſenkrechten Linien ed und gf (§. 57.) ſo ſchneiden ſich ed und gf in h, und der Durchſchnittspunkt h iſt der Mittelpunkt des Kreiſes, der durch a, b und c läuft. Iſt nun ah = bh = ch der Halbmeſſer, ſo geht der aus h mit ah gezeichnete Kreis mit ſeiner Peripherie durch a, b und c.

Anmerkung.

Hieraus ergiebt ſich auch die Methode, wie man ſo wohl zu einer gegebenen Kreislinie, als auch zu jedem Kreisbogen, den Mittelpunkt finden kann.

§. 64.

Aufgabe.

Ein Oval zu zeichnen, Fig. 49.

Auflöſung.

Man ziehe eine gerade Linie ab von beliebiger Länge, beſchreibe eine Kreislinie aus c, ſo ſchneidet dieſe die gerade Linie ab in b. Aus dem zweiten gegen a zu liegenden Durchſchnittspunkte der Kreislinie mit der geraden, beſchreibe man eine zweite Kreislinie, ſo ſchneiden ſich beide Kreislinien in d und e. Setzt man den Zirkel in e und beſchreibt mit der Oeffnung des Durchmeſſers dieſer Kreislinien den Bogen fg, und aus d, den Bogen hi, ſo hat man das verlangten Oval.

Anmerkung.

Da die Form der Ovale ſehr verſchieden, und die zur Zeichnung nöthigen Stücke unter vielfachen Bedingungen vorkommen, die hier nicht ſämmtlich auseinander geſetzt werden können, und überdies die Ovale in dieſen Anfangsgründen nicht von vielem Gebrauche ſind, ſo wird der gegenwärtige Fall zur Kenntniß eines Ovals hinreichen.

§. 65.

Da es in der Anwendung der Geometrie, folglich auch im Forſtweſen oft nöthig, die Länge einer Kreisperipherie, oder eines Kreisbogens, anzugeben, und für dieſe Linien kein Maß vorhanden iſt, ſo hat man ſich bemüht, die Länge dieſer Linien in bekanntem Längenmaße auszu-

auszudrücken. Um eine ſolche Linie mit Längenmaße zu meſſen, muß man wiſſen, in welchem Verhältniſſe irgend eine Kreislinie mit einer geraden Linie ſtehe, deren Länge auf eine leichte Art beſtimmt werden kann. Die gerade Linie, womit man zunächſt jede Kreislinie vergleicht, iſt der, der Kreislinie zugehörige Durchmeſſer, weil man bis jetzt keine andere ausgemittelte Vergleichung kennt. Man hat daher Kreislinie und Durchmeſſer derſelben, oder umgekehrt: Durchmeſſer und dazu gehörige Kreislinie in ein Verhältniß zu bringen geſucht, deſſen Exponent anzeigt, wie viel mal der Durchmeſſer in der dazu gehörigen Kreislinie (als eine gerade Linie betrachtet) enthalten ſei. So viele Verſuche auch gemacht worden ſind, den Exponent dieſes Verhältniſſes durch eine völlig beſtimmte oder rationale Zahl auszudrücken, ſo hat es doch weder durch Rechnung, noch durch geometriſche Konſtruktionen völlig glücken wollen. Archimedes (ein Griechiſcher Geometer, etwa 287 Jahr vor unſerer Zeitrechnung geboren) hat dieſes Verhältniß durch die Zahlen 7 : 22 ausgedrückt, d. i. wenn der Durchmeſſer eines Kreiſes 7 gleiche Theile oder 7 Fuße lang iſt, ſo iſt die Kreisperipherie 22 ſolche Theile, oder 22 Fuße lang, welches aber nicht vollkommen genau trifft, und wovon man ſich aus Gründen überzeugt, die hierher nicht gehören. Das Verhältniß 7 : 22 iſt eigentlich $7 : 21\frac{70}{71}$ oder $1 : 3\frac{1}{7}$ oder $1 : 3\frac{10}{71}$, welches letztere man erhält, wenn man beide Glieder mit dem erſten Gliede oder hier mit 7 dividirt. Um aber alle Weitläuftigkeit im Rechnen zu vermeiden, läßt man den Bruch weg, oder ergänzt $\frac{70}{71}$ zu 1 und ſetzt 7 : 22. Dividirt man 7 in 22, ſo iſt der Quotient = 3, 142.. der Exponent des Verhältniſſes, denn ſo vielmal iſt der Durchmeſſer in der dazu gehörigen Kreisperipherie enthalten. Ludolph van Ceulen ſetzte das Verhältniß des Durchmeſſers zur dazugehörigen Kreisperipherie 100 : 314 und den Exponent dieſes Verhältniſſes auf 3,1415926... Metius

tius Verhältniß iſt 113 : 355, und der Exponent 3,1415929... Ein anderes Verhältniß 106 : 333 giebt den Exponent 3,1415...

Da nun das Ludolphiſche unter allen bis jetzt bekannten, das genaueſte iſt, ſo iſt darnach das Archimedeiſche etwas zugroß; eben ſo iſt auch das von Metius noch etwas zu groß; das letztere aber offenbar zu klein.

In der Ausübung dieſer Lehre, beſonders ſo weit dieſe die Forſtgeometrie nöthig hat, begnügt man ſich mit dem Ludolphiſchen Verhältniſſe 100 : 314 oder auch in manchen Fällen mit dem Arichimedeiſchen Verhältniſſe 7 : 22, und braucht dieſe Verhältniſſe, um zu gegebenen Durchmeſſern die dazu gehörigen Kreisperipherien oder Bogen, oder zu bekannten Kreisperipherien und Bogen die Durchmeſſer oder Halbmeſſer im Längenmaße zu berechnen. Im letzten Falle wird nach dem Zwecke der Aufgabe das Verhältniß ſo geſetzt: 314 : 100 oder 22 : 7.

Anmerkung.

Von ältern Zeiten her haben ſich viele bemüht, das angezeigte Verhältniß des Durchmeſſers zur Kreisperipherie genau zu finden. Die neuern, aber dennoch verunglückten Bemühungen ſind von Joſeph Ignatius v. Leiſtner in Wien, Johann Chriſtoph Merkel, einem evangeliſchen Prediger zu Ravensberg in Schwaben, und von Johann Stephan Böhme, einem Schulkollegen in Kalbe, welche ſämmtlich das Verhältniß des Durchmeſſers zur Kreisperipherie durch die Zahlen 1225 : 3844 ausdrücken. Da aber $\frac{3844}{1225} = 3,13\ldots$ ſo iſt der Exponent des Verhältniſſes zu klein. Eben ſo iſt das Verhältniß 637 : 200, von Friedrich Brammerell, Fürſtl. Heſſ. Rath, welches den Exponent 3,1397.. hat, nach der Ludolphiſchen Zahl 3,14159... zu klein.

§. 66.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Durchmeſſer die dazu gehörige Kreisperipherie zu finden.

Auflöſung.

Man ſucht zu den beiden Gliedern des Verhältniſſes 100 : 314, und zu dem gegebenen Durchmeſſer des Kreiſes, die vierte Proportionalzahl (Arithm. §. 168.), welche die geſuchte Kreisperipherie iſt.

Z. B. Es ſei der Durchmeſſer 56^{I}

$$
\begin{array}{l}
100 : 314 = 56 : x \\
\underline{56} \\
1884 \\
\underline{1570} \\
100)\,17584 \mid 175\tfrac{84}{100} = 175^{I}\,8^{II}\,4^{III}
\end{array}
$$

die Kreisperipherie.

§. 67.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Kreisperipherie den dazu gehörigen Durchmeſſer zu finden.

Auflöſung.

Man ſucht zu den beiden Gliedern des Verhältniſſes 314 : 100 und zu der gegebenen Kreisperipherie, die vierte Proportionalzahl (Arithm. §. 168.), welche der geſuchte Durchmeſſer iſt.

Z. B. Es ſei die Kreisperipherie $175^{I}8^{II}4^{III}$.

$$
\begin{array}{l}
314 : 100 = 17584^{III} : x \\
\underline{100} \\
314)\,1758400 \mid 56^{I}
\end{array}
$$

der Durchmeſſ.

 Anmer-

Anmerkung.

Wäre der Halbmeſſer gegeben, ſo fände man nach §. 66. nur die halbe Kreisperipherie; und eben ſo würde man nach §. 67. zur gegebenen halben Kreisperipherie nur den Halbmeſſer finden. In beiden Fällen dürfte man alſo nur die gefundenen Hälften mit 2 multipliciren, ſo hätte man die verlangte Kreisperipherie und den Durchmeſſer. Dieſe Multiplikation könnte auch ſchon vor der Auflöſung der Aufgabe vorgenommen werden, und man würde folglich das Verlangte finden.

§. 68.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Anzahl Grade ꝛc. die ein Kreisbogen von der dazu gehörigen und gegebenen Kreislinie faſſet, die Länge dieſes Bogens zu finden.

Auflöſung.

Man ſchließt: wie 360° : x Grade, ſo die Länge der Kreislinie zur Länge des Kreisbogens.

Es faſſe der Bogen 108° und die Länge der Kreisperipherie ſei $175^{I}8^{II}4^{III}$.

$$360 : 108 = 17584^{III} : x$$

$$\begin{array}{r} 17584 \\ 108 \\ \hline 140672 \\ 17584 \\ \hline 360)\ 1899072 \end{array} \Big| \, 52^{I}7^{II}5\tfrac{1}{5}^{III} \text{ Länge d. Bog.}$$

§. 69.

Aufgabe.

Aus der Länge des Bogens und der Kreislinie, die Anzahl der Grade zu finden, die derſelbe von der Anzahl aller Grade der Kreislinie faſſet.

Auf-

Aufloͤſung.

Man ſchließt : wie die Laͤnge der Kreislinie zu der Laͤnge des Bogens, ſo 360° zu x Graden.

Es ſei z. B. die Laͤnge der Kreislinie $175^{I}8^{II}4^{III}$ die Laͤnge des Bogens aber $52^{I}7^{II}5\frac{1}{5}^{III}$.

$17584 : 5275\frac{1}{5} = 360 : x$

17584	5275⅕
5	26376
87920	360
	1582560
	79128
8792)	949536ø | 108° Anzahl der Grade des Bogens.

Zweite Abtheilung.

Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie.

§. 70.

Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie lehrt, wie man alle Arten von Flächen mit einem angenommenen Maße, welches ebenfalls eine Fläche iſt, aber von bekannter Größe, vergleichen, die Größe des Raums, den jede Fläche faſſet, oder ihren Flächeninhalt ausmitteln, die auf dem Felde gemeſſenen Flächenfiguren verjüngt auf das Papier bringen, und wenn es nöthig iſt, Figuren dieſer Art nach gegebenen Vorſchriften theilen kann. Inhalt, Flächeninhalt und Quadratinhalt haben in der Epipedometrie einerlei Bedeutung, ſie zeigen nämlich insgeſammt die Größe des Raums an, den eine Figur auf einer Fläche einnimmt.

Anmerkung.

Die Lehren dieſes Theils der Geometrie haben ihren Einfluß beſonders auf die Beſtimmung derjenigen Stücke einer Figur, welche unmittelbar gemeſſen werden müſſen, um daraus theils die Möglichkeit des Entwurfs derſelben aufs Papier, theils die Größe der Flächen oder den Inhalt der Felder, Wieſen, Forſte und Wälder ꝛc. anzugeben. Aus der Flächenmeſſung lernt man, jede Figur in Grund zu legen, ſie zu zeichnen und den Inhalt nach Ruthen, Acker, Waldmorgen zu berechnen, und Forſte in Gehaue ꝛc. einzutheilen.

Da der ganze Umfang der geſammten Lehren für einen Geſchäftsmann, wenn er nicht von Jugend auf darin unter-

unterrichtet worden, zu groß iſt; ſo werden in dieſer Abtheilung auch nur die Sätze und Aufgaben mitgetheilt, die ein Forſtoffiziant in der Ausübung nicht entbehren kann.

I.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Dreiecke.

§. 71.

Bei den Dreiecken ſind zur Beſtimmung derſelben ſo wohl, als zur Vermeſſung und Zeichnung ꝛc. folgende Sätze zu merken:

1) Wenn in zwei Dreiecken, ein Winkel und zwei Seiten, die dieſen Winkel einſchließen, gleich ſind;

2) Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten gleich ſind;

3) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der, der größern Seite entgegengeſetzte Winkel gleich ſind;

4) Wenn in zwei Dreiecken entweder eine Seite nebſt zwei Winkeln an dieſer Seite, oder 5) wenn eine Seite und zwei Winkel, wovon einer der Seite entgegengeſetzt iſt, gleich ſind;

So ſind die Dreiecke ſelbſt gleich oder ſie decken ſich, mithin haben nicht nur die Flächen, ſondern auch alle andren nicht genannten Stücke in jeden ſolchen zwei Dreiecken einerlei Größe.

Aus den genannten Stücken laſſen ſich daher auch alle Dreiecke auf dem Felde vermeſſen und auf dem Papier zeichnen.

Anmerkung.

Dieſe Sätze heißen Kennzeichen der Kongruenz der Dreiecke. Man macht davon Anwendung

auf alle Arten derſelben, und vermöge dieſer Sätze kann man jedes Dreieck aufnehmen und zeichnen, ohne daß man nöthig hat, alle Seiten und Winkel zu kennen. Da ſich nun alle vielſeitigen Figuren in Dreiecke durch Diagonalen zerlegen laſſen, ſo enthalten dieſe Sätze die geſammten Kenntniſſe für alle Arten von Figuren, und man kann vermöge ihrer jede Figur aus nur wenigen Stücken, die man unmittelbar meſſen kann, aufnehmen und zu Papiere bringen. Ein ſechstes Kennzeichen der Kongruenz der Dreiecke aber iſt unmöglich, weil ein Dreieck nicht aus ſeinen drei Winkeln allein beſtimmt werden kann; daher enthält auch jedes dieſer Kennzeichen wenigſtens eine Seite. In der Ausübung kommen der Fälle, unter welchen man Figuren aufnehmen ſoll, ſehr viele vor, und unmöglich iſt jeder Fall, der ſich nicht unter eins dieſer Kennzeichen bringen läßt. Vollſtändige Beweiſe findet man in jedem Lehrbuche der theoretiſchen Geometrie.

§. 72.

Aufgabe.

Jedes rechtwinkelige Dreieck aus dem rechten Winkel und den beiden Katheten zu zeichnen, Fig. 50.

Auflöſung.

Man zeichne einen rechten Winkel an a b als an einen der gegebenen Katheten in a, indem man eine ſenkrechte Linie ac (§. 53.) errichtet, mache ac dem andern gegebenen Katheten gleich, und ziehe bc, ſo iſt das rechtwinkelige Dreieck cab das verlangte (§. 70. No 1.)

Anmerkung.

Auf dieſelbige Art kann man auch ein Dreieck zeichnen, wenn der gegebene Winkel entweder ſpitz oder ſtumpf iſt, und auf eben die Art können dieſe Dreiecke auf dem Felde gemeſſen und auf demſelben aufgetragen werden.

§. 73.

Aufgabe.

Jedes gleichſeitige Dreieck aus einer gegebenen Seite zu zeichnen, Fig. 51.

Auflöſung.

Man zeichne das Dreieck auf die gegebene Seite ab ſo, daß ac und bc, beide ſo groß als ab, den Durchſchnittspunkt c aus a und b geben, indem man ab in den Zirkel faſſet, und aus a ſo wohl, als aus b Bogen beſchreibt. Das ſo erhaltene Dreieck acb iſt gleichſeitig.

Anmerkung.

Die Vermeſſung eines gleichſeitigen Dreiecks iſt leicht, denn man darf nur eine Seite unmittelbar meſſen.

§. 74.

Aufgabe.

Jedes gleichſchenkelige Dreieck aus der Grundlinie ab und aus einem der gleichen Schenkel bc Fig. 52. zu zeichnen.

Auflöſung.

Man nehme den Schenkel bc in den Zirkel und beſchreibe damit aus a und b Bogen, die ſich in d ſchneiden, ſo iſt d die Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks adb, worin ad = bd dem gegebenen Schenkel bc und ab der gegebenen Grundlinie gleich iſt.

Anmerkung.

Wäre ein auf dem Felde gegebenes Dreieck gleichſchenkelig, ſo dürfte man nur die Grundlinie und einen

der

der gleichen Schenkel meſſen, und man hätte die das Dreieck beſtimmenden Stücke. (Die Figur 52. iſt verunglückt, und kein gleichſchenkeliges Dreieck.).

§. 75.

Aufgabe.

Aus drei gegebnen geraden Linien, wovon jede zwei zuſammen genommen größer ſind, als die dritte, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 52. 52*. 53.

Auflöſung.

Nach den gegebenen Linien und der Wahl der Standlinie, wird das Dreieck entweder ſpitzwinkelig oder ſtumpfwinkelig.

Es ſei zu Fig. 52* ab, bc, bd gegeben. Man nehme bd zur Grundlinie mit der Vorausſetzung, daß $ab + bc > bd$ iſt. Mit ab beſchreibe man aus d, ſo wie mit bc aus b, die Bogen e und f, welche ſich in g ſchneiden. Zieht man dg und bg, ſo iſt das Dreieck bgd das verlangte, und es iſt $ab = ab$, $dg = bd$, $bg = bc$ und jeder Winkel ein ſpitzer Winkel. Iſt aber Fig. 53. gegeben ab, cd, ef, und man nimmt cd zur Grundlinie, ſo wird wie vorhin bdc das verlangte Dreieck, worin $cd = cd$, $cb = ab$, $db = ef$ und das Dreieck iſt ſtumpfwinkelig. (§. 70. n. 2.).

Anmerkung.

Wäre Fig. 53. $ab > cd + ef$, ſo könnten ſich cd und ef über ab nicht ſchneiden, und es wäre kein Dreieck möglich. Kann man auf dem Felde alle drei Seiten eines Dreiecks meſſen, ſo iſt das Dreieck dadurch beſtimmt (§. 70. n. 2.).

§. 76.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Seiten und dem der größern Seite entgegengeſetzten Winkel, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 54.

Auflöſung.

Es ſei gegeben ab, ac und der Winkel a. Man nimmt eine von den beiden gegebenen Linien als Grundlinie an, hier ab, und zeichnet in a (nach §. 51.) einen Winkel cab der dem gegebenen gleich iſt. Auf den Schenkel ac trägt man die zweite gegebene Linie von a nach c, ſo iſt das Dreieck gezeichnet.

Anmerkung.

Dieſes Dreieck Fig. 54. enthält die Bedingung nicht, welche in der Aufgabe gemacht wurde. Es iſt zwar der Winkel cab = a, die Seite ab = ab, die Seite ac = ac ſo, daß das Dreieck die gegebenen drei Stücke in ſich faſſet, aber die Lage dieſer Stücke iſt nicht ſo, daß der Bedingung ein Genüge geleiſtet würde. Der Winkel a muß in jedem Falle der gegebenen größern Seite entgegen ſtehen, und darnach muß die Zeichnung geändert werden. Nach dieſer Aenderung ſtimmt der Satz mit §. 70. n. 3. überein.

Mißt man daher ein Dreieck auf dem Felde aus dieſen Stücken, ſo muß man den der größern Seite entgegengeſetzten Winkel unmittelbar meſſen. Man ſehe Meinerts Lehrbuch der Mathematik Theil II. Geometrie §. 68 und 69.

Daher decken ſich auch nur dann zwei rechtwinkelige Dreiecke, wenn die Seiten, welche den rechten Winkel nicht einſchließen, gleich ſind. Sind die Dreiecke ſtumpfwinkelig, ſo decken ſie ſich nur dann, wenn die Seiten, welche den ſtumpfen Winkel nicht einſchließen, gleich ſind, und die ſtumpfen Winkel überdem einerlei Größe haben.

§. 77.

Aufgabe.

Aus einer Seite und zwei Winkeln, deren Summe kleiner als 2 R. iſt, ein Dreieck zu zeichnen, Fig. 55.

Auflöſung.

Hier finden zwei Fälle Statt:

1) Die beiden gegebenen Winkel können an der gegebenen Seite liegen;

2) Die beiden gegebenen Winkel können aber auch eine ſolche Lage haben, daß der eine an der gegebenen Seite, der andere aber dieſer Seite gegenüber liegt.

Erſter Fall:

Es ſei die Seite ab (Fig. 55.), der Winkel a und b gegeben. Man zeichne an ab in a den Winkel a, und an b den Winkel b (§. 51.), ſo ſchneiden ſich die Schenkel ac und bc in c, und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Zweiter Fall:

Es ſei abermals die Seite ab, der Winkel a und b Fig. 16. Tab. II* gegeben.

Man zeichne in a an ab den Winkel a; verlängere ab rückwärts nach e, und zeichne den gegebenen Winkel b an a ſo, daß cad = b wird, ſo iſt $cab + cbd + x = 180^\circ$. Zeichnet man nun x, als die Ergänzung von den Winkeln $a + b$ zu 180° oder zu 2 R, ſo iſt bc ‡ ad (§. 18.) ac wird von bc geſchnitten, und es iſt der Wechſelswinkel cbd = bca (§. 18. n. 2.), und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Anmer-

Anmerkung.

Auch zum Meſſen der Dreiecke auf dem Felde, kann man ſich dieſer beiden Sätze bedienen, wenn die vorkommenden Fälle mit dieſen überein kommen, welche in der Bedingung der Aufgabe liegen.

§. 78.

Da die Summe aller Winkel in jedem Dreiecke 180° beträgt (§. 16.), ſo kann man, wenn ein Winkel in Graden ꝛc. gegeben iſt, die Summe der beiden übrigen Winkel im Dreiecke finden, denn ſie iſt die Ergänzung zu 2 R. oder 180°.

Es ſei der Winkel a (Fig. 55.) = 65°39′45″.

$$\begin{array}{lll} a+b+c = 180^\circ \text{ oder } & 179^\circ 59' 60'' & \\ a = & 65^\circ 39' 45'' & \text{ſubtrahirt,} \\ \hline b+c = & 114^\circ 20' 15'' & \end{array}$$

Iſt die Größe zweier Winkel in Graden ꝛc. bekannt, ſo findet man die Größe des dritten, durch die Subtraktion ihrer Summe von 180°.

$$\begin{array}{lll} \text{Es ſei } b \text{ (Fig. 55.)} = & 62^\circ 15' 33'' & \\ c = & 52^\circ 4' 42'' & \text{ſubtrahirt} \\ \hline \text{ſo iſt } b+c = & 114^\circ 20' 15'' & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Und es iſt } a+b+c = 180^\circ \text{ oder } & 179^\circ 59' 60'' \\ \text{aber } b+c = & 114^\circ 20' 15'' \\ \hline \text{alſo iſt } a = & 65^\circ 39' 45''. \end{array}$$

§. 79.

In jedem gleichſeitigen Dreiecke ſind alle Winkel gleich. Da nun a + b + c (Fig. 51.) = 2 R. oder 180°; ſo iſt jeder Winkel, wie z. B. a = $\frac{2}{3}$ R. oder $\frac{180^\circ}{3}$ = 60 Grade.

§. 80.

In jedem gleichſchenkeligen Dreiecke ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. Auch theilt eine aus der Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks gefällte ſenkrechte Linie nicht nur den Winkel an der Spitze, ſondern auch die Grundlinie, und mithin das ganze Dreieck in zwei gleiche Theile.

Kennt man den Winkel an der Spitze im gleichſchenkeligen Dreiecke z. B. d (Fig. 52.) in Graden ꝛc. ſo findet man die Winkel an der Grundlinie zuſammen, wenn man jenen von 180° ſubtrahirt, und jeden der beiden letzten, wenn man dieſe Differenz mit 2 dividirt.

Es ſei z. B. $d = 45°$.

Nun iſt $a + b + d = 180°$
$d = 45°$

alſo iſt $a + b = 135°$;
folglich $a = 67\frac{1}{2} = 67°30' = b$.

Auch erhält man jeden Winkel an der Grundlinie im gleichſchenkeligen Dreiecke, wenn man die Hälfte des Winkels an der Spitze von 90° ſubtrahirt.

Kennt man hingegen einen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie, ſo findet man den halben Winkel an der Spitze, wenn man jenen von 90°, oder den ganzen Winkel an der Spitze, wenn man den Winkel an der Grundlinie mit 2 multiplieirt, und das Produkt von 180° ſubtrahirt.

§. 81.

Die Größe jedes Dreiecks hängt von ſeiner Grundlinie und Höhe ab. Dreiecke alſo, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, ſind einander gleich, ſie mögen übrigens von einer Art ſeyn, von welcher ſie wollen, wie in Fig. 56.

§. 82.

Zur Vergleichung des Inhalts oder der Fläche der Figuren, dient das §. 23. und §. 206. der Arithmetik und §. 25. n. 1. der Geometrie erwähnte Quadrat. Mithin wird der Inhalt aller Flächenfiguren im Quadratmaße, nämlich in Quadratruthen, Quadratfußen ꝛc. beſtimmt. Da nun der Inhalt eines Quadrats durch das Produkt ſeiner Grundlinie in die Höhe, oder welches bei dem Quadrate einerlei iſt, durch das Quadrat der Seite ausgedrückt wird, ſo wird auch Grundlinie und Höhe eines Dreiecks zur Beſtimmung des Verhältniſſes des Inhalts des Dreiecks gegen den Inhalt des Quadrats nöthig ſeyn.

§. 83.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks durch Rechnung zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man fälle aus der Spitze c des Dreiecks acb die ſenkrechte Linie cd auf ab, ſo iſt cd die Höhe, ab aber die Grundlinie. Beide Linien ab ſowohl, als auch cd meſſe man mit Längenmaße von einerlei Namen, z. B. Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. und es iſt der Flächeninhalt:

1) Das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe mit 2 dividirt, alſo $\frac{ab.cd}{2}$; oder

2) das Produkt aus der halben Grundlinie in die Höhe, alſo $\frac{1}{2}$ ab.cd; oder

3) das Produkt der Grundlinie in die halbe Höhe, alſo ab . $\frac{1}{2}$ cd.

Es ſei z. B. die Grundlinie ab $= 16^\circ$, die Höhe cd $= 12^\circ$; ſo iſt

1) der Inhalt $\frac{16.12}{2} = 96$ Quadratruthen.

2) Der Inhalt $8.12 = 96\, R^2$.

3) Der Inhalt $16.6 = 96\, R^2$.

Anmerkung.

Bei der Berechnung irgend eines gegebenen Dreiecks wählt man diejenige Regel, welche in dem gegebenen Falle den Inhalt des Dreiecks auf dem kürzeſten Wege giebt.

§. 84.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie und der Länge einer Seite eines Dreiecks, die Höhe deſſelben zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man quadrirt die gegebene Seite, ſo wie auch die Hälfte der Grundlinie. Subtrahirt man nun das Quadrat der Hälfte der Grundlinie vom Quadrate der gegebenen Seite, und zieht aus dem Reſte die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Höhe des Dreiecks.

Z. B. Es ſei Fig. 57. ab $= 16^\circ = 160'$; ac $= 145'$ ſo iſt $\frac{160}{2} = 80$, und $80.80 = 6400$; auch iſt $145.145 =$

```
 21025  das Quadrat der Seite ac
  6400  das   —    der halben Grundlinie ab
――――――
1|46|25 | 120′ = 12° die Höhe ac.
1|46..
―(2)2..
  44..
  ――
   225
 (24)
```

Anmer-

Anmerkung.

Wollte man die Höhe cd des Dreiecks acb genauer haben als 12° oder 120′, ſo würde die Quadratwurzel durch Annäherung (§. 132. der Arithmetik) geſucht werden müſſen, und man könnte noch Zolle, Linien ꝛc. erhalten.

§. 85.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Inhalte eines Dreiecks und der Grundlinie die Höhe zu finden.

Auflöſung.

Man dividirt mit der halben Grundlinie in den Inhalt des Dreiecks, ſo giebt der Quotient die Höhe.

Es ſei z. B. der Inhalt des Dreiecks acb (Fig. 57.) 96 Quadratruthen; die Grundlinie ab aber 16, folglich die halbe Grundlinie, oder $\frac{1}{2}$ ab = 8 Ruthen, ſo iſt

$\frac{96}{8} = 12°$ die Höhe cd des Dreiecks.

§. 86.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks aus ſeinen drei Seiten durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

1) Man addire die drei Seiten,

2) halbire die Summe,

3) ſubtrahire von der halben Summe alle Seiten des Dreiecks nach einander,

4) multiplicire die erhaltenen Reſte in einander, und dieſes Produkt multiplicire man abermals mit der halben Summe der drei gegebenen Seiten und ziehe endlich

aus dieſer Zahl die Quadratwurzel. Dieſe giebt die Fläche des Dreiecks.

Erſter Fall. Das Dreieck ſei gleichſeitig, und es ſei z. B. jede Seite 12° lang,

ſo iſt nach n. 1. 12 + 12 + 12 = 36 die Summe aller Seiten

nach n. 2. — — — 18 die halbe Summe

nach n. 3. — ſubtrahirt 12 eine Seite

6 jede Seite.

Nun iſt nach n. 4. — 6 . 6 = 36 . 6 = 216

18 = ½ Summe

1728

216

38|88 | 62°, 35′

36

288

(12)2

244

4400

(124)3

3729

67100

(1246)5

62325

Reſt 4775

Demnach iſt der Inhalt 62 Quadratruthen, 35 Quadratfuß.

Zweiter Fall. Das Dreieck ſei ungleichſeitig, und es ſei Fig. 58, ab = 16°, ac = 10° und bc = 12°.

So iſt 16 + 10 + 12 = 38 nach n. 1.
19 nach n. 2.

```
 19      19      19
 16      10      12
 --      --      --
  3       9       7 nach n. 3.

      9
      3
    ---
     27
      7
    ---
    189 nach n. 4.
     19 iſt die halbe Summe
   ----
   1701
   189
   ----
   35|91 | 59,92 Quadratruthen der Inhalt
   25|                   des Dreiecks.
   --
   1091
   (10)9
    981
   -----
   11000
   (118)9
   10701
   ------
     29900
   (1198)2
     23964
   -------
Reſt  5936
```

Anmerkung.

Dieſe Aufgabe iſt dann vorzüglich brauchbar, wenn man alle Seiten eines Dreiecks unmittelbar gemeſſen

hat, weil man hier die Höhe des Dreiecks nicht ſuchen darf. Denn die Höhe eines Dreiecks auf dem Papiere durch Zeichnung geſucht, giebt die Größe derſelben immer nur unter kleinen Fehlern an; daher vermeidet man ſo viel wie möglich alle Stücke eines Dreiecks aus der Zeichnung, wenn es darauf ankommt, den Inhalt deſſelben daraus zu beſtimmen.

§. 87.

Aufgabe.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke, aus den beiden bekannten Katheten, die Hypotenuſe, und aus der bekannten Hypotenuſe und dem einen Katheten, den andern durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

Erſter Fall. Es ſei Fig. 50. im rechtwinkeligen Dreiecke cab, der Kathet ab ſo wohl, als auch ac bekannt.

Man quadrirt (nach §. 53. Anmerkung) ab, ſowohl als ac, addirt die Quadrate zuſammen, und zieht aus der Summe die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = bc$. Es ſei $ab = 12°$; $ac = 9°$ ſo iſt $ab^2 = 144$; $ac^2 = 81$,

$$ab^2 + ac^2 = 144 + 81 = 225$$

$\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = \sqrt{2|25} \;|\; 15° = bc$ die Hypotenuſe.

```
  1
 ----
 125
 (2)5
 125
 ----
   0
```

Zweiter Fall. Man quadrire die Hypotenuſe ſo wohl als den gegebenen Kathet; ſubtrahire das Quadrat des letztern vom Quadrat der erſtern, und ziehe aus dem Reſte die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(bc^2 - ab^2)} = ac$ oder $\sqrt{(bc^2 - ac^2)} = ab$.

Es

Es ſei bc = 15, ab = 12; ſo iſt $bc^2 = 225$, $ab^2 = 144$. Nun iſt 225 — 144 = 81, und $\sqrt{81} = 9$ der Kathet ac. Eben ſo iſt, wenn abermals bc = 15, und ac gegeben, und = 9 iſt; $bc^2 = 225$; $ac^2 = 81$. Nun iſt 225 — 81 = 144, und $\sqrt{144} = 12$ der Kathet ab.

§. 88.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, Fig. 60.

Auflöſung.

Man ſetzt die gegebenen Linien an einander in einerlei gerade Linie und halbirt dieſe. Beſchreibt man nun aus dem Mittelpunkte einen Halbkreis, und errichtet da, wo beide gegebenen Linien an einander treffen, eine ſenkrechte Linie bis in die Peripherie des Kreiſes; ſo iſt dieſe die mittlere Proportionallinie. Es ſei z. B. a und e (Fig. 60.) gegeben, ſo iſt ae = a, ed = e und ad = a + e. Iſt nun c der Mittelpunkt des auf ad beſchriebenen Halbkreiſes, ſo iſt ef die mittlere Proportionallinie zwiſchen a und e.

Anmerkung.

Sind die Linien in Zahlen ausgedrückt, ſo findet man zu zwei gegebenen ebenfalls die mittlere geometriſche Proportionalzahl (§. 178. Arithmetik.).

§. 89.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflöſung.

Die Theilung eines Dreiecks geſchieht entweder durch Linien aus der Spitze auf die Grundlinie,

oder mit ſolchen, die mit irgend einer Seite parallel laufen; beide Arten können überdies mit, oder ohne Rechnung vorgenommen werden.

Erſter Fall: wenn ein Dreieck durch gerade Linien aus der Spitze auf die Grundlinie getheilt wird, Fig. 59. und zwar ohne Rechnung.

Man theile z. B. die Grundlinie ab des Dreiecks acb in 4 gleiche Theile, ziehe aus der Spitze c nach den Theilungspunkten 1, 2, 3 die Linien c 1, c 2, c 3, ſo iſt ac 1 = 1 c 2 = 2 c 3 = 3 c 4 und ihre Summe dem Ganzen gleich, und jedes der Dreiecke, wie ac 1, iſt der vierte Theil von acb; denn die Flächen dieſer Dreiecke verhalten ſich, wie ihre Grundlinien.

Zweiter Fall: wenn die Theilung durch Parallellinien ohne Rechnung vorgenommen wird, Fig. 61.

Man nehme eine Seite des Dreiecks, welche man will, hier ab, theile ſolche in ſo viel gleiche Theile, als das Dreieck getheilt werden ſoll, hier in 3 gleiche Theile bei d und e, ſo daß ad = de = eb. Sucht man hierauf zu ab als der ganzen Seitenlinie des Dreiecks und zu einem der gleichen Theile be nach §. 88, die mittlere Proportionallinie ſo hat man bf; ſucht man ferner zu ab und bd die mittlere Proportionallinie, ſo erhält man bg. Zieht man endlich durch f die Linie fh ∥ ac und durch g die Linie gi ∥ ac; ſo iſt das Dreieck in drei gleiche Theile fbh, fhgi und gaic getheilt.

Dritter Fall: wenn man die Theilung durch Rechnung vornimmt ſo, daß der Inhalt des Dreiecks in gleiche Theile getheilt wird.

Es ſoll z. B. die Fläche acb Fig. 59, deren Inhalt 900 Quadratruthen beträgt, in vier gleiche Theile

getheilt

getheilt werden. Man mißt diejenige Seite des Dreiecks, auf welcher die Theilung aufgetragen werden ſoll, hier ab, und dieſe ſei 60 Ruthen lang. Dividirt man nun den Inhalt des Dreiecks mit der Theilungszahl, hier 4, ſo iſt $\frac{900}{4} = 225$ Quadratruthen der Inhalt jedes der gleichen Theile. Endlich ſchließt man:

$$900\,R^2 : 60\,R^2 = 225\,R^2 : x$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 9)\ 135\not{0}\not{0} \mid 15\ \text{R. Länge} \\ \not{0}\not{0} \end{array}$$

So viel Ruthen Länge erhält jeder vierte Theil der Linie ab, die man von a nach b aufträgt und alsdenn aus c nach den Theilungspunkten gerade Linien zieht, wodurch auch die Figur in vier gleiche Theile getheilt wird.

§. 90.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine beliebige Anzahl, aber ungleicher Theile zu theilen, Fig. 62.

Auflöſung.

Soll z. B. ein Forſt oder Wald unter eine gegebene Anzahl von Perſonen ſo getheilt werden, daß ſie alle ungleiche Theile erhalten, ſo wird bei dieſer Theilung die Geſellſchaftsregel (§. 220 der Arithmetik) zu Hülfe genommen.

Das Stück Waldung habe alſo die Geſtalt eines Dreiecks und halte 9000 R^2 Fläche. Davon ſoll A. 1600, B. 2000, C. 2100, D. 3300 R^2 erhalten; die Theilungslinie aber ſoll die Grundlinie ab des Dreiecks acb (Fig. 92.) ſeyn, und die Scheidungs- oder Gränzlinien ſollen von der Spitze c des Dreiecks, nach der Grundlinie ab gezogen werden. Wie viel wird nun jede der Perſonen auf ab Länge erhalten?

Geſetzt die Grundlinie wäre 600 R lang; ſo wäre die Berechnung folgende:

$$9000\ R^2 : 600\ R = A\ 1600 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 1600}{9000} = 106\ R\ 6\ F\ 6\frac{2}{3}\ Z$ für A.

$$9000\ R^2 : 600\ R = B.\ 2000 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 2000}{9000} = 133\ R\ 3\ F\ 3\frac{1}{3}\ Z$ für B.

$$9000\ R^2 : 600\ R = C.\ 2100 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 2100}{9000} = 140\ R$ für C.

$$9000\ R^2 : 600\ R = D\ 3300 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 3300}{9000} = 220\ R$ für D.

Folglich werden auf der Grundlinie ab, $106° 6' 6\frac{2}{3}''$ für A, von a nach 1; $133° 3' 3\frac{1}{2}''$ für B, von 1 nach 2; $140°$ für C, von 2 nach 3; $220°$ für D, von 3 nach 4 aufgetragen, und die Theilungslinien c 1, c 2, c 3 gezogen, ſo erhält A das Dreieck c a 1; B das Dreieck c 1 2; C das Dreieck c 2 3; und D das Dreieck c 3 4 oder c 3 b.

§. 91.

Aufgabe.

Ein Dreieck auf ſeiner bekannten Höhe in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile ſo zu theilen, daß die Theilungslinien mit der Grundlinie des Dreiecks parallel laufen. Fig. 63.

Auflöſung.

1) Man quadrirt die Höhe cd des Dreiecks acb und dividirt die erhaltene Quadratzahl mit der Zahl der Theile, in welche das Dreieck getheilt werden ſoll.

2) Aus dem erhaltenen Quotienten zieht man die Quadratwurzel, ſo erhält man die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd aus c nach e für den erſten Theil ce aufgetragen werden müſſen.

3) Nun addirt man den erſten und zweiten Theil der quadrirten Höhe des Dreiecks, und zieht aus dieſer Summe die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd, aus c nach f für den zweiten Theil cf aufgetragen werden müſſen.

4) Endlich addirt man den erſten, zweiten und dritten Theil der quadrirten Höhe des Dreiecks, und zieht aus dieſer Summe die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd, aus c nach g für den dritten Theil cg aufgetragen werden müſſen.

In dem gegebenem Dreiecke acb (Fig. 63.) ſei die Höhe cd = 300 Ruthen.

Nach no. 1. 300. 300 = 90000; 90000 : 4 = 22500;

Nach no. 2. $\sqrt{22500} = 150$ Ruthen, welche man von c nach e für den erſten Theil aufträgt.

Nach no. 3. $22500 . 2 = 45000$; $\sqrt{45000} = 212^\circ\ 1'\ 3''$, welche man von c nach f für den zweiten Theil aufträgt.

Nach no. 4. $22500 . 3 = 67500$; $\sqrt{67500} = 259^\circ\ 8'$, welche man von c nach g für den dritten Theil aufträgt.

Alſo kommen für den erſten Theil ce = 150°
" " zweiten — cf = 212° 1′ 3″
" " dritten — cg = 259° 8′
" " vierten — cd der Reſt.

Wer-

Werden nun die Theilungslinien durch die Punkte e, f, g parallel mit ab gezogen, ſo iſt die ganze Fläche in vier gleiche Theile getheilt.

Anmerkung.

Wäre das zu theilende Dreieck rechtwinklig, ſo würde die eine Perpendikularſeite die Höhe des Dreiecks, und man hätte nicht nöthig die Höhe zu ſuchen.

§. 92.

Aufgabe.

Ein Dreieck aus einem, auf einer gegebenen Seite liegenden Punkte, in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 64 und 65.

Auflöſung.

Es ſey das Dreieck abc (Fig. 64.). Der Punkt, in welchen die Theilungslinien zuſammenſtoßen ſollen, ſey d auf der Seite ab. Das Dreieck werde aus dieſem Punkte in drei Theile getheilt.

1) Man meſſe ab, und ad, ſo wie die Seite bc.

2) Multiplicire ab mit bc und dividire das Produkt durch die Theilungszahl, hier 3.

3) Den gefundenen Quotienten dividire man mit dem Theile der Linie db (der den Reſt vorſtellt, wenn man ad von ab ſubtrahirt, ſo giebt dieſer Quotient die Zahl der Ruthen ꝛc., welche von b nach e auf bc für den erſten Theil aufgetragen werden müſſen. Dieſer Theil des Dreiecks abc iſt nun das Dreieck edb.

4) Nun nimmt man den Quotienten, der nach n. 3 gefunden wird, doppelt, theilt das Produkt ebenfalls durch die Linie db, ſo giebt auch dieſer Quotient, die Zahl der Ruthen ꝛc, die von b nach c, oder wenn es nicht angeht, von a nach f auf ac für den zweiten Theil auf-

aufgetragen werden, wobei man aber anſtatt bc die Linie ac, und anſtatt db, die Linie ad ꝛc. in Rechnung bringen muß. Sollte ein Dreieck unter den erwähnten Bedingungen in 4, 5, 6 oder noch mehrere Theile getheilt werden; ſo würde man nach n. 4 ſo verfahren, daß man das 4, 5, 6 oder mehrfache ſuchte, und durch bd theilte, ſo hätte man auf dieſe Art den 4ten, 5ten, 6ten oder mehrfachen Theil, den man von b nach c auftragen könnte.

Kann man auf bc nicht alle gefundenen Theile tragen, ſo trägt man den 3ten, 4ten ꝛc. auf ac von a nach f (wie n. 4.) ꝛc. und ſo würde man überhaupt auf ac verfahren, wie man auf bc verfahren hat.

In dem zur Theilung gegebenen Dreiecke acb (Fig. 64.), welches aus d in ab, in drei Theile getheilt werden ſoll, iſt ab = 292°; bc = 245°; ad = 110°; db = 182°; ac = 226°.

Nun iſt nach n. 1, 2 und 3 ab + bc = 71540; 71540 : 3 = 23846; 23846 : db oder $\frac{23846}{182}$ = 131° für den erſten Theil auf bc, den man von b nach c aufträgt.

Nach n. 4. iſt 23846 . 2 = 47692; 47692 : 182 = 262° für den zweiten Theil. Da aber die Linie bc nur 245° iſt, ſo muß dieſer Theil auf die Linie ac von c nach f aufgetragen werden. Daher ſucht man dieſen Theil auf folgende Art:

Nach no. 1, 2 und 3 iſt ab + ac = 66992; 66992 : 3 = 22330; 22330 : ad, oder $\frac{22330}{110}$ = 203°. der nun gefundene zweite Theil, den man auf ac, von a nach f (n. 4.) aufträgt, in welchem Falle alsdenn der dritte Theil von ſelbſt übrig bleibt.

Folglich iſt nun das Dreieck acb aus dem Punkte d in drei gleiche Theile getheilt, nämlich in das Dreieck

edb,

auf alle Arten derſelben, und vermöge dieſer Sätze kann man jedes Dreieck aufnehmen und zeichnen, ohne daß man nöthig hat, alle Seiten und Winkel zu kennen. Da ſich nun alle vielſeitigen Figuren in Dreiecke durch Diagonalen zerlegen laſſen, ſo enthalten dieſe Sätze die geſammten Kenntniſſe für alle Arten von Figuren, und man kann vermöge ihrer jede Figur aus nur wenigen Stücken, die man unmittelbar meſſen kann, aufnehmen und zu Papiere bringen. Ein ſechstes Kennzeichen der Kongruenz der Dreiecke aber iſt unmöglich, weil ein Dreieck nicht aus ſeinen drei Winkeln allein beſtimmt werden kann; daher enthält auch jedes dieſer Kennzeichen wenigſtens eine Seite. In der Ausübung kommen der Fälle, unter welchen man Figuren aufnehmen ſoll, ſehr viele vor, und unmöglich iſt jeder Fall, der ſich nicht unter eins dieſer Kennzeichen bringen läßt. Vollſtändige Beweiſe findet man in jedem Lehrbuche der theoretiſchen Geometrie.

§. 72.

Aufgabe.

Jedes rechtwinkelige Dreieck aus dem rechten Winkel und den beiden Katheten zu zeichnen, Fig. 50.

Auflöſung.

Man zeichne einen rechten Winkel an a b als an einen der gegebenen Katheten in a, indem man eine ſenkrechte Linie a c (§. 53.) errichtet, mache a c dem andern gegebenen Katheten gleich, und ziehe b c, ſo iſt das rechtwinkelige Dreieck c a b das verlangte (§. 70. No 1.)

Anmerkung.

Auf dieſelbige Art kann man auch ein Dreieck zeichnen, wenn der gegebene Winkel entweder ſpitz oder ſtumpf iſt, und auf eben die Art können dieſe Dreiecke auf dem Felde gemeſſen und auf demſelben aufgetragen werden.

§. 73.

Aufgabe.

Jedes gleichſeitige Dreieck aus einer gegebenen Seite zu zeichnen, Fig. 51.

Auflöſung.

Man zeichne das Dreieck auf die gegebene Seite ab ſo, daß ac und bc, beide ſo groß als ab, den Durchſchnittspunkt c aus a und b geben, indem man ab in den Zirkel faſſet, und aus a ſo wohl, als aus b Bogen beſchreibt. Das ſo erhaltene Dreieck acb iſt gleichſeitig.

Anmerkung.

Die Vermeſſung eines gleichſeitigen Dreiecks iſt leicht, denn man darf nur eine Seite unmittelbar meſſen.

§. 74.

Aufgabe.

Jedes gleichſchenkelige Dreieck aus der Grundlinie ab und aus einem der gleichen Schenkel bc Fig. 52. zu zeichnen.

Auflöſung.

Man nehme den Schenkel bc in den Zirkel und beſchreibe damit aus a und b Bogen, die ſich in d ſchneiden, ſo iſt d die Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks adb, worin ad=bd dem gegebenen Schenkel bc und ab der gegebenen Grundlinie gleich iſt.

Anmerkung.

Wäre ein auf dem Felde gegebenes Dreieck gleichſchenkelig, ſo dürfte man nur die Grundlinie und einen

der

der gleichen Schenkel meſſen, und man hätte die das Dreieck beſtimmenden Stücke. (Die Figur 52. iſt verunglückt, und kein gleichſchenkeliges Dreieck.).

§. 75.

Aufgabe.

Aus drei gegebnen geraden Linien, wovon jede zwei zuſammen genommen größer ſind, als die dritte, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 52. 52*. 53.

Auflöſung.

Nach den gegebenen Linien und der Wahl der Standlinie, wird das Dreieck entweder ſpitzwinkelig oder ſtumpfwinkelig.

Es ſei zu Fig. 52* ab, bc, bd gegeben. Man nehme bd zur Grundlinie mit der Vorausſetzung, daß $ab + bc > bd$ iſt. Mit ab beſchreibe man aus d, ſo wie mit bc aus b, die Bogen e und f, welche ſich in g ſchneiden. Zieht man dg und bg, ſo iſt das Dreieck bgd das verlangte, und es iſt $ab = ab$, $dg = bd$, $bg = bc$ und jeder Winkel ein ſpitzer Winkel. Iſt aber Fig. 53. gegeben ab, cd, ef, und man nimmt cd zur Grundlinie, ſo wird wie vorhin bdc das verlangte Dreieck, worin $cd = cd$, $cb = ab$, $db = ef$ und das Dreieck iſt ſtumpfwinkelig. (§. 70. n. 2.).

Anmerkung.

Wäre Fig. 53. $ab > cd + ef$, ſo könnten ſich cd und ef über ab nicht ſchneiden, und es wäre kein Dreieck möglich. Kann man auf dem Felde alle drei Seiten eines Dreiecks meſſen, ſo iſt das Dreieck dadurch beſtimmt (§. 70. n. 2.).

§. 76.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Seiten und dem der größern Seite entgegengeſetzten Winkel, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 54.

Auflöſung.

Es ſei gegeben ab, ac und der Winkel a. Man nimmt eine von den beiden gegebenen Linien als Grundlinie an, hier ab, und zeichnet in a (nach §. 51.) einen Winkel cab der dem gegebenen gleich iſt. Auf den Schenkel ac trägt man die zweite gegebene Linie von a nach c, ſo iſt das Dreieck gezeichnet.

Anmerkung.

Dieſes Dreieck Fig. 54. enthält die Bedingung nicht, welche in der Aufgabe gemacht wurde. Es iſt zwar der Winkel cab = a, die Seite ab = ab, die Seite ac = ac ſo, daß das Dreieck die gegebenen drei Stücke in ſich faſſet, aber die Lage dieſer Stücke iſt nicht ſo, daß der Bedingung ein Genüge geleiſtet würde. Der Winkel a muß in jedem Falle der gegebenen größern Seite entgegen ſtehen, und darnach muß die Zeichnung geändert werden. Nach dieſer Aenderung ſtimmt der Satz mit §. 70. n. 3. überein.

Mißt man daher ein Dreieck auf dem Felde aus dieſen Stücken, ſo muß man den der größern Seite entgegengeſetzten Winkel unmittelbar meſſen. Man ſehe Meinerts Lehrbuch der Mathematik Theil II. Geometrie §. 68 und 69.

Daher decken ſich auch nur dann zwei rechtwinkelige Dreiecke, wenn die Seiten, welche den rechten Winkel nicht einſchließen, gleich ſind. Sind die Dreiecke ſtumpfwinkelig, ſo decken ſie ſich nur dann, wenn die Seiten, welche den ſtumpfen Winkel nicht einſchließen, gleich ſind, und die ſtumpfen Winkel überdem einerlei Größe haben.

§. 77.

Aufgabe.

Aus einer Seite und zwei Winkeln, deren Summe kleiner als 2 R. iſt, ein Dreieck zu zeichnen, Fig. 55.

Auflöſung.

Hier finden zwei Fälle Statt:

1) Die beiden gegebenen Winkel können an der gegebenen Seite liegen;

2) Die beiden gegebenen Winkel können aber auch eine ſolche Lage haben, daß der eine an der gegebenen Seite, der andere aber dieſer Seite gegenüber liegt.

Erſter Fall:

Es ſei die Seite ab (Fig. 55.), der Winkel a und b gegeben. Man zeichne an ab in a den Winkel a, und an b den Winkel b (§. 51.), ſo ſchneiden ſich die Schenkel ac und bc in c, und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Zweiter Fall:

Es ſei abermals die Seite ab, der Winkel a und b Fig. 16. Tab. II* gegeben.

Man zeichne in a an ab den Winkel a; verlängere ab rückwärts nach e, und zeichne den gegebenen Winkel b an a ſo, daß $cad = b$ wird, ſo iſt $cab + cbd + x = 180^\circ$. Zeichnet man nun x, als die Ergänzung von den Winkeln $a + b$ zu 180° oder zu 2 R, ſo iſt $bc \neq ad$ (§. 18.) ac wird von bc geſchnitten, und es iſt der Wechſelwinkel $cbd = bca$ (§. 18. n. 2.), und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Anmer-

Anmerkung.

Auch zum Meſſen der Dreiecke auf dem Felde, kann man ſich dieſer beiden Sätze bedienen, wenn die vorkommenden Fälle mit dieſen überein kommen, welche in der Bedingung der Aufgabe liegen.

§. 78.

Da die Summe aller Winkel in jedem Dreiecke 180° beträgt (§. 16.), ſo kann man, wenn ein Winkel in Graden ꝛc. gegeben iſt, die Summe der beiden übrigen Winkel im Dreiecke finden, denn ſie iſt die Ergänzung zu 2 R. oder 180°.

Es ſei der Winkel a (Fig. 55.) = 65°39′45″.

a + b + c	= 180° oder	179°59′60″	
a	=	65°39′45″	ſubtrahirt,
b + c	=	114°20′15″	

Iſt die Größe zweier Winkel in Graden ꝛc. bekannt, ſo findet man die Größe des dritten, durch die Subtraktion ihrer Summe von 180°.

Es ſei b (Fig. 55.)	=	62°15′33″	
c	=	52° 4′42″	ſubtrahirt
ſo iſt b + c	=	114°20′15″.	

Und es iſt a + b + c	= 180° oder	179°59′60″
aber b + c	=	114°20′15″
alſo iſt a	=	65°39′45″.

§. 79.

In jedem gleichſeitigen Dreiecke ſind alle Winkel gleich. Da nun a + b + c (Fig. 51.) = 2 R. oder 180°; ſo iſt jeder Winkel, wie z. B. a = $\frac{2}{3}$ R. oder $\frac{180°}{3}$ = 60 Grade.

§. 80.

In jedem gleichſchenkeligen Dreiecke ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. Auch theilt eine aus der Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks gefällte ſenkrechte Linie nicht nur den Winkel an der Spitze, ſondern auch die Grundlinie, und mithin das ganze Dreieck in zwei gleiche Theile.

Kennt man den Winkel an der Spitze im gleichſchenkeligen Dreiecke z. B. d (Fig. 52.) in Graden ꝛc. ſo findet man die Winkel an der Grundlinie zuſammen, wenn man jenen von 180° ſubtrahirt, und jeden der beiden letzten, wenn man dieſe Differenz mit 2 dividirt.

Es ſei z. B. $d = 45°$.

$$\begin{array}{lll} \text{Nun iſt} & a + b + d & = 180° \\ & \phantom{a+b+{}} d & = \underline{45°} \\ \text{alſo iſt} & a + b & = 135°; \\ \text{folglich} & a & = 67\tfrac{1}{2} = 67°30' = b. \end{array}$$

Auch erhält man jeden Winkel an der Grundlinie im gleichſchenkeligen Dreiecke, wenn man die Hälfte des Winkels an der Spitze von 90° ſubtrahirt.

Kennt man hingegen einen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie, ſo findet man den halben Winkel an der Spitze, wenn man jenen von 90°, oder den ganzen Winkel an der Spitze, wenn man den Winkel an der Grundlinie mit 2 multiplicirt, und das Produkt von 180° ſubtrahirt.

§. 81.

Die Größe jedes Dreiecks hängt von ſeiner Grundlinie und Höhe ab. Dreiecke alſo, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, ſind einander gleich, ſie mögen übrigens von einer Art ſeyn, von welcher ſie wollen, wie in Fig. 56.

§. 82.

Zur Vergleichung des Inhalts oder der Fläche der Figuren, dient das §. 23. und §. 206. der Arithmetik und §. 25. n. 1. der Geometrie erwähnte Quadrat. Mithin wird der Inhalt aller Flächenfiguren im Quadratmaße, nämlich in Quadratruthen, Quadratfußen ꝛc. beſtimmt. Da nun der Inhalt eines Quadrats durch das Produkt ſeiner Grundlinie in die Höhe, oder welches bei dem Quadrate einerlei iſt, durch das Quadrat der Seite ausgedrückt wird, ſo wird auch Grundlinie und Höhe eines Dreiecks zur Beſtimmung des Verhältniſſes des Inhalts des Dreiecks gegen den Inhalt des Quadrats nöthig ſeyn.

§. 83.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks durch Rechnung zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man fälle aus der Spitze c des Dreiecks acb die ſenkrechte Linie cd auf ab, ſo iſt cd die Höhe, ab aber die Grundlinie. Beide Linien ab ſowohl, als auch cd meſſe man mit Längenmaße von einerlei Namen, z. B. Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. und es iſt der Flächeninhalt:

1) Das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe mit 2 dividirt, alſo $\frac{ab.cd}{2}$; oder

2) das Produkt aus der halben Grundlinie in die Höhe, alſo $\frac{1}{2}$ ab.cd; oder

3) das Produkt der Grundlinie in die halbe Höhe, alſo ab. $\frac{1}{2}$ cd.

Es ſei z. B. die Grundlinie ab = 16°, die Höhe cd = 12°; ſo iſt

1) der Inhalt $\frac{16.12}{2}$ = 96 Quadratruthen.

2) Der Inhalt 8 . 12 = 96 R².

3) Der Inhalt 16 . 6 = 96 R².

Anmerkung.

Bei der Berechnung irgend eines gegebenen Dreiecks wählt man diejenige Regel, welche in dem gegebenen Falle den Inhalt des Dreiecks auf dem kürzeſten Wege giebt.

§. 84.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie und der Länge einer Seite eines Dreiecks, die Höhe deſſelben zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man quadrirt die gegebene Seite, ſo wie auch die Hälfte der Grundlinie. Subtrahirt man nun das Quadrat der Hälfte der Grundlinie vom Quadrate der gegebenen Seite, und zieht aus dem Reſte die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Höhe des Dreiecks.

Z. B. Es ſei Fig. 57. ab = 16° = 160′; ac = 145′ ſo iſt $\frac{160}{2}$ = 80, und 80 . 80 = 6400; auch iſt 145 . 145 =

21025 das Quadrat der Seite ac
6400 das — der halben Grundlinie ab

```
 1|46|25 | 120′ = 12° die Höhe ac.
 1|46..
 (2)2..
   44..
    225
```

Anmerkung.

Wollte man die Höhe cd des Dreiecks acb genauer haben als 12° oder 120′, ſo würde die Quadratwurzel durch Annäherung (§. 132. der Arithmetik) geſucht werden müſſen, und man könnte noch Zolle, Linien ꝛc. erhalten.

§. 85.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Inhalte eines Dreiecks und der Grundlinie die Höhe zu finden.

Auflöſung.

Man dividirt mit der halben Grundlinie in den Inhalt des Dreiecks, ſo giebt der Quotient die Höhe.

Es ſei z. B. der Inhalt des Dreiecks acb (Fig. 57.) 96 Quadratruthen; die Grundlinie ab aber 16, folglich die halbe Grundlinie, oder $\frac{1}{2}$ ab = 8 Ruthen, ſo iſt

$\frac{96}{8} = 12°$ die Höhe cd des Dreiecks.

§. 86.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks aus ſeinen drei Seiten durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

1) Man addire die drei Seiten,

2) halbire die Summe,

3) ſubtrahire von der halben Summe alle Seiten des Dreiecks nach einander,

4) multiplicire die erhaltenen Reſte in einander, und dieſes Produkt multiplicire man abermals mit der halben Summe der drei gegebenen Seiten und ziehe endlich

aus dieſer Zahl die Quadratwurzel. Dieſe giebt die Fläche des Dreiecks.

Erſter Fall. Das Dreieck ſei gleichſeitig, und es ſei z. B. jede Seite 12° lang,

ſo iſt nach n. 1. 12 + 12 + 12 = 36 die Summe aller Seiten
nach n. 2. — — — 18 die halbe Summe
nach n. 3. — ſubtrahirt 12 eine Seite
6 jede Seite.

Nun iſt nach n. 4. — 6 . 6 = 36 . 6 = 216
18 = ½ Summe
1728
216
38|88 | 62°, 35′
36
288
(1 2)2
244
4400
(1 2 4)3
3729
67100
(1 2 4 6)5
62325
Reſt 4775

Demnach iſt der Inhalt 62 Quadratruthen, 35 Quadratfuß.

Zweiter Fall. Das Dreieck ſei ungleichſeitig, und es ſei Fig. 58, ab = 16°, ac = 10° und bc = 12°.

So iſt 16 + 10 + 12 = 38 nach n. 1.
19 nach n. 2.

19	19	19	
16	10	12	
3	9	7	nach n. 3.

9
3
27
7
189 nach n. 4.
19 iſt die halbe Summe
1701
189
35|91 | 59,92 Quadratruthen der Inhalt des Dreiecks.
25|
1091
(10)9
981
11000
(118)9
10701
29900
(1198)2
23964
Reſt 5936

Anmerkung.

Dieſe Aufgabe iſt dann vorzüglich brauchbar, wenn man alle Seiten eines Dreiecks unmittelbar gemeſſen

hat, weil man hier die Höhe des Dreiecks nicht ſuchen darf. Denn die Höhe eines Dreiecks auf dem Papiere durch Zeichnung geſucht, giebt die Größe derſelben immer nur unter kleinen Fehlern an; daher vermeidet man ſo viel wie möglich alle Stücke eines Dreiecks aus der Zeichnung, wenn es darauf ankommt, den Inhalt deſſelben daraus zu beſtimmen.

§. 87.

Aufgabe.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke, aus den beiden bekannten Katheten, die Hypotenuſe, und aus der bekannten Hypotenuſe und dem einen Katheten, den andern durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

Erſter Fall. Es ſei Fig. 50. im rechtwinkeligen Dreiecke cab, der Kathet ab ſo wohl, als auch ac bekannt.

Man quadrirt (nach §. 53. Anmerkung) ab, ſowohl als ac, addirt die Quadrate zuſammen, und zieht aus der Summe die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = bc$. Es ſei $ab = 12^\circ$; $ac = 9^\circ$ ſo iſt $ab^2 = 144$; $ac^2 = 81$,

$$ab^2 + ac^2 = 144 + 81 = 225$$

$\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = \sqrt{2|25} \mid 15^\circ = bc$ die Hypotenuſe.

```
 1
―――――
 125
 (2)5
 125
―――――
  0
```

Zweiter Fall. Man quadrire die Hypotenuſe ſo wohl als den gegebenen Kathet; ſubtrahire das Quadrat des letztern vom Quadrat der erſtern, und ziehe aus dem Reſte die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(bc^2 - ab^2)} = ac$ oder $\sqrt{(bc^2 - ac^2)} = ab$.

Es

Es ſei bc = 15, ab = 12; ſo iſt $bc^2 = 225$, $ab^2 = 144$. Nun iſt 225 — 144 = 81, und $\sqrt{81} = 9$ der Kathet ac. Eben ſo iſt, wenn abermals bc = 15, und ac gegeben, und = 9 iſt; $bc^2 = 225$; $ac^2 = 81$. Nun iſt 225 — 81 = 144, und $\sqrt{144} = 12$ der Kathet ab.

§. 88.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, Fig. 60.

Auflöſung.

Man ſetzt die gegebenen Linien an einander in einerlei gerade Linie und halbirt dieſe. Beſchreibt man nun aus dem Mittelpunkte einen Halbkreis, und errichtet da, wo beide gegebenen Linien an einander treffen, eine ſenkrechte Linie bis in die Peripherie des Kreiſes; ſo iſt dieſe die mittlere Proportionallinie. Es ſei z. B. a und e (Fig. 60.) gegeben, ſo iſt ae = a, ed = e und ad = a + e. Iſt nun c der Mittelpunkt des auf ad beſchriebenen Halbkreiſes, ſo iſt ef die **mittlere Proportionallinie zwiſchen** a und e.

Anmerkung.

Sind die Linien in Zahlen ausgedrückt, ſo findet man zu zwei gegebenen ebenfalls die **mittlere geometriſche Proportionalzahl** (§. 178. **Arithmetik.**).

§. 89.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflöſung.

Die Theilung eines Dreiecks geſchieht entweder **durch Linien aus der Spitze auf die Grundlinie,** oder

oder mit ſolchen, die mit irgend einer Seite parallel laufen; beide Arten können überdies mit, oder ohne Rechnung vorgenommen werden.

Erſter Fall: wenn ein Dreieck durch gerade Linien aus der Spitze auf die Grundlinie getheilt wird, Fig. 59. und zwar ohne Rechnung.

Man theile z. B. die Grundlinie ab des Dreiecks acb in 4 gleiche Theile, ziehe aus der Spitze c nach den Theilungspunkten 1, 2, 3 die Linien c 1, c 2, c 3, ſo iſt ac1 = 1c2 = 2c3 = 3 c 4 und ihre Summe dem Ganzen gleich, und jedes der Dreiecke, wie ac1, iſt der vierte Theil von acb; denn die Flächen dieſer Dreiecke verhalten ſich, wie ihre Grundlinien.

Zweiter Fall: wenn die Theilung durch Parallellinien ohne Rechnung vorgenommen wird, Fig. 61.

Man nehme eine Seite des Dreiecks, welche man will, hier ab, theile ſolche in ſo viel gleiche Theile, als das Dreieck getheilt werden ſoll, hier in 3 gleiche Theile bei d und e, ſo daß ad = de = eb. Sucht man hierauf zu ab als der ganzen Seitenlinie des Dreiecks und zu einem der gleichen Theile be nach §. 88, die mittlere Proportionallinie ſo hat man bf; ſucht man ferner zu ab und bd die mittlere Proportionallinie, ſo erhält man bg. Zieht man endlich durch f die Linie fh ∦ ac und durch g die Linie gi ∦ ac; ſo iſt das Dreieck in drei gleiche Theile fbh, fhgi und gaic getheilt.

Dritter Fall: wenn man die Theilung durch Rechnung vornimmt ſo, daß der Inhalt des Dreiecks in gleiche Theile getheilt wird.

Es ſoll z. B. die Fläche acb Fig. 59, deren Inhalt 900 Quadratruthen beträgt, in vier gleiche Theile getheilt

getheilt werden. Man mißt diejenige Seite des Dreiecks, auf welcher die Theilung aufgetragen werden ſoll, hier ab, und dieſe ſei 60 Ruthen lang. Dividirt man nun den Inhalt des Dreiecks mit der Theilungszahl, hier 4, ſo iſt $\frac{900}{4} = 225$ Quadratruthen der Inhalt jedes der gleichen Theile. Endlich ſchließt man:

$$900\,R^2 : 60\,R^2 = 225\,R^2 : x$$

60

9) 135ØØ | 15 R. Länge

ØØ

So viel Ruthen Länge erhält jeder vierte Theil der Linie ab, die man von a nach b aufträgt und alsdenn aus c nach den Theilungspunkten gerade Linien zieht, wodurch auch die Figur in vier gleiche Theile getheilt wird.

§. 90.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine beliebige Anzahl, aber ungleicher Theile zu theilen, Fig. 62.

Auflöſung.

Soll z. B. ein Forſt oder Wald unter eine gegebene Anzahl von Perſonen ſo getheilt werden, daß ſie alle ungleiche Theile erhalten, ſo wird bei dieſer Theilung die Geſellſchaftsregel (§. 220 der Arithmetik) zu Hülfe genommen.

Das Stück Waldung habe alſo die Geſtalt eines Dreiecks und halte 9000 R^2 Fläche. Davon ſoll A. 1600, B. 2000, C. 2100, D. 3300 R^2 erhalten; die Theilungslinie aber ſoll die Grundlinie ab des Dreiecks acb (Fig. 92.) ſeyn, und die Scheidungs- oder Gränzlinien ſollen von der Spitze c des Dreiecks, nach der Grundlinie ab gezogen werden. Wie viel wird nun jede der Perſonen auf ab Länge erhalten?

 Geſetzt

Anmerkung.

Hieraus ergiebt ſich auch die Methode, wie man ſo wohl zu einer gegebenen Kreislinie, als auch zu jedem Kreisbogen, den Mittelpunkt finden kann.

§. 64.

Aufgabe.

Ein Oval zu zeichnen, Fig. 49.

Auflöſung.

Man ziehe eine gerade Linie a b von beliebiger Länge, beſchreibe eine Kreislinie aus c, ſo ſchneidet dieſe die gerade Linie a b in b. Aus dem zweiten gegen a zu liegenden Durchſchnittspunkte der Kreislinie mit der geraden, beſchreibe man eine zweite Kreislinie, ſo ſchneiden ſich beide Kreislinien in d und e. Setzt man den Zirkel in e und beſchreibt mit der Oeffnung des Durchmeſſers dieſer Kreislinien den Bogen fg, und aus d, den Bogen hi, ſo hat man das verlangten Oval.

Anmerkung.

Da die Form der Ovale ſehr verſchieden, und die zur Zeichnung nöthigen Stücke unter vielfachen Bedingungen vorkommen, die hier nicht ſämmtlich auseinander geſetzt werden können, und überdies die Ovale in dieſen Anfangsgründen nicht von vielem Gebrauche ſind, ſo wird der gegenwärtige Fall zur Kenntniß eines Ovals hinreichen.

§. 65.

Da es in der Anwendung der Geometrie, folglich auch im Forſtweſen oft nöthig, die Länge einer Kreisperipherie, oder eines Kreisbogens, anzugeben, und für dieſe Linien kein Maß vorhanden iſt, ſo hat man ſich bemüht, die Länge dieſer Linien in bekanntem Längenmaße auszu-

ausƶudrücken. Um eine ſolche Linie mit Längenmaße zu meſſen, muß man wiſſen, in welchem Verhältniſſe irgend eine Kreislinie mit einer geraden Linie ſtehe, deren Länge auf eine leichte Art beſtimmt werden kann. Die gerade Linie, womit man zunächſt jede Kreislinie vergleicht, iſt der, der Kreislinie zugehörige Durchmeſſer, weil man bis jetzt keine andere ausgemittelte Vergleichung kennt. Man hat daher Kreislinie und Durchmeſſer derſelben, oder umgekehrt: Durchmeſſer und dazu gehörige Kreislinie in ein Verhältniß zu bringen geſucht, deſſen Exponent anzeigt, wie viel mal der Durchmeſſer in der dazu gehörigen Kreislinie (als eine gerade Linie betrachtet) enthalten ſei. So viele Verſuche auch gemacht worden ſind, den Exponent dieſes Verhältniſſes durch eine völlig beſtimmte oder rationale Zahl auszudrücken, ſo hat es doch weder durch Rechnung, noch durch geometriſche Konſtruktionen völlig glücken wollen. Archimedes (ein Griechiſcher Geometer, etwa 287 Jahr vor unſerer Zeitrechnung geboren) hat dieſes Verhältniß durch die Zahlen 7 : 22 ausgedrückt, d. i. wenn der Durchmeſſer eines Kreiſes 7 gleiche Theile oder 7 Fuße lang iſt, ſo iſt die Kreisperipherie 22 ſolche Theile, oder 22 Fuße lang, welches aber nicht vollkommen genau trifft, und wovon man ſich aus Gründen überzeugt, die hierher nicht gehören. Das Verhältniß 7 : 22 iſt eigentlich $7 : 21\frac{70}{71}$ oder $1 : 3\frac{1}{7}$ oder $1 : 3\frac{10}{71}$, welches letztere man erhält, wenn man beide Glieder mit dem erſten Gliede oder hier mit 7 dividirt. Um aber alle Weitläuftigkeit im Rechnen zu vermeiden, läßt man den Bruch weg, oder ergänzt $\frac{70}{71}$ zu 1 und ſetzt 7 : 22. Dividirt man 7 in 22, ſo iſt der Quotient = 3, 142.. der Exponent des Verhältniſſes, denn ſo vielmal iſt der Durchmeſſer in der dazu gehörigen Kreisperipherie enthalten. Ludolph van Ceulen ſetzte das Verhältniß des Durchmeſſers zur dazugehörigen Kreisperipherie 100 : 314 und den Exponent dieſes Verhältniſſes auf 3,1415926... Me-

tius Verhaͤltniß iſt 113 : 355, und der Exponent 3,1415929... Ein anderes Verhaͤltniß 106 : 333 giebt den Exponent 3,1415...

Da nun das Ludolphiſche unter allen bis jetzt bekannten, das genaueſte iſt, ſo iſt darnach das Archimedeiſche etwas zugroß; eben ſo iſt auch das von Metius noch etwas zu groß; das letztere aber offenbar zu klein.

In der Ausuͤbung dieſer Lehre, beſonders ſo weit dieſe die Forſtgeometrie noͤthig hat, begnuͤgt man ſich mit dem Ludolphiſchen Verhaͤltniſſe 100 : 314 oder auch in manchen Faͤllen mit dem Arichimedeiſchen Verhaͤltniſſe 7 : 22, und braucht dieſe Verhaͤltniſſe, um zu gegebenen Durchmeſſern die dazu gehoͤrigen Kreisperipherien oder Bogen, oder zu bekannten Kreisperipherien und Bogen die Durchmeſſer oder Halbmeſſer im Laͤngenmaße zu berechnen. Im letzten Falle wird nach dem Zwecke der Aufgabe das Verhaͤltniß ſo geſetzt: 314 : 100 oder 22 : 7.

Anmerkung.

Von aͤltern Zeiten her haben ſich viele bemuͤht, das angezeigte Verhaͤltniß des Durchmeſſers zur Kreisperipherie genau zu finden. Die neuern, aber dennoch verungluͤckten Bemuͤhungen ſind von Joſeph Ignatius v. Leiſtner in Wien, Johann Chriſtoph Merkel, einem evangeliſchen Prediger zu Ravensberg in Schwaben, und von Johann Stephan Boͤhme, einem Schulkollegen in Kalbe, welche ſaͤmmtlich das Verhaͤltniß des Durchmeſſers zur Kreisperipherie durch die Zahlen 1225 : 3844 ausdruͤcken. Da aber $\frac{3844}{1225} = 3,13\ldots$ ſo iſt der Exponent des Verhaͤltniſſes zu klein. Eben ſo iſt das Verhaͤltniß 637 : 200, von Friedrich Brammerell, Fuͤrſtl. Heſſ. Rath, welches den Exponent 3,1397.. hat, nach der Ludolphiſchen Zahl 3,14159... zu klein.

§. 66.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Durchmeſſer die dazu gehörige Kreisperipherie zu finden.

Auflöſung.

Man ſucht zu den beiden Gliedern des Verhältniſſes 100 : 314, und zu dem gegebenen Durchmeſſer des Kreiſes, die vierte Proportionalzahl (Arithm. §. 168.), welche die geſuchte Kreisperipherie iſt.

Z. B. Es ſei der Durchmeſſer 56^{I}.

$$100 : 314 = 56 : x$$

```
        314
         56
       ----
       1884
      1570
      -----
100) 17584 | 175 84/100 = 175ᴵ 8ᴵᴵ 4ᴵᴵᴵ die Kreisperipherie.
```

§. 67.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Kreisperipherie den dazu gehörigen Durchmeſſer zu finden.

Auflöſung.

Man ſucht zu den beiden Gliedern des Verhältniſſes 314 : 100 und zu der gegebenen Kreisperipherie, die vierte Proportionalzahl (Arithm. §. 168.), welche der geſuchte Durchmeſſer iſt.

Z. B. Es ſei die Kreisperipherie $175^{\text{I}}8^{\text{II}}4^{\text{III}}$.

$$314 : 100 = 17584^{\text{III}} : x$$

```
                 100
          ----------
314) 1758400 | 56ᴵ der Durchmeſſ.
```


Anmer-

Anmerkung.

Wäre der Halbmeſſer gegeben, ſo fände man nach §. 66. nur die halbe Kreisperipherie; und eben ſo würde man nach §. 67. zur gegebenen halben Kreisperipherie nur den Halbmeſſer finden. In beiden Fällen dürfte man alſo nur die gefundenen Hälften mit 2 multipliciren, ſo hätte man die verlangte Kreisperipherie und den Durchmeſſer. Dieſe Multiplikation könnte auch ſchon vor der Auflöſung der Aufgabe vorgenommen werden, und man würde folglich das Verlangte finden.

§. 68.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Anzahl Grade ꝛc. die ein Kreisbogen von der dazu gehörigen und gegebenen Kreislinie faſſet, die Länge dieſes Bogens zu finden.

Auflöſung.

Man ſchließt: wie $360°$: x Grade, ſo die Länge der Kreislinie zur Länge des Kreisbogens.

Es faſſe der Bogen $108°$ und die Länge der Kreisperipherie ſei $175^{I}8^{II}4^{III}$.

$$
\begin{array}{rl}
360 : 108 = & 17584^{III} : x \\
 & \underline{\quad\; 108} \\
 & 140672 \\
 & \underline{17584\quad} \\
360) & 1899072 \,|\, 52^{I}7^{II}5\tfrac{1}{5}^{III} \text{ Länge d. Bog.}
\end{array}
$$

§. 69.

Aufgabe.

Aus der Länge des Bogens und der Kreislinie, die Anzahl der Grade zu finden, die derſelbe von der Anzahl aller Grade der Kreislinie faſſet.

Auf-

Auflöſung.

Man ſchließt: wie die Länge der Kreislinie zu der Länge des Bogens, ſo 360° zu x Graden.

Es ſei z. B. die Länge der Kreislinie 175' 8'' 4''' die Länge des Bogens aber 52' 7'' $5\frac{1}{5}$'''.

```
17584 : 5275⅕ = 360 : x
    5   26376
87920     360
        1582560
        79128
8792)   9495360 | 108° Anzahl der Grade des
                          Bogens.
```

Zweite Abtheilung.

Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie.

§. 70.

Die Flächenmeſſung oder die Epipedometrie lehrt, wie man alle Arten von Flächen mit einem angenommenen Maße, welches ebenfalls eine Fläche iſt, aber von bekannter Größe, vergleichen, die Größe des Raums, den jede Fläche faſſet, oder ihren Flächeninhalt ausmitteln, die auf dem Felde gemeſſenen Flächenfiguren verjüngt auf das Papier bringen, und wenn es nöthig iſt, Figuren dieſer Art nach gegebenen Vorſchriften theilen kann. Inhalt, Flächeninhalt und Quadratinhalt haben in der Epipedometrie einerlei Bedeutung, ſie zeigen nämlich insgeſammt die Größe des Raums an, den eine Figur auf einer Fläche einnimmt.

Anmerkung.

Die Lehren dieſes Theils der Geometrie haben ihren Einfluß beſonders auf die Beſtimmung derjenigen Stücke einer Figur, welche unmittelbar gemeſſen werden müſſen, um daraus theils die Möglichkeit des Entwurfs derſelben aufs Papier, theils die Größe der Flächen oder den Inhalt der Felder, Wieſen, Forſte und Wälder ꝛc. anzugeben. Aus der Flächenmeſſung lernt man, jede Figur in Grund zu legen, ſie zu zeichnen und den Inhalt nach Ruthen, Acker, Waldmorgen zu berechnen, und Forſte in Gehaue ꝛc. einzutheilen.

Da der ganze Umfang der geſammten Lehren für einen Geſchäftsmann, wenn er nicht von Jugend auf darin unter-

unterrichtet worden, zu groß iſt; ſo werden in dieſer Abtheilung auch nur die Sätze und Aufgaben mitgetheilt, die ein Forſtoffiziant in der Ausübung nicht entbehren kann.

I.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Dreiecke.

§. 71.

Bei den Dreiecken ſind zur Beſtimmung derſelben ſo wohl, als zur Vermeſſung und Zeichnung ꝛc. folgende Sätze zu merken:

1) Wenn in zwei Dreiecken, ein Winkel und zwei Seiten, die dieſen Winkel einſchließen, gleich ſind;

2) Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten gleich ſind;

3) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der, der größern Seite entgegengeſetzte Winkel gleich ſind;

4) Wenn in zwei Dreiecken entweder eine Seite nebſt zwei Winkeln an dieſer Seite, oder 5) wenn eine Seite und zwei Winkel, wovon einer der Seite entgegengeſetzt iſt, gleich ſind;

So ſind die Dreiecke ſelbſt gleich oder ſie decken ſich, mithin haben nicht nur die Flächen, ſondern auch alle andren nicht genannten Stücke in jeden ſolchen zwei Dreiecken einerlei Größe.

Aus den genannten Stücken laſſen ſich daher auch alle Dreiecke auf dem Felde vermeſſen und auf dem Papier zeichnen.

Anmerkung.

Dieſe Sätze heißen Kennzeichen der Kongruenz der Dreiecke. Man macht davon Anwendung auf

auf alle Arten derſelben, und vermöge dieſer Sätze kann man jedes Dreieck aufnehmen und zeichnen, ohne daß man nöthig hat, alle Seiten und Winkel zu kennen. Da ſich nun alle vielſeitigen Figuren in Dreiecke durch Diagonalen zerlegen laſſen, ſo enthalten dieſe Sätze die geſammten Kenntniſſe für alle Arten von Figuren, und man kann vermöge ihrer jede Figur aus nur wenigen Stücken, die man unmittelbar meſſen kann, aufnehmen und zu Papiere bringen. Ein ſechstes Kennzeichen der Kongruenz der Dreiecke aber iſt unmöglich, weil ein Dreieck nicht aus ſeinen drei Winkeln allein beſtimmt werden kann; daher enthält auch jedes dieſer Kennzeichen wenigſtens eine Seite. In der Ausübung kommen der Fälle, unter welchen man Figuren aufnehmen ſoll, ſehr viele vor, und unmöglich iſt jeder Fall, der ſich nicht unter eins dieſer Kennzeichen bringen läßt. Vollſtändige Beweiſe findet man in jedem Lehrbuche der theoretiſchen Geometrie.

§. 72.

Aufgabe.

Jedes rechtwinkelige Dreieck aus dem rechten Winkel und den beiden Katheten zu zeichnen, Fig. 50.

Auflöſung.

Man zeichne einen rechten Winkel an a b als an einen der gegebenen Katheten in a, indem man eine ſenkrechte Linie a c (§. 53.) errichtet, mache a c dem andern gegebenen Katheten gleich, und ziehe b c, ſo iſt das rechtwinkelige Dreieck c a b das verlangte (§. 70. No 1.)

Anmerkung.

Auf dieſelbige Art kann man auch ein Dreieck zeichnen, wenn der gegebene Winkel entweder ſpitz oder ſtumpf iſt, und auf eben die Art können dieſe Dreiecke auf dem Felde gemeſſen und auf demſelben aufgetragen werden.

§. 73.

Aufgabe.

Jedes gleichſeitige Dreieck aus einer gegebenen Seite zu zeichnen, Fig. 51.

Aufloͤſung.

Man zeichne das Dreieck auf die gegebene Seite ab ſo, daß ac und bc, beide ſo groß als ab, den Durchſchnittspunkt c aus a und b geben, indem man ab in den Zirkel faſſet, und aus a ſo wohl, als aus b Bogen beſchreibt. Das ſo erhaltene Dreieck acb iſt gleichſeitig.

Anmerkung.

Die Vermeſſung eines gleichſeitigen Dreiecks iſt leicht, denn man darf nur eine Seite unmittelbar meſſen.

§. 74.

Aufgabe.

Jedes gleichſchenkelige Dreieck aus der Grundlinie ab und aus einem der gleichen Schenkel bc Fig. 52. zu zeichnen.

Aufloͤſung.

Man nehme den Schenkel bc in den Zirkel und beſchreibe damit aus a und b Bogen, die ſich in d ſchneiden, ſo iſt d die Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks adb, worin ad = bd dem gegebenen Schenkel bc und ab der gegebenen Grundlinie gleich iſt.

Anmerkung.

Waͤre ein auf dem Felde gegebenes Dreieck gleichſchenkelig, ſo duͤrfte man nur die Grundlinie und einen

der

der gleichen Schenkel meſſen, und man hätte die das Dreieck beſtimmenden Stücke. (Die Figur 52. iſt verunglückt, und kein gleichſchenkeliges Dreieck.).

§. 75.

Aufgabe.

Aus drei gegebnen geraden Linien, wovon jede zwei zuſammen genommen größer ſind, als die dritte, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 52. 52*. 53.

Auflöſung.

Nach den gegebenen Linien und der Wahl der Standlinie, wird das Dreieck entweder ſpitzwinkelig oder ſtumpfwinkelig.

Es ſei zu Fig. 52* ab, bc, bd gegeben. Man nehme bd zur Grundlinie mit der Vorausſetzung, daß $ab + bc > bd$ iſt. Mit ab beſchreibe man aus d, ſo wie mit bc aus b, die Bogen e und f, welche ſich in g ſchneiden. Zieht man dg und bg, ſo iſt das Dreieck bgd das verlangte, und es iſt $ab = ab$, $dg = bd$, $bg = bc$ und jeder Winkel ein ſpitzer Winkel. Iſt aber Fig. 53. gegeben ab, cd, ef, und man nimmt cd zur Grundlinie, ſo wird wie vorhin bdc das verlangte Dreieck, worin $cd = cd$, $cb = ab$, $db = ef$ und das Dreieck iſt ſtumpfwinkelig. (§. 70. n. 2.).

Anmerkung.

Wäre Fig. 53. $ab > cd + ef$, ſo könnten ſich cd und ef über ab nicht ſchneiden, und es wäre kein Dreieck möglich. Kann man auf dem Felde alle drei Seiten eines Dreiecks meſſen, ſo iſt das Dreieck dadurch beſtimmt (§. 70. n. 2.).

§. 76.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Seiten und dem der größern Seite entgegengeſetzten Winkel, ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 54.

Auflöſung.

Es ſei gegeben ab, ac und der Winkel a. Man nimmt eine von den beiden gegebenen Linien als Grundlinie an, hier ab, und zeichnet in a (nach §. 51.) einen Winkel cab der dem gegebenen gleich iſt. Auf den Schenkel ac trägt man die zweite gegebene Linie von a nach c, ſo iſt das Dreieck gezeichnet.

Anmerkung.

Dieſes Dreieck Fig. 54. enthält die Bedingung nicht, welche in der Aufgabe gemacht wurde. Es iſt zwar der Winkel cab = a, die Seite ab = ab, die Seite ac = ac ſo, daß das Dreieck die gegebenen drei Stücke in ſich faſſet, aber die Lage dieſer Stücke iſt nicht ſo, daß der Bedingung ein Genüge geleiſtet würde. Der Winkel a muß in jedem Falle der gegebenen größern Seite entgegen ſtehen, und darnach muß die Zeichnung geändert werden. Nach dieſer Aenderung ſtimmt der Satz mit §. 70. n. 3. überein.

Mißt man daher ein Dreieck auf dem Felde aus dieſen Stücken, ſo muß man den der größern Seite entgegengeſetzten Winkel unmittelbar meſſen. Man ſehe Meinerts Lehrbuch der Mathematik Theil II. Geometrie §. 68 und 69.

Daher decken ſich auch nur dann zwei rechtwinkelige Dreiecke, wenn die Seiten, welche den rechten Winkel nicht einſchließen, gleich ſind. Sind die Dreiecke ſtumpfwinkelig, ſo decken ſie ſich nur dann, wenn die Seiten, welche den ſtumpfen Winkel nicht einſchließen, gleich ſind, und die ſtumpfen Winkel überdem einerlei Größe haben.

§. 77.

§. 77.

Aufgabe.

Aus einer Seite und zwei Winkeln, deren Summe kleiner als 2 R. iſt, ein Dreieck zu zeichnen, Fig. 55.

Auflöſung.

Hier finden zwei Fälle Statt:

1) Die beiden gegebenen Winkel können an der gegebenen Seite liegen;

2) Die beiden gegebenen Winkel können aber auch eine ſolche Lage haben, daß der eine an der gegebenen Seite, der andere aber dieſer Seite gegenüber liegt.

Erſter Fall:

Es ſei die Seite ab (Fig. 55.), der Winkel a und b gegeben. Man zeichne an ab in a den Winkel a, und an b den Winkel b (§. 51.), ſo ſchneiden ſich die Schenkel ac und bc in c, und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Zweiter Fall:

Es ſei abermals die Seite ab, der Winkel a und b Fig. 16. Tab. II* gegeben.

Man zeichne in a an ab den Winkel a; verlängere ab rückwärts nach e, und zeichne den gegebenen Winkel b an a ſo, daß cad = b wird, ſo iſt cab + cbd + x = 180°. Zeichnet man nun x, als die Ergänzung von den Winkeln a + b zu 180° oder zu 2 R, ſo iſt bc ∦ ad (§. 18.) ac wird von bc geſchnitten, und es iſt der Wechſelswinkel cbd = bca (§. 18. n. 2.), und das Dreieck acb iſt das verlangte (§. 70. n. 4.).

Anmer-

Anmerkung.

Auch zum Meſſen der Dreiecke auf dem Felde, kann man ſich dieſer beiden Sätze bedienen, wenn die vorkommenden Fälle mit dieſen überein kommen, welche in der Bedingung der Aufgabe liegen.

§. 78.

Da die Summe aller Winkel in jedem Dreiecke 180° beträgt (§. 16.), ſo kann man, wenn ein Winkel in Graden ꝛc. gegeben iſt, die Summe der beiden übrigen Winkel im Dreiecke finden, denn ſie iſt die Ergänzung zu 2 R. oder 180°.

Es ſei der Winkel a (Fig. 55.) = 65°39′45″.

a + b + c	=	180° oder 179°59′60″	
a	=	65°39′45″	ſubtrahirt,
b + c	=	114°20′15″	

Iſt die Größe zweier Winkel in Graden ꝛc. bekannt, ſo findet man die Größe des dritten, durch die Subtraktion ihrer Summe von 180°.

Es ſei b (Fig. 55.)	=	62°15′33″	
c	=	52° 4′42″	ſubtrahirt
ſo iſt b + c	=	114°20′15″.	

Und es iſt a + b + c	=	180° oder 179°59′60″
aber b + c	=	114°20′15″
alſo iſt a	=	65°39′45″.

§. 79.

In jedem gleichſeitigen Dreiecke ſind alle Winkel gleich. Da nun a + b + c (Fig. 51.) = 2 R. oder 180°; ſo iſt jeder Winkel, wie z. B. a = $\frac{2}{3}$ R. oder $\frac{180°}{3}$ = 60 Grade.

§. 80.

§. 80.

In jedem gleichſchenkeligen Dreiecke ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. Auch theilt eine aus der Spitze des gleichſchenkeligen Dreiecks gefällte ſenkrechte Linie nicht nur den Winkel an der Spitze, ſondern auch die Grundlinie, und mithin das ganze Dreieck in zwei gleiche Theile.

Kennt man den Winkel an der Spitze im gleichſchenkeligen Dreiecke z. B. d (Fig. 52.) in Graden ꝛc. ſo findet man die Winkel an der Grundlinie zuſammen, wenn man jenen von 180° ſubtrahirt, und jeden der beiden letzten, wenn man dieſe Differenz mit 2 dividirt.

Es ſei z. B. $d = 45°$.

Nun iſt $a + b + d = 180°$
$d = 45°$

alſo iſt $a + b = 135°$;
folglich $a = 67\frac{1}{2} = 67°30' = b$.

Auch erhält man jeden Winkel an der Grundlinie im gleichſchenkeligen Dreiecke, wenn man die Hälfte des Winkels an der Spitze von 90° ſubtrahirt.

Kennt man hingegen einen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie, ſo findet man den halben Winkel an der Spitze, wenn man jenen von 90°, oder den ganzen Winkel an der Spitze, wenn man den Winkel an der Grundlinie mit 2 multiplicirt, und das Produkt von 180° ſubtrahirt.

§. 81.

Die Größe jedes Dreiecks hängt von ſeiner Grundlinie und Höhe ab. Dreiecke alſo, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, ſind einander gleich, ſie mögen übrigens von einer Art ſeyn, von welcher ſie wollen, wie in Fig. 56.

§. 82.

Zur Vergleichung des Inhalts oder der Fläche der Figuren, dient das §. 23. und §. 206. der Arithmetik und §. 25. n. 1. der Geometrie erwähnte Quadrat. Mithin wird der Inhalt aller Flächenfiguren im Quadratmaße, nämlich in Quadratruthen, Quadratfußen ꝛc. beſtimmt. Da nun der Inhalt eines Quadrats durch das Produkt ſeiner Grundlinie in die Höhe, oder welches bei dem Quadrate einerlei iſt, durch das Quadrat der Seite ausgedrückt wird, ſo wird auch Grundlinie und Höhe eines Dreiecks zur Beſtimmung des Verhältniſſes des Inhalts des Dreiecks gegen den Inhalt des Quadrats nöthig ſeyn.

§. 83.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks durch Rechnung zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man fälle aus der Spitze c des Dreiecks acb die ſenkrechte Linie cd auf ab, ſo iſt cd die Höhe, ab aber die Grundlinie. Beide Linien ab ſowohl, als auch cd meſſe man mit Längenmaße von einerlei Namen, z. B. Ruthen, Fuß, Zoll ꝛc. und es iſt der Flächeninhalt:

1) Das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe mit 2 dividirt, alſo $\frac{ab.cd}{2}$; oder
2) das Produkt aus der halben Grundlinie in die Höhe, alſo $\frac{1}{2}$ ab.cd; oder
3) das Produkt der Grundlinie in die halbe Höhe, alſo ab . $\frac{1}{2}$ cd.

Es ſei z. B. die Grundlinie ab $= 16°$, die Höhe cd $= 12°$; ſo iſt

1) der Inhalt $\frac{16.12}{2} = 96$ Quadratruthen.

2) Der Inhalt $8.12 = 96\,R^2$.

3) Der Inhalt $16.6 = 96\,R^2$.

Anmerkung.

Bei der Berechnung irgend eines gegebenen Dreiecks wählt man diejenige Regel, welche in dem gegebenen Falle den Inhalt des Dreiecks auf dem kürzeſten Wege giebt.

§. 84.

Aufgabe.

Aus der Grundlinie und der Länge einer Seite eines Dreiecks, die Höhe deſſelben zu finden, Fig. 57.

Auflöſung.

Man quadrirt die gegebene Seite, ſo wie auch die Hälfte der Grundlinie. Subtrahirt man nun das Quadrat der Hälfte der Grundlinie vom Quadrate der gegebenen Seite, und zieht aus dem Reſte die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Höhe des Dreiecks.

Z. B. Es ſei Fig. 57. ab $= 16° = 160'$; ac $= 145'$ ſo iſt $\frac{160}{2} = 80$, und $80.80 = 6400$; auch iſt $145.145 =$

```
 21025 das Quadrat der Seite ac
  6400 das    —    der halben Grundlinie ab
 ─────────
 1|46|25 | 120' = 12° die Höhe ac.
 1|46 . .
─(2)2 . .
   44 . .
  ────
    225
   (24)
```

Anmerkung.

Wollte man die Höhe cd des Dreiecks acb genauer haben als 12° oder 120′, ſo würde die Quadratwurzel durch Annäherung (§. 132. der Arithmetik) geſucht werden müſſen, und man könnte noch Zolle, Linien ꝛc. erhalten.

§. 85.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Inhalte eines Dreiecks und der Grundlinie die Höhe zu finden.

Auflöſung.

Man dividirt mit der halben Grundlinie in den Inhalt des Dreiecks, ſo giebt der Quotient die Höhe.

Es ſei z. B. der Inhalt des Dreiecks acb (Fig. 57.) 96 Quadratruthen; die Grundlinie ab aber 16, folglich die halbe Grundlinie, oder $\frac{1}{2}$ ab = 8 Ruthen, ſo iſt

$\frac{96}{8} = 12°$ die Höhe cd des Dreiecks.

§. 86.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks aus ſeinen drei Seiten durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

1) Man addire die drei Seiten,

2) halbire die Summe,

3) ſubtrahire von der halben Summe alle Seiten des Dreiecks nach einander,

4) multiplicire die erhaltenen Reſte in einander, und dieſes Produkt multiplicire man abermals mit der halben Summe der drei gegebenen Seiten und ziehe endlich

aus dieſer Zahl die Quadratwurzel. Dieſe giebt die Fläche des Dreiecks.

Erſter Fall. Das Dreieck ſei gleichſeitig, und es ſei z. B. jede Seite 12° lang,

ſo iſt nach n. 1. 12 + 12 + 12 = 36 die Summe aller Seiten

nach n. 2. — — — 18 die halbe Summe

nach n. 3. — ſubtrahirt 12 eine Seite

6 jede Seite.

Nun iſt nach n. 4. — 6 . 6 = 36 . 6 = 216

18 = ½ Summe

1728

216

38|88 | 62°, 35'

36

288

(1 2)2

244

4400

(1 2 4)3

3729

67100

(1 2 4 6)5

62325

Reſt 4775

Demnach iſt der Inhalt 62 Quadratruthen, 35 Quadratfuß.

Zweiter Fall. Das Dreieck ſei ungleichſeitig, und es ſei Fig. 58, ab = 16°, ac = 10° und bc = 12°.

So iſt 16 + 10 + 12 = 38 nach n. 1.
19 nach n. 2.

19	19	19
16	10	12
3	9	7 nach n. 3.

9
3
———
27
7
———
189 nach n. 4.
19 iſt die halbe Summe
———
1701
189
———
35|91 | 59,92 Quadratruthen der Inhalt des Dreiecks.
25|
———
1091
(10)9
981
———
11000
(118)9
10701
———
29900
(1198)2
23964
———
Reſt 5936

Anmerkung.

Dieſe Aufgabe iſt dann vorzüglich brauchbar, wenn man alle Seiten eines Dreiecks unmittelbar gemeſſen

hat, weil man hier die Höhe des Dreiecks nicht ſuchen darf. Denn die Höhe eines Dreiecks auf dem Papiere durch Zeichnung geſucht, giebt die Größe derſelben immer nur unter kleinen Fehlern an; daher vermeidet man ſo viel wie möglich alle Stücke eines Dreiecks aus der Zeichnung, wenn es darauf ankommt, den Inhalt deſſelben daraus zu beſtimmen.

§. 87.

Aufgabe.

In jedem rechtwinkeligen Dreiecke, aus den beiden bekannten Katheten, die Hypotenuſe, und aus der bekannten Hypotenuſe und dem einen Katheten, den andern durch Rechnung zu finden.

Auflöſung.

Erſter Fall. Es ſei Fig. 50. im rechtwinkeligen Dreiecke cab, der Kathet ab ſo wohl, als auch ac bekannt.

Man quadrirt (nach §. 53. Anmerkung) ab, ſowohl als ac, addirt die Quadrate zuſammen, und zieht aus der Summe die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = bc$. Es ſei $ab = 12°$; $ac = 9°$ ſo iſt $ab^2 = 144$; $ac^2 = 81$,

$$ab^2 + ac^2 = 144 + 81 = 225$$

$\sqrt{(ab^2 + ac^2)} = \sqrt{2|25} \mid 15° = bc$ die Hypotenuſe.

```
 1
------
 125
 (2)5
 125
------
   0
```

Zweiter Fall. Man quadrire die Hypotenuſe ſo wohl als den gegebenen Kathet; ſubtrahire das Quadrat des letztern vom Quadrat der erſtern, und ziehe aus dem Reſte die Quadratwurzel; oder $\sqrt{(bc^2 - ab^2)} = ac$ oder $\sqrt{(bc^2 - ac^2)} = ab$.

Es

Es ſei bc = 15, ab = 12; ſo iſt $bc^2 = 225$, $ab^2 = 144$. Nun iſt 225 — 144 = 81, und $\sqrt{81} = 9$ der Kathet ac. Eben ſo iſt, wenn abermals bc = 15, und ac gegeben, und = 9 iſt; $bc^2 = 225$; $ac^2 = 81$. Nun iſt 225 — 81 = 144, und $\sqrt{144} = 12$ der Kathet ab.

§. 88.

Aufgabe.

Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, Fig. 60.

Aufloͤſung.

Man ſetzt die gegebenen Linien an einander in einerlei gerade Linie und halbirt dieſe. Beſchreibt man nun aus dem Mittelpunkte einen Halbkreis, und errichtet da, wo beide gegebenen Linien an einander treffen, eine ſenkrechte Linie bis in die Peripherie des Kreiſes; ſo iſt dieſe die mittlere Proportionallinie. Es ſei z. B. a und e (Fig. 60.) gegeben, ſo iſt ae = a, ed = e und ad = a + e. Iſt nun c der Mittelpunkt des auf ad beſchriebenen Halbkreiſes, ſo iſt ef die mittlere Proportionallinie zwiſchen a und e.

Anmerkung.

Sind die Linien in Zahlen ausgedruͤckt, ſo findet man zu zwei gegebenen ebenfalls die mittlere geometriſche Proportionalzahl (§. 178. Arithmetik.).

§. 89.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufloͤſung.

Die Theilung eines Dreiecks geſchieht entweder durch Linien aus der Spitze auf die Grundlinie,

 oder

oder mit ſolchen, die mit irgend einer Seite parallel laufen; beide Arten können überdies mit, oder ohne Rechnung vorgenommen werden.

Erſter Fall: wenn ein Dreieck durch gerade Linien aus der Spitze auf die Grundlinie getheilt wird, Fig. 59. und zwar ohne Rechnung.

Man theile z. B. die Grundlinie ab des Dreiecks acb in 4 gleiche Theile, ziehe aus der Spitze c nach den Theilungspunkten 1, 2, 3 die Linien c 1, c 2, c 3, ſo iſt ac 1 = 1 c 2 = 2 c 3 = 3 c 4 und ihre Summe dem Ganzen gleich, und jedes der Dreiecke, wie ac 1, iſt der vierte Theil von acb; denn die Flächen dieſer Dreiecke verhalten ſich, wie ihre Grundlinien.

Zweiter Fall: wenn die Theilung durch Parallellinien ohne Rechnung vorgenommen wird, Fig. 61.

Man nehme eine Seite des Dreiecks, welche man will, hier ab, theile ſolche in ſo viel gleiche Theile, als das Dreieck getheilt werden ſoll, hier in 3 gleiche Theile bei d und e, ſo daß ad = de = eb. Sucht man hierauf zu ab als der ganzen Seitenlinie des Dreiecks und zu einem der gleichen Theile be nach §. 88, die mittlere Proportionallinie ſo hat man bf; ſucht man ferner zu ab und bd die mittlere Proportionallinie, ſo erhält man bg. Zieht man endlich durch f die Linie fh ∦ ac und durch g die Linie gi ∦ ac; ſo iſt das Dreieck in drei gleiche Theile fbh, fhgi und gaic getheilt.

Dritter Fall: wenn man die Theilung durch Rechnung vornimmt ſo, daß der Inhalt des Dreiecks in gleiche Theile getheilt wird.

Es ſoll z. B. die Fläche acb Fig. 59, deren Inhalt 900 Quadratruthen beträgt, in vier gleiche Theile getheilt

getheilt werden. Man mißt diejenige Seite des Dreiecks, auf welcher die Theilung aufgetragen werden ſoll, hier ab, und dieſe ſei 60 Ruthen lang. Dividirt man nun den Inhalt des Dreiecks mit der Theilungszahl, hier 4, ſo iſt $\frac{900}{4} = 225$ Quadratruthen der Inhalt jedes der gleichen Theile. Endlich ſchließt man:

$$900\,R^2 : 60\,R^2 = 225\,R^2 : x$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 9)\ 135\not{0}\not{0} \\ \not{0}\not{0} \end{array} \;\Big|\; 15\ \text{R. Länge}$$

So viel Ruthen Länge erhält jeder vierte Theil der Linie ab, die man von a nach b aufträgt und alsdenn aus c nach den Theilungspunkten gerade Linien zieht, wodurch auch die Figur in vier gleiche Theile getheilt wird.

§. 90.

Aufgabe.

Jedes Dreieck in eine beliebige Anzahl, aber ungleicher Theile zu theilen, Fig. 62.

Aufloſung.

Soll z. B. ein Forſt oder Wald unter eine gegebene Anzahl von Perſonen ſo getheilt werden, daß ſie alle ungleiche Theile erhalten, ſo wird bei dieſer Theilung die Geſellſchaftsregel (§. 220 der Arithmetik) zu Hülfe genommen.

Das Stück Waldung habe alſo die Geſtalt eines Dreiecks und halte 9000 R² Fläche. Davon ſoll A. 1600, B. 2000, C. 2100, D. 3300 R² erhalten; die Theilungslinie aber ſoll die Grundlinie ab des Dreiecks acb (Fig. 92.) ſeyn, und die Scheidungs- oder Gränzlinien ſollen von der Spitze c des Dreiecks, nach der Grundlinie ab gezogen werden. Wie viel wird nun jede der Perſonen auf ab Länge erhalten?

Geſetzt die Grundlinie wäre 600 R lang; ſo wäre die Berechnung folgende:

$$9000\ R^2 : 600\ R = A\ 1600 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 1600}{9000} = 106\ R\ 6\ F\ 6\tfrac{2}{3}\ Z$ für A.

$$9000\ R^2 : 600\ R = B.\ 2000 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 2000}{9000} = 133\ R\ 3\ F\ 3\tfrac{1}{3}\ Z$ für B.

$$9000\ R^2 : 600\ R = C.\ 2100 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 2100}{9000} = 140\ R$ für C.

$$9000\ R^2 : 600\ R = D\ 3300 : x$$

und es iſt $x = \frac{600 . 3300}{9000} = 220\ R$ für D.

Folglich werden auf der Grundlinie ab, $106^\circ\ 6'\ 6\tfrac{2}{3}''$ für A, von a nach 1; $133^\circ\ 3'\ 3\tfrac{1}{2}''$ für B, von 1 nach 2; 140° für C, von 2 nach 3; 220° für D, von 3 nach 4 aufgetragen, und die Theilungslinien c 1, c 2, c 3 gezogen, ſo erhält A das Dreieck c a 1; B das Dreieck c 1 2; C das Dreieck c 2 3; und D das Dreieck c 3 4 oder c 3 b.

§. 91.

Aufgabe.

Ein Dreieck auf ſeiner bekannten Höhe in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile ſo zu theilen, daß die Theilungslinien mit der Grundlinie des Dreiecks parallel laufen. Fig. 63.

Auflöſung.

1) Man quadrirt die Höhe cd des Dreiecks acb und dividirt die erhaltene Quadratzahl mit der Zahl der Theile, in welche das Dreieck getheilt werden ſoll.

2) Aus dem erhaltenen Quotienten zieht man die Quadratwurzel, ſo erhält man die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd aus c nach e für den erſten Theil ce aufgetragen werden müſſen.

3) Nun addirt man den erſten und zweiten Theil der quadrirten Höhe des Dreiecks, und zieht aus dieſer Summe die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd, aus c nach f für den zweiten Theil cf aufgetragen werden müſſen.

4) Endlich addirt man den erſten, zweiten und dritten Theil der quadrirten Höhe des Dreiecks, und zieht aus dieſer Summe die Quadratwurzel, ſo giebt dieſe die Anzahl Ruthen ꝛc., welche auf cd, aus c nach g für den dritten Theil cg aufgetragen werden müſſen.

In dem gegebenem Dreiecke acb (Fig. 63.) ſei die Höhe cd = 300 Ruthen.

Nach no. 1. $300 . 300 = 90000$; $90000 : 4 = 22500$;

Nach no. 2. $\sqrt{22500} = 150$ Ruthen, welche man von c nach e für den erſten Theil aufträgt.

Nach no. 3. $22500 . 2 = 45000$; $\sqrt{45000} = 212^\circ\ 1'\ 3''$, welche man von c nach f für den zweiten Theil aufträgt.

Nach no. 4. $22500 . 3 = 67500$; $\sqrt{67500} = 259^\circ\ 8'$, welche man von c nach g für den dritten Theil aufträgt.

Alſo kommen für den erſten Theil ce = 150°
" " zweiten — cf = 212° 1′ 3″
" " dritten — cg = 259° 8′
" " vierten — cd der Reſt.

Wer-

Werden nun die Theilungslinien durch die Punkte e, f, g parallel mit a b gezogen, ſo iſt die ganze Fläche in vier gleiche Theile getheilt.

Anmerkung.

Wäre das zu theilende Dreieck rechtwinklig, ſo würde die eine Perpendikularſeite die Höhe des Dreiecks, und man hätte nicht nöthig die Höhe zu ſuchen.

§. 92.

Aufgabe.

Ein Dreieck aus einem, auf einer gegebenen Seite liegenden Punkte, in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 64 und 65.

Auflöſung.

Es ſey das Dreieck a b c (Fig. 64.). Der Punkt, in welchen die Theilungslinien zuſammenſtoßen ſollen, ſey d auf der Seite a b. Das Dreieck werde aus dieſem Punkte in drei Theile getheilt.

1) Man meſſe a b, und a d, ſo wie die Seite b c.

2) Multiplicire a b mit b c und dividire das Produkt durch die Theilungszahl, hier 3.

3) Den gefundenen Quotienten dividire man mit dem Theile der Linie d b (der den Reſt vorſtellt, wenn man a d von a b ſubtrahirt, ſo giebt dieſer Quotient die Zahl der Ruthen ꝛc., welche von b nach e auf b c für den erſten Theil aufgetragen werden müſſen. Dieſer Theil des Dreiecks a b c iſt nun das Dreieck e d b.

4) Nun nimmt man den Quotienten, der nach n. 3 gefunden wird, doppelt, theilt das Produkt ebenfalls durch die Linie d b, ſo giebt auch dieſer Quotient, die Zahl der Ruthen ꝛc, die von b nach c, oder wenn es nicht angeht, von a nach f auf a c für den zweiten Theil auf-

aufgetragen werden, wobei man aber anſtatt b c die Linie a c, und anſtatt d b, die Linie a d ꝛc. in Rechnung bringen muß. Sollte ein Dreieck unter den erwähnten Bedingungen in 4, 5, 6 oder noch mehrere Theile getheilt werden; ſo würde man nach n. 4 ſo verfahren, daß man das 4, 5, 6 oder mehrfache ſuchte, und durch b d theilte, ſo hätte man auf dieſe Art den 4ten, 5ten, 6ten oder mehrfachen Theil, den man von b nach c auftragen könnte.

Kann man auf b c nicht alle gefundenen Theile tragen, ſo trägt man den 3ten, 4ten ꝛc. auf a c von a nach f (wie n. 4.) ꝛc. und ſo würde man überhaupt auf a c verfahren, wie man auf b c verfahren hat.

In dem zur Theilung gegebenen Dreiecke a c b (Fig. 64.), welches aus d in a b, in drei Theile getheilt werden ſoll, iſt $ab = 292^\circ$; $bc = 245^\circ$; $ad = 110^\circ$; $db = 182^\circ$; $ac = 226^\circ$.

Nun iſt nach n. 1, 2 und 3 $ab + bc = 71540$; $71540 : 3 = 23846$; $23846 : db$ oder $\frac{23846}{182} = 131^\circ$ für den erſten Theil auf b c, den man von b nach c aufträgt.

Nach n. 4. iſt $23846 . 2 = 47692$; $47692 : 182 = 262^\circ$ für den zweiten Theil. Da aber die Linie b c nur 245° iſt, ſo muß dieſer Theil auf die Linie a c von c nach f aufgetragen werden. Daher ſucht man dieſen Theil auf folgende Art:

Nach no. 1, 2 und 3 iſt $ab + ac = 66992$; $66992 : 3 = 22330$; $22330 : ad$, oder $\frac{22330}{110} = 203^\circ$. der nun gefundene zweite Theil, den man auf a c, von a nach f (n. 4.) aufträgt, in welchem Falle alsdenn der dritte Theil von ſelbſt übrig bleibt.

Folglich iſt nun das Dreieck a c b aus dem Punkte d in drei gleiche Theile getheilt, nämlich in das Dreieck

e d b,

edb, in den Trapezoides cfde, und in das Dreieck adf, welche unter ſich gleich ſind und zuſammen das Dreieck acb ausmachen.

Sollte man das Dreieck Fig. 65 aus d in ab aber nur in zwei Theile theilen, ſo nimmt man das vorige Produkt 71540 (aus n. 1 und 2.) dividirt ſolches durch 2, und verfährt übrigens wie vorhin.

71540:2 = 35771; 35771 : 182 = 196°, welche man aus b nach c auf bc in e aufträgt, und die Theilungslinie ed ziehet. Auf dieſe Art hat das Dreieck acb zwei gleiche Theile, nämlich das Dreieck edb und den Trapezoides adec erhalten.

§. 93.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine gewiſſe Anzahl Ruthen ꝛc. durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Winkel auf die gegenüberliegende Seite abzuſchneiden, Fig. 66.

Auflöſung.

Es ſei das Dreieck abc (Fig. 66.). Von dieſem ſoll man durch be, 3750 Quadratruthen abſchneiden.

Man ſucht

1) die Höhe des Dreiecks, oder die Perpendikularlinie bd, und mißt ſolche. Sie ſei 204°.

2) Dividirt man mit der Hälfte von bd, oder 102° den Inhalt des Dreiecks abc, oder 3750 R^2, ſo erhält man ae oder 36° 7′ 5″.

3) Dieſe erhaltene Linie ae = 36° 7′ 5″ trägt man nun auf ac von a nach e auf und zieht be, ſo iſt das abgeſchnittene Dreieck bae = 3750 Quadratruthen.

§. 94.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine vorgeſchriebene Anzahl Ruthen ꝛc. durch eine mit der einen Seite des Dreiecks gezogene Parallellinie abzuſchneiden, Fig. 67.

Auflöſung.

1) Man mißt die Perpendicularlinie aus b nach d, ſo wie auch die Grundlinie a c.

2) Multiplicirt a c mit $\frac{1}{2}$ b d; ſo erhält man den Inhalt des Dreiecks a b c (§. 83.).

3) Quadrirt b d, ſo hat man das Quadrat der Höhe. Nunmehr ſchließt man: Wie der Inhalt des ganzen Dreiecks zum Quadrat der Höhe, ſo verhält ſich auch die Zahl der Quadratruthen, welche von dieſem Dreiecke abgeſchnitten werden ſollen, zu dem Quadrate aus der Höhe desjenigen Dreiecks, welches die gegebene Anzahl Ruthen faſſen ſoll.

4) Aus der vierten Proportionalzahl zieht man die Quadratwurzel, ſo erhält man die Zahl der Ruthen, welche von b nach e auf der Höhe des Dreiecks abzumeſſen ſind.

Zieht man nun durch e eine Linie g f ⧣ a c, ſo faſſet das Dreieck g b f die vorgeſchriebene Anzahl Ruthen ꝛc.

Es ſollen z. B. vom Dreieck a b c (Fig. 67.), 3750 R^2 abgeſchnitten werden, und es ſei b d = 160°, a c = 316°.

$$\begin{array}{rl} ac = & 316 \\ \frac{1}{2}\,bd = & 80 \\ \hline 25280 & \end{array}$$

25280 Inhalt des Dreiecks a b c nach n. 1 und 2.

ac² = 160 . 160 = 25600 das Quadrat der Höhe n. 3.

Und

Und es iſt 25280 : 25600 = 3750 : x

x aber iſt = 3797 Quadrat der Höhe des abzuſchneidenden Dreiecks no. 3.

$\sqrt{3797} = 61° 6' 1'' 9'''$ die Höhe des abzuſchneidenden Dreiecks, oder be.

Trägt man von b aus dieſe 61° 6′ 1″ 9‴ nach e, ſo iſt das Dreieck gbf = 3750 Quadratruthen.

§. 95.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine gewiſſe Anzahl Ruthen durch eine Linie aus einem Punkte, der auf einer der Seiten des Dreiecks liegt, abzuſchneiden, Fig. 68.

Auflöſung.

Soll man z. B. 3750 Ruthen von dem Dreiecke abc (Fig. 68.) ſo abſchneiden, daß der Punkt d auf der Grundlinie ac liegt, und ſoll die Theilungslinie ſo gezogen werden, daß ſie bc trifft, ſo verfahre man auf folgende Art:

1) Man fällt aus dem Punkte d auf die entgegengeſetzte Seite bc eine Perpendikularlinie de.

2) Nun mißt man de und dividirt mit ihrer Hälfte die abzuſchneidende Anzahl Ruthen ꝛc.

3) Der ſo erhaltene Quotient iſt die Zahl der Ruthen ꝛc., die man auf bc, von c nach f auftragen muß. Wird endlich

4) df gezogen, ſo enthält das abgeſchnittene Dreieck dfc die gegebene Anzahl Ruthen ꝛc.

Es ſei de = 190°; $\frac{1}{2}$ de = 95°

3750 : 95 = 39° 4′ 7″ 3‴ = cf, und es iſt der Inhalt des Dreiecks dfc = 3750 R^2.

Anmer-

Anmerkung.

Die mehreſten dieſer Rechnungen geben das Geſuchte nur beinahe an, weil die Diviſionen entweder gar nicht aufgehen, oder ſo weit fortgeſetzt werden müßten, daß man Größen oder Abmeſſungen erhielte, die durch kein verjüngtes Maß mehr aufgetragen werden können. In den Stellen, in welchen die Rechnungen abgekürzt ſind, haben die noch fehlenden Abmeſſungen entweder gar keinen, oder doch nur einen unbeträchtlichen Einfluß auf die Richtigkeit einer Größenbeſtimmung. Wie genau man rechnen muß, wenn die zu ſuchende Größe nicht völlig erhalten werden kann, müſſen die Umſtände zeigen.

II.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vierecke.

§. 96.

Bei den Vierecken iſt ſo, wie bei den Dreiecken, die Ausmeſſung derjenigen Stücke, welche ein Viereck beſtimmen, die Berechnung des Inhalts und die Theilung nach gewiſſen Bedingungen merkwürdig. Alle Parallelogramme ergeben ſich, wenn man auf die Winkel keine Rückſicht nimmt, aus den Grundlinien und Höhen, ſo wie ein Trapezium aus den beiden parallelen Seiten und der Höhe; Vierecke überhaupt aber, wenn man ſie durch Diagonalen in zwei Dreiecke theilt, und dieſe haben alsdenn die Abmeſſungen, oder Grundlinie und Höhe in den Theilen mit den Dreiecken, die dieſe Theile ausmachen, gemein.

§. 97.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen Seite ein Quadrat zu zeichnen, Fig. 69.

Auflöſung.

Es ſei ab die gegebene Seite (Fig. 69.).

Man errichte in a auf ab eine ſenkrechte Linie ac (§. 53.) und mache ac = ab. Mit ac macht man aus c einen Bogen, der aus b mit ab = ac in d geſchnitten wird. Zieht man nun cd und bd, ſo iſt abcd das verlangte Quadrat.

§. 98.

Aufgabe.

Aus zwei ungleich großen geraden Linien ac und ab ein Oblongum oder långliches Viereck zu zeichnen, Fig. 70.

Auflöſung.

Man ſchneidet beide Linien ac und ab (Fig. 70.) rechtwinklig, ſo iſt ac Grundlinie und ab Höhe. Aus b mit ac macht man einen Bogen, ſo wie aus c mit ab, ſo ſchneiden ſich dieſe Bogen in d. Zieht man überdies bd und cd, ſo iſt abcd das verlangte Oblongum.

§. 99.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Seite und einem Winkel, eine Raute oder ein verſchobenes Quadrat zu zeichnen, Fig. 71.

Auflöſung.

Es ſei ab die Seite, a der Winkel (Fig. 71.).

Man zeichne an die gerade Linie ab in a den gegebenen Winkel a (§. 51.), und mache den Schenkel ac = ab. Mit ab = ac beſchreibe man aus c einen Bogen, und aus b ebenfalls mit ab = ac. Beide ſchneiden ſich in

d.

d. Ziehet man cd und bd, ſo iſt abcd die verlangte Raute.

§. 100.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Seiten nebſt dem Winkel, den dieſe einſchließen, eine längliche Raute, oder ein verſchobenes längliches Viereck zu zeichnen, Fig. 72.

Auflöſung.

Man zeichne an eine der gegebenen Seiten, etwa ab als Grundlinie, den Winkel a, und mache ac der zweiten gegebenen Seite gleich. Mit ab mache man aus c einen Bogen, ſo wie aus b mit ac, ſo ſchneiden ſich dieſe Bogen in d. Zieht man nun cb und bd, ſo iſt abcd die verlangte längliche Raute.

Anmerkung.

In dieſen Zeichnungsarten der Parallelogramme liegen zugleich die Regeln, welche man befolgen muß, wenn Parallelogramme auf dem Felde gemeſſen oder auf das Feld aufgetragen werden ſollen. So mißt man bei der Aufnahme eines Quadrats nur eine Seite, bei dem länglichen Vierecke Grundlinie und Höhe, alſo zwei Seiten; nimmt man aber eine Raute oder eine längliche Raute auf, ſo muß man bei der erſten einen Winkel und eine daranliegende Seite, bei der andern aber einen Winkel und die beiden einſchließenden Seiten meſſen. Demnach kann man Quadrate und längliche Vierecke ohne Winkelmeſſer, bloß mit der Kette meſſen; Rauten und längliche Rauten hingegen müſſen zum Theil mit dem Winkelmeſſer, zum Theil mit der Kette gemeſſen und aufgetragen werden.

§. 101.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie (§. 25.) in zwei gleiche Dreiecke getheilt; demnach iſt die Summe aller Winkel in jedem Parallelogramme

logramme 2 mal 2 R oder 2.180°, d. i. vier rechte Winkel, oder 360°. Auch ſind die einander gegenüberſtehenden Winkel gleich, und man kann daher jeden Winkel eines Parallelogramms durch Rechnung finden, wenn nur einer bekannt iſt. Da in den rechtwinkeligen Parallelogrammen alle vier Winkel rechte ſind, ſo hat man bei dieſen keine Rechnung nöthig. Iſt aber in einem ſchiefwinkeligen Parallelogramme ein Winkel, wie z. B. a Fig. 72, 45°, ſo iſt der gegenüberſtehende d ebenfalls 45°, folglich beide zuſammen $2 \cdot 45 = 90°$. Da nun alle vier Winkel $a + b + c + d = 360°$, ſo iſt $(360 - 90) = 270°$ die Summe von $c + b$. Nun iſt $c = b$, alſo $c = \frac{270}{2} = 135° = b$.

§. 102.

Aufgabe.

Aus vier gegebenen geraden Linien und einem Winkel, ein Trapezoid zu zeichnen, Fig. 73.

Auflöſung.

Es ſei ab, cd, ac, bc und der Winkel a gegeben, mit der Bedingung, daß ab der cd, und folglich ac der bd gegenüberſtehen ſoll.

Man nehme eine von den vier gegebenen Linien, hier ab zur Grundlinie an, zeichne an ab in a den gegebenen Winkel a, und trage auf den zweiten Schenkel die Linie ac. Mit cd beſchreibt man aus c einen Bogen, und aus b mit be ſchneidet man den vorigen in f. Zieht man alsdenn cf und bf, ſo iſt abcf der verlangte Trapezoid.

Anmerkung.

Hieraus ſieht man deutlich, wie ein Trapez gezeichnet werden müſſe, worin zwei einander entgegengeſetzte Seiten parallel ſind. Iſt z. B. Fig. 76. der Winkel a an ab gezeichnet, und hat man ac ſeiner Länge nach beſtimmt,

ſtimmt, ſo wird durch c mit ab die Parallellinie cd gezogen. Iſt auch die Länge dieſer Seite gegeben, ſo ergiebt ſich die vierte Seite db von ſelbſt; daher hat man zu einem Trapez nur einen Winkel und drei bekannte Seiten nöthig.

§. 103.

Jedes Viereck wird durch eine Diagonallinie (§. 25.) in zwei Dreiecke getheilt, ſo daß die Summe der Winkel in den Dreiecken der Summe der Winkel des Vierecks gleich iſt. Da nun jedes Dreieck in der Summe aller Winkel 2 R oder 180° faſſet, ſo beträgt die Summe aller Winkel in jedem Vierecke 2. 180 oder 360°, d. i. vier rechte Winkel.

Anmerkung.

Auch hier kann man die Zeichnungsart der Vierecke als Methoden betrachten, wie man auf dem Felde dergleichen Vierecke mißt, oder wenn die zu ihrer Beſtimmung nöthigen Stücke gegeben ſind, ſolche auf dem Felde auftragen kann.

§. 104.

Da das Quadrat als Maß zur Ausmeſſung aller Flächen gebraucht wird, ſo kann man ſich hier von dem überzeugen, was theils in der Arithmetik von dem zehntheiligen Flächenmaße (§. 93. u. §. 206.), theils in der Geometrie (§. 82.), erwähnt worden iſt. Iſt nämlich die Länge eines Quadrats (Fig. 74.) eine Ruthe oder 10 Fuß im Längenmaße, ſo iſt der Inhalt 100 Quadratfuße, und ſo bei allen folgenden kleinern zehntheiligen Maßflächen. Daher hat die Quadratruthe 100 Quadratfuße, der Quadratfuß 100 Quadratzolle, der Quadratzoll 100 Quadratlinien ꝛc. Verbindet man nun hiermit die Vortheile der Verwandelung durch Hülfe der Decimalbrüche, ſo wird man begreifen, warum man das Quadrat als Maßfläche, und unter den möglichen Eintheilungen, gerade die zehntheilige gewählt hat.

§. 105.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Quadrats zu finden, Fig. 69.

Auflöſung.

Man meſſe eine Seite des Quadrats nach Ruthen, Fußen ꝛc. und mache davon die Quadratzahl, d. i. man multiplicire ſie mit ſich ſelbſt. Dies Produkt oder die Quadratzahl giebt den Inhalt im Quadratmaße von eben demſelben Namen, von welchem man die Seite gefunden hat.

Iſt z. B. ab (Fig. 69) 4° 5′ 6″ = 456″ Decimallängenmaß, ſo iſt 456 . 456 = 20° 79′ 36″ Quadratmaß oder 20 R^2 79 F^2 36 Z^2.

Anmerkung.

Zieht man aus dem Inhalte des Quadrats die Quadratwurzel $\sqrt{207936\ Z^2} = 456''$, ſo giebt die Wurzel 456″ oder 4 R 5 F 6 Z wiederum die Seite des Quadrats. Hiernach rechtfertigen ſich die Begriffe von Quadratzahlen und Quadratwurzeln in der Arithmetik Kap. 6. Abſchnitt 2. 3.

§. 106.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Oblongum oder länglichen Vierecks zu finden, Fig. 70.

Auflöſung.

Man meſſe die Grundlinie ac und die Höhe ab, multiplicire ſie in einander, ſo giebt das Produkt den verlangten Inhalt des Oblongum abcd.

Es ſei ac = 724″; ab = 345″, ſo iſt 724 × 345 = 249780″ oder 24 R² 97 F² 80 Z² der Inhalt.

Auch findet man aus dem Inhalte und der Grundlinie, wenn man die letztere in den Inhalt dividirt, die Höhe; aus dem Inhalte und der Höhe aber, die Grundlinie, wenn die Höhe in den Inhalt dividirt wird.

Es ſei der Inhalt 249780 Z²; die Grundlinie ac = 724 Z; alſo 249780 : 724 = 345 Z die Höhe; dividirt man aber 249780 durch 345, ſo iſt der Quotient 724 Z die Grundlinie.

§. 107.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Raute und einer länglichen Raute zu finden, Fig. 71 und 72.

Auflöſung.

Man nehme in beiden Figuren 71 und 72, die Seite ab für die Grundlinie an und fälle aus der Spitze c die ſenkrechte Linie ce, ſo hat man die Höhe. Das Produkt der Grundlinie in die Höhe giebt in beiden Figuren den Inhalt.

Es ſei z. B. ab = 456″; ce = 398″.

```
      398
     ----
     3648
    4104
   1368
  -------
  181488″ oder 18 R² 14 F² 88 Z²
```

Inhalt.

§. 108.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Trapezoids zu finden, Fig. 75.

Aufloſung.

Man ziehe in abcd (Fig. 75.) eine Diagonallinie ad, ſo hat man den Trapezoid in zwei Dreiecke getheilt, worin ad als gemeinſchaftliche Grundlinie für beide Dreiecke acb und abd angeſehen werden kann. Fällt man aus der Spitze c des Dreiecks acb die ſenkrechte Linie ce, und aus b des Dreiecks abd die ſenkrechte df, ſo hat man die Höhen beider Dreiecke. Sucht man nun den Inhalt jedes dieſer Dreiecke nach §. 83. und addirt dieſe Inhalte, ſo giebt die Summe den Inhalt des Trapezoids abcd.

Es ſei $ad = 33°$; $ce = 17°$; $bf = 18°$:

ſo iſt $\frac{33 \cdot 17}{2} = 2180\,R^2\,5\,F^2 = \triangle\, acb.$

und $33 \cdot 9 = 297\,R = \triangle\, abd.$

folglich $577\,R^2\,5\,F^2$ = der Fläche oder dem Inhalte des Trapezoids.

Oder, man multiplicirt die halbe Summe der beiden Höhen mit der Diagonallinie (jetzt gemeinſchaftliche Grundlinie), ſo hat man ebenfalls den Inhalt des Trapezoids, alſo $\frac{1}{2}(ce + bf) \cdot ad = abcd$.

Es iſt $\frac{1}{2} ce = 85'$; $\frac{1}{2} bf = 90'$, alſo

$$85 + 90 + = 175' = \tfrac{1}{2}(ce + bf)$$
$$330' = ad$$
$$5250$$
$$525$$
$$57750' \text{ oder } 577\,R^2\,5\,F^2,$$

welches mit dem vorigen Inhalte des Trapezoids abcd übereinſtimmt. Auch kann man die halbe Diagonallinie mit der Summe beider Höhen multipliciren, und man erhält ebenfalls den Inhalt (§. 83.)

Anmer-

Anmerkung.

Auf eben dieſe Art kann man auch ein Trapez ausrechnen. Auch findet man den Inhalt eines Trapez, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten (denn dadurch iſt das Trapez vom Trapezoid verſchieden) mit der Höhe multiplicirt. Es ſei z. B. (Fig. 76.) ab die eine, cd aber die andere parallele Seite und ce die Höhe, ſo iſt der Inhalt $= \frac{1}{2}(ab + cd) . ce$. Iſt $ab = 24'$; $cd = 20'$; $ce = 8'$, ſo iſt $\frac{1}{2} ab = 12'$; $\frac{1}{2} cd = 10'$, folglich $\frac{1}{2}(ab + cd) = 22'$,

und $22' = \frac{1}{2}(ab + cd)$
$8 = ce$

176 oder 1 R^2 76 F^2 der Inhalt des Trapez abcd

Auch kann man die Summe beider parallelen Seiten mit der halben Höhe multipliciren, um den Inhalt des Trapez zu erhalten.

§. 109.

Was die Theilung der Parallelogramme in eine gegebene Anzahl gleicher Theile betrifft, unter der Bedingung, daß die Theilungslinien mit zwei Seiten parallel laufen, ſo hat dieſe keine Schwierigkeit, weil man nur entweder die Grundlinien, oder die Höhen in ſo viele gleiche Theile theilen darf, als verlangt wird, uud mit den beiden andern Seiten oder mit der Höhe Parallellinien zu ziehen nöthig hat.

Wollte man z. B. das Parallelogramm abcd Fig. 76 in drei gleiche Theile theilen, ſo theilte man die Linie ab oder die gegenüberſtehende Grundlinie dc in eben ſo viel Theile, wie bei 1 und 2, und zöge durch die Theilungspunkte Parallellinien mit ad oder bc und jeder dadurch abgeſchnittene Theil wäre der dritte Theil des Ganzen. Daß man auf eine ähnliche Art bei allen Parallelogrammen verfahren müßte, bedarf keines weitern Unterrichts.

§. 110.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm aus einem gegebenen Punkte, der in einer Seitenlinie liegt, in zwei gleiche Theile zu theilen, Fig. 77.

Auflöſung.

Es ſei das Parallelogramm abce (Fig. 77.) und in der Seitenlie ab, der Theilungspunkt d gegeben. Man meſſe ad und mache auf der entgegengeſetzten Seite ce, die Linie ef = ad, und ziehe df, ſo iſt abcf = dbfe, und jedes dieſer Trapezien iſt die Hälfte des gegebenen Parallelogramms abce.

Oder man zieht, wie in Fig. 77* im Parallelogramme abcd die Diagonalen ad und bc, und leget durch beider Durchſchnittspunkt g eine gerade Linie, in welche Lage gegen die Seitenlinien des Parallelogramms man will, wie hier f, ſo wird in jedem Falle abcd in zwei gleiche Theile getheilt. Hier iſt aecf = ebfd, aber auch △ abd = △ cbd, ſo wie auch △ cab = △ cdb.

§. 111.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm in eine gegebene Anzahl ungleicher Theile ſo zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer, folglich auch mit der, jener entgegengeſetzten Seite parallel laufen, Fig. 78.

Auflöſung.

Sollte man z. B. die Theilung ſo einrichten, daß 3 Perſonen A, B und C ſich ſo theilen, daß B noch einmal ſo viel als A, und C noch einmal ſoviel als B erhielte, ſo müßten

müßten die Abtheilungen auf der Seitenlinie, auf welcher die Theilungspunkte geſucht werden ſollten, nach der Regel Detri (§. 176.) beſtimmt werden.

Der Inhalt der zu theilenden Fig. 78. ſei 15120 R^2 und die Grundlinie oder Länge des Parallelogramms ſei 360 R; nun aber ſollte A, 2160 R^2 zu ſeinem Antheile haben; folglich B, $2 . 2160 = 4320$ R^2; C aber $2 . 4320$ oder 8640 R^2. Wie viel müßte man auf ab für A, B und C abſchneiden, daß der Inhalt jedes Parallelogramms, deren Höhen gleich ſind, ſo groß würde, als die vorgeſchriebenen Zahlen?

Man ſetze:

$$15120 : 360 = 2160 : x$$

und es iſt $x = \frac{360 \,.\, 2160}{15120} = 51^{\circ}\, 4^{\prime}\, 2^{\prime\prime}\, 8^{\prime\prime\prime} \ldots$ für A auf ab, welche Länge man von a nach A auf ab aufträgt, und mit der, der Grundlinie des Parallelogramms entgegengeſetzten Seitenlinie, eine Parallellinie zieht, welches die Theilungslinie durch A für den Antheil des A iſt. Da nun B zweimal ſoviel als A von der Fläche erhalten ſoll, und alle Umſtände die vorigen ſind, ſo trage man von A nach B auf ab für B, $2 . 51428^{\prime\prime\prime}$ oder $102^{\circ}\, 8^{\prime}\, 5^{\prime\prime}\, 6^{\prime\prime\prime}$ auf. Der Reſt des Parallelogramms iſt nun doppelt ſo groß als der Antheil des B, folglich muß auch die Grundlinie von B bis C auf ab doppelt ſo groß, als die Grundlinie für den Antheil B, oder AB ſeyn; alſo $2 . 102856^{\prime\prime\prime}$ oder $205^{\circ}\, 7^{\prime}\, 1^{\prime\prime}\, 2^{\prime\prime\prime}$, welche man von B nach C nachmeſſen kann.

§. 112.

Aufgabe.

Ein Trapezoid oder überhaupt ein Viereck in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 79.

Auf-

Auflöſung.

Es ſei das Viereck abcd (Fig. 79.) gegeben.

Zieht man die Diagonallinien ac und bd, theilt bd in e in zwei gleiche Theile, zieht durch e mit ac eine Parallellinie ef und von f nach a die Linie af, ſo hat man in af die Theilungslinie, und es iſt das Dreieck afd = dem Trapezoid abcf.

Sollte das gegebene Viereck abcd in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo dürfte man nur das Dreieck afd ſowohl als den Trapezoid abermals halbiren, ſo würde jede dieſer Hälften den vierten Theil des ganzen Vierecks abcd angeben. Hieraus läßt ſich leicht begreifen, wie man in dieſem Fall das Ganze in 8, 16, 32 ꝛc. gleiche Theile theilen könnte.

Oder: Man berechnet den Inhalt der ganzen Fläche des Vierecks abcd (Fig. 80) und zieht das kleinere Dreieck abc von dem halben Inhalt des Vierecks abcd ab: ſo erhält man den Inhalt eines Dreiecks, welches von dem Dreiecke bac weggenommen, und dem Dreiecke abc zugeſetzt werden muß, um zwei gleiche Theile des Vierecks zu erhalten. Nimmt man daher ac zur Grundlinie an, und ſucht des Dreiecks Höhe (§. 85.), zieht in der Weite der gefundenen Höhe mit ad eine Parallellinie, und bemerkt den Punkt f, wo dieſe ab ſchneidet, und zieht nun fc, ſo ſind die beiden Theile fbc und fabc einander gleich.

Es ſei z. B. ac = 365′; de = 150′; ab = 192′:
ſo iſt ac . $\frac{1}{2}$ de = 365 . 75 = 27375 F^2 = △ ade.
und ac . $\frac{1}{2}$ ab = 365 . 96 = 35040 F^2 = △ abc.

addirt 62415 F^2 = abcd.

2) 31207 F^2 = $\frac{1}{2}$ abcd
27375 F^2 = △ ade

ſubtrahirt 3832 die Differenz.

Nun

Nun iſt ac aber 365 : 2 = 182 = $\frac{1}{2}$ ac oder die halbe Grundlinie des Dreiecks, welches noch von abc weggenommen, und adc zugeſetzt werden muß.

Der Inhalt dieſes Dreiecks iſt 3832 F^2; 3832 : 182 giebt 21 F oder af, welche auf der Linie ab als der Höhe des Dreiecks afc von a nach f aufgetragen werden müſſen.

§. 113.

Aufgabe.

Ein Trapez in eine vorgeſchriebene Anzahl Theile zu theilen, Fig. 81 und 82.

Aufloͤſung.

Es ſei das Trapez abcd (Fig. 81); ad = 96° und bc = 60°. Soll die Figur in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo theile man die beiden parallelen Seiten, jede für ſich, ſo wohl ad, als auch bc in 4 gleiche Theile, und ziehe die Theilungslinien durch die geſuchten Punkte, ſo iſt die Theilung verrichtet, und jeder Theil der vierte von abcd.

Oder: man dividirt die Zahlen der beiden Parallellinien, alſo ad = 96°, und bc = 60° durch die Theilungszahl 4; ſo bekommt man auf ad, nämlich $\frac{96}{4} = 24°$, auf bc aber $\frac{60}{4} = 15°$. Trägt man jede dieſer erhaltenen Zahlen auf die ihr zugehörige Theilungslinie viermal auf, ſo hat man ebenfalls abcd in vier gleiche Theile getheilt.

Sollte die Theilung nicht in gleiche Theile geſchehen, ſo könnte man die jedem Theile zukommende Länge ſo wohl auf ad, als auch auf bc auſtragen, und die Theilungslinien

linien ziehen. Oder man könnte, wenn abcd Fig. 82 ein Gehölze wäre, welches in ungleichen Theilen unter A, B, C, D und E getheilt werden ſollte, die Theilung auch auf dieſe Art vornehmen.

Es ſei die Fläche abcd (Fig. 82) = 37170 R^2 und ab = 370 R, cd = 306 R und die Bedingung der Theilung ſo, daß B noch einmal ſo viel als A, C zwei und ein halbmal ſo viel, als A; D dreimal ſoviel als A, und E nur halb ſo viel als A bekomme. Man berechnet, wie groß eines jeden Antheil an Quadratruthen ſei, und nun kann man die Länge jedes Stücks auf ab und auf ac abmeſſen, die Theilungspunkte beſtimmen und die Scheidelinien ziehen.

Zuvörderſt muß man ſuchen, wie viel jeder Theilnehmer am Ganzen habe. Da nun E nur halb ſo viel als A erhalten ſoll, ſo bekömmt E unter allen Theilnehmern den kleinſten Theil; dieſer ſei unterdeſſen = x. Nach dieſer Vorausſetzung iſt alſo

$$\begin{array}{rcl} E &=& 1x \\ A &=& 2x \\ B &=& 4x \\ C &=& 5x \\ D &=& 6x \\ \hline E+A+B+C+D &=& 18x. \end{array}$$

Nun betragen 18x = 37170 R
 18x = 18x dividirt

alſo iſt der Antheil x od. für E = 2065 Quadratruthen.

Alſo bekommt E	=	1x	von der ganzen Fläche	2065 R^2
A	=	2x	— — — —	4130 —
B	=	4x	— — — —	8260 —
C	=	5x	— — — —	10325 —
D	=	6x	— — — —	12390 —
E + A + B + C + D	=			37170 R^2,

welches der Inhalt der ganzen Fläche iſt.

Soll

Soll eines jeden Antheil durch Theilungspunkte auf ab und cd bemerkt werden, ſo theile man beide Linien, jede für ſich, in 18 gleiche Theile, und gebe jeder Abtheilung ſo viel $\frac{1}{18}$, als ihr zukommen, welche man auf folgende Art ſindet:

$$18x : ab = 370^\circ : x$$

alſo iſt $x = 20\frac{5}{9}$ R für E auf ab.

$$18x : cd = 306^\circ : x$$

alſo iſt $x = 17$ R für E auf cd.

Auf dieſe Art fährt man fort, die Längen auf ab ſo wohl als auf cd für A, B, C und D zu berechnen.

$x = 20\frac{5}{9}$ R für E auf ab	$x = 17$ R für E auf cd
$2x = 41\frac{1}{9}$ R — A — —	$2x = 34$ R — A — —
$4x = 82\frac{2}{9}$ R — B — —	$4x = 68$ R — B — —
$5x = 102\frac{7}{9}$ R — C — —	$5x = 85$ R — C — —
$6x = 12\frac{3}{9}$ R — D — —	$6x = 102$ R — D — —
S. = 370 R welche die ganze Länge von ab ausmachen.	S. = 306 R welche die ganze Länge von cd ausmachen.

Die ſo gefundenen Längen werden nun auf ab und cd aufgetragen, und die Theilungspunkte markirt.

§. 114.

Aufgabe.

Von einem Trapezoid oder einem Vierecke eine gegebene Anzahl Acker oder Quadratruthen ꝛc. abzuſchneiden, Fig 83.

Auflöſung.

Das Viereck ſei abcd (Fig. 83). Von dieſem ſollen 12000 Quadratfuß und zwar ſo abgeſchnitten werden, daß

daß die Theilungslinie eine ſenkrechte Linie zwiſchen a b und a d ſei.

1) Man verlängere die Linien b c und a d, bis ſie ſich (da ſie nicht parallel ſind) irgend wo, etwa in e ſchneiden, ſo daß aus a b c d das Dreieck c e d wird.

2) Man fället aus b auf die Grundlinie dieſes Dreiecks, hier auf e d eine ſenkrechte Linie b f, mißt ſowohl b f = 148′, als auch e f = 440′ und a e = 480′ und berechnet den Inhalt beider Dreiecke b a e und b f e.

3) Hierauf ſchließt man:

Wie △ b f e : Quadrate der Grundlinie e f = △ b a e + 12000 F^2 : Quadrate der Grundlinie e g.

4) Aus dem gefundenen Quadrate der Linie e g, zieht man die Quadratwurzel, und ſubtrahirt von der Länge derſelben die Linie a e, ſo giebt der Reſt die Größe von a g.

Errichtet man endlich aus

5) g auf d eine ſenkrechte Linie g h, ſo ſondert dieſe die vorgeſchriebenen 12000 F^2 von dem Vierecke ab.

Die Berechnung iſt folgende:

b f = 148′; e f = 440′; a e = 480′

Nach n. 2. iſt b f = 148′	Nach n. 2. b f = 148′
$\frac{1}{2}$ e f = 220	$\frac{1}{2}$ a e = 240′
2960	5920
296	296
△ b f e = 32560 F^2	△ b a e = 35520

Nach

Nach n. 3. $32560\,F^2 : 440^2 = (35520 + 12000)\,F^2 : eg^2$

440	47520
17600	1936 00
176	28512000
193600	14256
	42768
	4752
32560)	9199872000 | 281937 F².

Nach n. 4. $\sqrt{281937} = 5309''$

$4800''\ ae = 480'$

$509'' = 50'9'' = ag.$

Trägt man nun von a bis g die Länge von 50′9″ auf und errichtet gh ſenkrecht, ſo enthält das Viereck agbh die vorgeſchriebenen 12000 Quadratfuß.

Wollte man aber dieſe 12000 Quadratfuß von der Seite dc in das Viereck abcd hineinmeſſen und abtheilen, ſo berechnet man.

1) Das ganze Viereck abcd und ſubtrahirt von der Summe die vorgeſchriebenen 12000 F².

2) Den erhaltenen Reſt nimmt man nun anſtatt der 12000 F² und verfährt übrigens wie vorhin, ſo bleibt das Stück, deſſen Inhalt 12000 F² beträgt, an der Seite bc übrig, oder iſt an dieſer Seite abgeſchnitten.

Es ſei ac = 326′; di = 220′ und bk = 130′.

220 = di
130 = bk

$\frac{1}{2}$ ac = 163 . 350 = 57050 F² das ganze Viereck abcd
12000 F² nach n. 1.

45050 Reſt

Nach n. 2. $32560 F^2 : 193600 = \underbrace{35520 + 45050}_{80570} : eg^2$

$$\begin{array}{r} 8057\ \ 0 \\ \hline 13552000 \\ 9680 \\ 15488 \\ \hline 32560)\ 15598352000 \mid 509777\ F^2 \end{array}$$

$$\sqrt{509777} = 71398'''$$
$$\begin{array}{r} 48000''' = ae = 480' \\ \hline 23398''' = 233'9''8''' = ag. \end{array}$$

Trägt man auch hier von a nach g die Länge von $233'9''8'''$ auf und errichtet gh ſenkrecht, ſo enthält das △ ghd die vorgeſchriebenen 12000 Quadratfuß.

Anmerkung.

Auſſer dieſen nothwendigſten Theilungen der Vierecke, giebt es noch eine Menge andere, die aber theils zu weitläuftig, theils für den gegenwärtigen Zweck nicht brauchbar genug ſind. Jede andere vorgeſchriebene Theilung irgend eines Vierecks läßt ſich dadurch am leichteſten bewerkſtelligen, daß man die Vierecke in Dreiecke zerlegt, alsdenn mit einander vergleicht und die Theilung auf dieſem Wege vornimmt. Da dieſe Fälle auch bei den vielſeitigen Figuren vorkommen, ſo wird vorzüglich im praktiſchen Theile davon Gebrauch gemacht werden.

III.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vielecke.

§. 115.

Eine vielſeitige Figur oder ein Vieleck iſt entweder gleichſeitig oder ungleichſeitig. Gleichſeitige Figuren aber haben auch gleiche Winkel an den Peripherien, und deswegen nennt man ſie insbeſondere reguläre

Viel-

Vielecke oder reguläre Polygone. Dergleichen Polygone trifft man zwar ſelten in der Natur und vielleicht am wenigſten auf Forſtrevieren an; indeß, da es ſich zutragen kann, daß man Luſtplätze in Wäldern, ſo wie Jagdhäuſer zu Vergnügungsörtern in der Geſtalt der regulären Polygone anlegt, von welchen aus Durchſichten in den Wald gemacht werden müſſen, die ihren Grund im der Form ſolcher Gebäude haben, ſo muß man ſich wenigſtens in Allgemeinen mit den regulären Polygonen von 5, 6 und mehrern Seiten bekannt machen.

§. 116.

Alle regulären Polygone, alſo ſolche, die gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, werden entweder in oder um Kreiſe gezeichnet. Die erſtern nennt man innere, die letztern aber äußere Polygone. Der Mittelpunkt des Kreiſes iſt zugleich der Mittelpunkt des Polygons, welches in oder um dieſen Kreis gezeichnet wird. Die Seiten der innern Polygone ſind Sehnen des Kreiſes, und die Seiten der äußern Tangenten, oder Berührungslinien. Unter der Summe aller Seiten eines Polygons verſteht man deſſen Peripherie oder Umfang, die bei den innern kürzer, bei den äußern Polygonen aber länger iſt als die Kreisperipherie, wenn man die letztere in eine gerade Linie verwandelt. Eben dieſe Vergleichung findet auch bei den Flächen oder dem Inhalt der regulären Polygone mit derjenigen Kreisfläche ſtatt, in oder um deren Peripherie ſolche Polygone gezeichnet werden. Die Fläche eines innern Polygons iſt kleiner, die Fläche eines äußern hingegen größer, als die Kreisfläche; jedoch kommmen Peripherien ſo wohl, als Flächen, der Kreisperipherie und der Kreisfläche näher und näher, je mehr die Polygone Seiten haben, ohne daß je ein Polygon angegeben werden könnte, deſſen Peripherie und Fläche eben ſo groß wäre, als die Peripherie und Fläche des Kreiſes.

Da die äußern Polygone innere werden, wenn man aus dem Mittelpunkte um ſie eine Kreislinie ſo beſchreibt, daß ſie durch alle Winkelſpitzen geht, ſo iſt es genug, wenn man ſich zum gegenwärtigen Zwecke nur mit den innern Polygonen bekannt macht. Folgende Stücke ſind auſſer den genannten noch in jedem Polygone merkwürdig: die Polygonwinkel, das ſind ſolche, deren Spitzen in der Kreisperipherie liegen, und deren Schenkel Seiten des Polygons, alſo Sehnen des Kreiſes ſind; die Centriwinkel oder ſolche, die ihre Spitze im Mittelpunkt des Polygons, folglich auch im Mittelpunkte des Kreiſes haben, und dann entſtehen, wenn man aus jeden zwei nächſten Winkelſpitzen Halbmeſſer des Kreiſes zieht. Der größte Halbmeſſer des regulären innern Polygons iſt zugleich der Halbmeſſer des Kreiſes, und geht von den Winkelſpitzen bis in den Mittelpunkt; der kleinſte Halbmeſſer hingegen iſt die Entfernung jeder Polygonſeite vom Mittelpunkte.

Alle regulären Polygone ſind dann in Kreiſe zu zeichnen möglich, wenn man entweder ihre Polygon- oder ihre Centriwinkel zu finden weiß, und die erſten in die Peripherie, die letztern aber an den Mittelpunkt des Kreiſes zu zeichnen im Stande iſt. Da hier keine vollkommene geometriſche Strenge zu beobachten nöthig iſt, ſo werden die folgenden Lehren genügen, die erſten praktiſchen Kenntniſſe von den Polygonen zu erläutern.

§. 117.

Aufgabe.

Den Centriwinkel ſowohl, als auch den Polygonwinkel, wie auch die Summe aller Polygonwinkel in einem regulären Polygone zu finden.

Auf-

Auflöſung.

1) Man dividire mit der Anzahl der Seiten des Polygons in die Anzahl der Grade der ganzen Kreisperipherie, ſo giebt der Quotient den Centriwinkel des Polygons (§. 16.)

2) Subtrahirt man den ſo gefundenen Centriwinkel von 180° als der Summe aller Winkel jedes Dreiecks, alſo auch des Dreiecks, welches beide Halbmeſſer, die den Centriwinkel machen, und eine Seite des Polygons einſchließen, ſo giebt der Reſt die Zahl der Grade ꝛc. des Polygonwinkels (§. 16).

Beiſpiele.

Wie groß iſt der Centriwinkel ſo wohl als der Polygonwinkel im regulären Fünfecke?

$$5) \; 360 \,|\, 72° \text{ der Centriwinkel.}$$
$$\underline{35}$$
$$10$$

$$180° - 72° = 108° \text{ der Polygonwinkel.}$$

Wie groß iſt der Centriwinkel ſo wohl als der Polygonwinkel im regulären Sechsecke?

$$6) \; 360 \,|\, 60° \text{ der Centriwinkel.}$$
$$\underline{36}$$

$$180° - 60° = 120° \text{ der Polygonwinkel.}$$

3) Die Summe aller Winkel in einem jeden regulären Polygone findet man entweder, wenn man den gefundenen Polygonwinkel mit der Zahl der Seiten multiplicirt; oder, wenn man zwei rechte Winkel oder 180° ſo vielmal nimmt, als das Polygon Seiten hat, und vom Produkte 4 rechte Winkel oder 360° ſubtrahirt.

Beiſpiele.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Fünfecke?

180° der Polygonwinkel
5 die Zahl der Seiten
540 die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 108° die Grade zweier rechten Winkel
5 tie Zahl der Seiten
900°
360° die Grade von 4 rechten Winkeln
540° die Summe aller Polygonwinkel.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Sechsecke?

120° der Polygonwinkel
6 die Zahl der Seiten
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 180°
6
1080°
360°
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Bezeichnet R den rechten Winkel, und n die Anzahl der Seiten des Polygons, ſo iſt allgemein jeder Centriwinkel $\frac{4R}{n}$; jeder Polygonwinkel aber $2R - \frac{4R}{n}$ und die Summe aber Polygonwinkel im n Ecke $(2n - 4)R$.

Anmerkung.

Da die Centriwinkel ſo wohl als die Polygonwinkel der regulären Vielecke theils dazu dienen, dergleichen Figuren in Kreiſe zu zeichnen, theils auf dem Felde

abzu-

abzuſtecken, und die Summe aller Winkel im Umfange dazu gebraucht werden kann, die Richtigkeit der Vermeſſung einer Figur aus dem Umfange zu prüfen, ſo folgt am Schluſſe dieſes Lehrbuches eine Tabelle, worin man die Polygonwinkel und die Summe aller Winkel am Umfange eines regulären Polygons findet. Die Centriwinkel fehlen zwar, indeß kann man ſie leicht aus den Polygonwinkeln finden, wenn man nämlich dieſe von 180° ſubtrahirt.

§. 118.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ab ein reguläres Polygon von ſo viel Seiten, als man will, zu zeichnen, (Fig. 84. 85 und 86).

Auflöſung.

1) Man ſuche den Polygonwinkel des verlangten Polygons (§. 117.), und zeichne dieſen in a (§. 51.).

2) Hierauf mache man ac = ab, und beſchreibe durch a, b und c eine Kreislinie (§. 63.), faſſe ac = ab in den Zirkel, und trage ſie als Sehne in der Kreislinie ſo oft fort, als es angehet, ſo iſt das Polygon vollendet.

Oder:

Man trägt in a und b, (Fig. 85.) alſo in jeden dieſer Punkte den halben Polygonwinkel, ſo werden ſich die Schenkel deſſelben ac = bc als Seiten eines gleichſchenkligen Dreiecks acb in c ſchneiden, und der Durchſchnittspunkt iſt ſowohl des Polygons als auch des Kreiſes Mittelpunkt. Beſchreibt man nun aus c mit ac = bc eine Kreislinie, ſo kann man die gegebene Seite ab darin herumtragen.

Oder:

Man nimmt die gegebene Linie ab Fig. 86. als Halbmeſſer an, und beſchreibt mit demſelben einen Kreis trägt um den Mittelpunkt den Centriwinkel des Polygons (§. 117.) acb, ſo viel mal herum, als es möglich iſt, verlängert die Schenkel bis an die Peripherie, ſo hat man zugleich die Polygonſeiten ab ꝛc. weil nur die Sehnen von Theilungspunkt zu Theilungspunkt gezogen werden dürfen.

Im regulären Sechsecke (Fig. 85.) iſt die Seite ab dem größten Halbmeſſer ac gleich. Da nun der Halbmeſſer des Kreiſes eben ſo groß, und 6 mal in der dazugehörigen Peripherie enthalten iſt, ſo kann man durch bloßes Herumtragen des Halbmeſſers ein reguläres Sechseck zeichnen.

Anmerkung 1.

Iſt in einem Kreiſe ein reguläres Sechseck abgetheilt, und man verbindet den erſten und dritten, ferner den dritten und fünften, und endlich den fünften und erſten Theilungspunkt, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes gleichſeitiges Dreieck. Halbirt man hingegen die Bogen des Sechsecks, und verbindet die Theilungspunkte durch Sehnen, ſo entſteht ein reguläres Zwölfeck. Hieraus ergiebt ſich, wie das reguläre Vier und Zwanzigeck, das Acht und Vierzigeck ꝛc. zu zeichnen möglich iſt, ohne daß man den Transporteur zur Zeichnung irgend eines Winkels im Polygon nöthig hat, und wodurch die Zeichnungen viel genauer werden. Die Reihe der ſo gezeichneten Polygone iſt 3, 6, 12, 24, 48, 96 ꝛc.

Schneidet man den Kreis durch zwei Durchmeſſer rechtwinkelig, und verbindet die Durchſchnittspunkte in der Peripherie durch Sehnen, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes Quadrat. Werden die Bogen des Quadrats halbirt, ſo entſteht ein reguläres Achteck, und durch wiederholtes Halbiren ein Sechzehneck, Zwey und Dreißigeck ꝛc. kurz: man erhält durch dieſes Verfahren eine Reihe von Polygonen 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc.

Ver-

Vergleicht man beide Reihen, ſo fehlen die regulären Polygone von 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 ꝛc. Seiten, die man nur nach dem hier gegebenen Unterrichte mit Hülfe des Transporteurs zeichnen kann, wenn man die Bogen der Kreislinie nicht mechaniſch durch bloßes Probiren ſuchen will.

Anmerkung 2.

Um dem ganz mechaniſchen Verfahren ſo wohl, als dem Gebrauche des Transporteurs auszuweichen, kann man die regulären Polygone auch auf folgende Art in Kreiſe zeichnen. Man beſtimme den Durchmeſſer des Kreiſes und theile dieſen in ſo viel gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben ſoll; halbire dieſen Durchmeſſer und beſchreibe aus dem Mittelpunkte den Kreis. Auf den Durchmeſſer zeichne man überdies ein gleichſeitiges Dreieck, ziehe durch die Spitze deſſelben und den zweiten Theilungspunkt des Durchmeſſers die gerade Linie, welche die Peripherie des Kreiſes auf der andern Seite des Durchmeſſers ſchneidet und ziehe endlich die Sehne des Bogens, deſſen Länge der Anfangspunkt und der erwähnte Durchſchnitt beſtimmt. Dieſe Sehne iſt die Seite des verlangten regulären Polygons. Trägt man ſie in der Kreisperipherie fort und vollendet die Sehnen, ſo iſt das Polygon gezeichnet.

Geometriſche Richtigkeit hat zwar dieſe Konſtruktion nicht, aber im Praktiſchen, wenn man nur genau zeichnet, ſo viel Brauchbarkeit, als man verlangt. Sie heißt von ihrem Erfinder Renaldinus, die Renaldiniſche Methode.

§. 119.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden regulären Polygons zu finden, Fig. 87.

Auflöſung.

Da ein jedes reguläre Polygon aus dem Mittelpunkte des Kreiſes, in welchem es beſchrieben iſt, in ſo viele

Werden nun die Theilungslinien durch die Punkte e, f, g parallel mit a b gezogen, ſo iſt die ganze Fläche in vier gleiche Theile getheilt.

Anmerkung.

Wäre das zu theilende Dreieck rechtwinklig, ſo würde die eine Perpendikularſeite die Höhe des Dreiecks, und man hätte nicht nöthig die Höhe zu ſuchen.

§. 92.

Aufgabe.

Ein Dreieck aus einem, auf einer gegebenen Seite liegenden Punkte, in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 64 und 65.

Auflöſung.

Es ſey das Dreieck a b c (Fig. 64.). Der Punkt, in welchen die Theilungslinien zuſammenſtoßen ſollen, ſey d auf der Seite a b. Das Dreieck werde aus dieſem Punkte in drei Theile getheilt.

1) Man meſſe a b, und a d, ſo wie die Seite b c.

2) Multiplicire a b mit b c und dividire das Produkt durch die Theilungszahl, hier 3.

3) Den gefundenen Quotienten dividire man mit dem Theile der Linie d b (der den Reſt vorſtellt, wenn man a d von a b ſubtrahirt, ſo giebt dieſer Quotient die Zahl der Ruthen ꝛc., welche von b nach e auf b c für den erſten Theil aufgetragen werden müſſen. Dieſer Theil des Dreiecks a b c iſt nun das Dreieck e d b.

4) Nun nimmt man den Quotienten, der nach n. 3 gefunden wird, doppelt, theilt das Produkt ebenfalls durch die Linie d b, ſo giebt auch dieſer Quotient, die Zahl der Ruthen ꝛc, die von b nach c, oder wenn es nicht angeht, von a nach f auf a c für den zweiten Theil auf-

aufgetragen werden, wobei man aber anſtatt b c die Linie a c, und anſtatt d b, die Linie a d ꝛc. in Rechnung bringen muß. Sollte ein Dreieck unter den erwähnten Bedingungen in 4, 5, 6 oder noch mehrere Theile getheilt werden; ſo würde man nach n. 4 ſo verfahren, daß man das 4, 5, 6 oder mehrfache ſuchte, und durch b d theilte, ſo hätte man auf dieſe Art den 4ten, 5ten, 6ten oder mehrfachen Theil, den man von b nach c auftragen könnte.

Kann man auf b c nicht alle gefundenen Theile tragen, ſo trägt man den 3ten, 4ten ꝛc. auf a c von a nach f (wie n. 4.) ꝛc. und ſo würde man überhaupt auf a c verfahren, wie man auf b c verfahren hat.

In dem zur Theilung gegebenen Dreiecke a c b (Fig. 64.), welches aus d in a b, in drei Theile getheilt werden ſoll, iſt $ab = 292°$; $bc = 245°$; $ad = 110°$; $db = 182°$; $ac = 226°$.

Nun iſt nach n. 1, 2 und 3 $ab + bc = 71540$; $71540 : 3 = 23846$; $23846 : db$ oder $\frac{23846}{182} = 131°$ für den erſten Theil auf b c, den man von b nach c aufträgt.

Nach n. 4. iſt $23846 . 2 = 47692$; $47692 : 182 = 262°$ für den zweiten Theil. Da aber die Linie b c nur 245° iſt, ſo muß dieſer Theil auf die Linie a c von c nach f aufgetragen werden. Daher ſucht man dieſen Theil auf folgende Art:

Nach no. 1, 2 und 3 iſt $ab + ac = 66992$; $66992 : 3 = 22330$; $22330 : ad$, oder $\frac{22330}{110} = 203°$. der nun gefundene zweite Theil, den man auf a c, von a nach f (n. 4.) aufträgt, in welchem Falle alsdenn der dritte Theil von ſelbſt übrig bleibt.

Folglich iſt nun das Dreieck a c b aus dem Punkte d in drei gleiche Theile getheilt, nämlich in das Dreieck

e d b,

edb, in den Trapezoides cfde, und in das Dreieck adf, welche unter ſich gleich ſind und zuſammen das Dreieck acb ausmachen.

Sollte man das Dreieck Fig. 65 aus d in ab aber nur in zwei Theile theilen, ſo nimmt man das vorige Produkt 71540 (aus n. 1 und 2.) dividirt ſolches durch 2, und verfährt übrigens wie vorhin.

71540 : 2 = 35771; 35771 : 182 = 196°, welche man aus b nach c auf bc in e aufträgt, und die Theilungslinie ed ziehet. Auf dieſe Art hat das Dreieck acb zwei gleiche Theile, nämlich das Dreieck edb und den Trapezoides adec erhalten.

§. 93.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine gewiſſe Anzahl Ruthen ꝛc. durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Winkel auf die gegenüberliegende Seite abzuſchneiden, Fig. 66.

Auflöſung.

Es ſei das Dreieck abc (Fig. 66.). Von dieſem ſoll man durch be, 3750 Quadratruthen abſchneiden.

Man ſucht

1) die Höhe des Dreiecks, oder die Perpendikularlinie bd, und mißt ſolche. Sie ſei 204°.

2) Dividirt man mit der Hälfte von bd, oder 102° den Inhalt des Dreiecks abc, oder 3750 R^2, ſo erhält man ae oder 36° 7′ 5″.

3) Dieſe erhaltene Linie ae = 36° 7′ 5″ trägt man nun auf ac von a nach e auf und zieht be, ſo iſt das abgeſchnittene Dreieck bae = 3750 Quadratruthen.

§. 94.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine vorgeſchriebene Anzahl Ruthen ꝛc. durch eine mit der einen Seite des Dreiecks gezogene Parallellinie abzuſchneiden, Fig. 67.

Auflöſung.

1) Man mißt die Perpendicularlinie aus b nach d, ſo wie auch die Grundlinie a c.

2) Multiplicirt a c mit $\frac{1}{2}$ b d; ſo erhält man den Inhalt des Dreiecks a b c (§. 83.).

3) Quadrirt b d, ſo hat man das Quadrat der Höhe. Nunmehr ſchließt man: Wie der Inhalt des ganzen Dreiecks zum Quadrat der Höhe, ſo verhält ſich auch die Zahl der Quadratruthen, welche von dieſem Dreiecke abgeſchnitten werden ſollen, zu dem Quadrate aus der Höhe desjenigen Dreiecks, welches die gegebene Anzahl Ruthen faſſen ſoll.

4) Aus der vierten Proportionalzahl zieht man die Quadratwurzel, ſo erhält man die Zahl der Ruthen, welche von b nach e auf der Höhe des Dreiecks abzumeſſen ſind.

Zieht man nun durch e eine Linie g f ⋕ a c, ſo faſſet das Dreieck g b f die vorgeſchriebene Anzahl Ruthen ꝛc.

Es ſollen z. B. vom Dreieck a b c (Fig. 67.), 3750 R^2 abgeſchnitten werden, und es ſei b d = 160°, a c = 316°.

$$
\begin{array}{rl}
ac = & 316 \\
\frac{1}{2}\, bd = & 80 \\
\hline
& 25280
\end{array}
$$

25280 Inhalt des Dreiecks abc nach n. 1 und 2.

$ac^2 = 160 \,.\, 160 = 25600$ das Quadrat der Höhe n. 3.

Und

Und es iſt 25280 : 25600 = 3750 : x

x aber iſt = 3797 Quadrat der Höhe des abzuſchneidenden Dreiecks no. 3.

$\sqrt{3797} = 61°6'1''9'''$ die Höhe des abzuſchneidenden Dreiecks, oder b e.

Trägt man von b aus dieſe 61°6'1''9''' nach e, ſo iſt das Dreieck g b f = 3750 Quadratruthen.

§. 95.

Aufgabe.

Von einem Dreiecke eine gewiſſe Anzahl Ruthen durch eine Linie aus einem Punkte, der auf einer der Seiten des Dreiecks liegt, abzuſchneiden, Fig. 68.

Auflöſung.

Soll man z. B. 3750 Ruthen von dem Dreiecke a b c (Fig. 68.) ſo abſchneiden, daß der Punkt d auf der Grundlinie a c liegt, und ſoll die Theilungslinie ſo gezogen werden, daß ſie b c trifft, ſo verfahre man auf folgende Art:

1) Man fällt aus dem Punkte d auf die entgegengeſetzte Seite b c eine Perpendikularlinie d e.

2) Nun mißt man d e und dividirt mit ihrer Hälfte die abzuſchneidende Anzahl Ruthen ꝛc.

3) Der ſo erhaltene Quotient iſt die Zahl der Ruthen ꝛc., die man auf b c, von c nach f auftragen muß. Wird endlich

4) d f gezogen, ſo enthält das abgeſchnittene Dreieck d f c die gegebene Anzahl Ruthen ꝛc.

Es ſei d e = 190°; $\frac{1}{2}$ d e = 95°

3750 : 95 = 39° 4' 7'' 3''' = c f, und es iſt der Inhalt des Dreiecks d f c = 3750 R^2.

Anmer-

Anmerkung.

Die mehreſten dieſer Rechnungen geben das Geſuchte nur beinahe an, weil die Diviſionen entweder gar nicht aufgehen, oder ſo weit fortgeſetzt werden müßten, daß man Größen oder Abmeſſungen erhielte, die durch kein verjüngtes Maß mehr aufgetragen werden können. In den Stellen, in welchen die Rechnungen abgekürzt ſind, haben die noch fehlenden Abmeſſungen entweder gar keinen, oder doch nur einen unbeträchtlichen Einfluß auf die Richtigkeit einer Größenbeſtimmung. Wie genau man rechnen muß, wenn die zu ſuchende Größe nicht völlig erhalten werden kann, müſſen die Umſtände zeigen.

II.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vierecke.

§. 96.

Bei den Vierecken iſt ſo, wie bei den Dreiecken, die Ausmeſſung derjenigen Stücke, welche ein Viereck beſtimmen, die Berechnung des Inhalts und die Theilung nach gewiſſen Bedingungen merkwürdig. Alle Parallelogramme ergeben ſich, wenn man auf die Winkel keine Rückſicht nimmt, aus den Grundlinien und Höhen, ſo wie ein Trapezium aus den beiden parallelen Seiten und der Höhe; Vierecke überhaupt aber, wenn man ſie durch Diagonalen in zwei Dreiecke theilt, und dieſe haben alsdenn die Abmeſſungen, oder Grundlinie und Höhe in den Theilen mit den Dreiecken, die dieſe Theile ausmachen, gemein.

§. 97.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen Seite ein Quadrat zu zeichnen, Fig. 69.

Aufloͤſung.

Es ſei ab die gegebene Seite (Fig. 69.).

Man errichte in a auf ab eine ſenkrechte Linie ac (§. 53.) und mache ac = ab. Mit ac macht man aus c einen Bogen, der aus b mit ab = ac in d geſchnitten wird. Zieht man nun cd und bd, ſo iſt abcd das verlangte Quadrat.

§. 98.

Aufgabe.

Aus zwei ungleich großen geraden Linien ac und ab ein Oblongum oder laͤngliches Viereck zu zeichnen, Fig. 70.

Aufloͤſung.

Man ſchneidet beide Linien ac und ab (Fig. 70.) rechtwinklig, ſo iſt ac Grundlinie und ab Hoͤhe. Aus b mit ac macht man einen Bogen, ſo wie aus c mit ab, ſo ſchneiden ſich dieſe Bogen in d. Zieht man uͤberdies bd und cd, ſo iſt abcd das verlangte Oblongum.

§. 99.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Seite und einem Winkel, eine Raute oder ein verſchobenes Quadrat zu zeichnen, Fig. 71.

Aufloͤſung.

Es ſei ab die Seite, a der Winkel (Fig. 71.).

Man zeichne an die gerade Linie ab in a den gegebenen Winkel a (§. 51.), und mache den Schenkel ac = ab. Mit ab = ac beſchreibe man aus c einen Bogen, und aus b ebenfalls mit ab = ac. Beide ſchneiden ſich in

d.

d. Ziehet man cd und bd, ſo iſt abcd die verlangte Raute.

§. 100.

Aufgabe.

Aus zwei gegebenen Seiten nebſt dem Winkel, den dieſe einſchließen, eine längliche Raute, oder ein verſchobenes längliches Viereck zu zeichnen, Fig. 72.

Auflöſung.

Man zeichne an eine der gegebenen Seiten, etwa ab als Grundlinie, den Winkel a, und mache ac der zweiten gegebenen Seite gleich. Mit ab mache man aus c einen Bogen, ſo wie aus b mit ac, ſo ſchneiden ſich dieſe Bogen in d. Zieht man nun cb und bd, ſo iſt abcd die verlangte längliche Raute.

Anmerkung.

In dieſen Zeichnungsarten der Parallelogramme liegen zugleich die Regeln, welche man befolgen muß, wenn Parallelogramme auf dem Felde gemeſſen oder auf das Feld aufgetragen werden ſollen. So mißt man bei der Aufnahme eines Quadrats nur eine Seite, bei dem länglichen Vierecke Grundlinie und Höhe, alſo zwei Seiten; nimmt man aber eine Raute oder eine längliche Raute auf, ſo muß man bei der erſten einen Winkel und eine daranliegende Seite, bei der andern aber einen Winkel und die beiden einſchließenden Seiten meſſen. Demnach kann man Quadrate und längliche Vierecke ohne Winkelmeſſer, bloß mit der Kette meſſen; Rauten und längliche Rauten hingegen müſſen zum Theil mit dem Winkelmeſſer, zum Theil mit der Kette gemeſſen und aufgetragen werden.

§. 101.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie (§. 25.) in zwei gleiche Dreiecke getheilt; demnach iſt die Summe aller Winkel in jedem Paralle-

logramme 2 mal 2 R oder 2.180°, d. i. vier rechte Winkel, oder 360°. Auch ſind die einander gegenüberſtehenden Winkel gleich, und man kann daher jeden Winkel eines Parallelogramms durch Rechnung finden, wenn nur einer bekannt iſt. Da in den rechtwinkeligen Parallelogrammen alle vier Winkel rechte ſind, ſo hat man bei dieſen keine Rechnung nöthig. Iſt aber in einem ſchiefwinkeligen Parallelogramme ein Winkel, wie z. B. a Fig. 72, 45°, ſo iſt der gegenüberſtehende d ebenfalls 45°, folglich beide zuſammen $2 \cdot 45 = 90°$. Da nun alle vier Winkel $a + b + c + d = 360°$, ſo iſt $(360 - 90) = 270°$ die Summe von $c + b$. Nun iſt $c = b$, alſo $c = \frac{270}{2}$ $= 135° = b$.

§. 102.

Aufgabe.

Aus vier gegebenen geraden Linien und einem Winkel, ein Trapezoid zu zeichnen, Fig. 73.

Auflöſung.

Es ſei ab, cd, ac, bc und der Winkel a gegeben, mit der Bedingung, daß ab der cd, und folglich ac der bd gegenüberſtehen ſoll.

Man nehme eine von den vier gegebenen Linien, hier ab zur Grundlinie an, zeichne an ab in a den gegebenen Winkel a, und trage auf den zweiten Schenkel die Linie ac. Mit cd beſchreibt man aus c einen Bogen, und aus b mit be ſchneidet man den vorigen in f. Zieht man alsdenn cf und bf, ſo iſt abcf der verlangte Trapezoid.

Anmerkung.

Hieraus ſieht man deutlich, wie ein Trapez gezeichnet werden müſſe, worin zwei einander entgegengeſetzte Seiten parallel ſind. Iſt z. B. Fig. 76. der Winkel a an ab gezeichnet, und hat man ac ſeiner Länge nach beſtimmt,

ſtimmt, ſo wird durch c mit ab die Parallellinie cd gezogen. Iſt auch die Länge dieſer Seite gegeben, ſo ergiebt ſich die vierte Seite db von ſelbſt; daher hat man zu einem Trapez nur einen Winkel und drei bekannte Seiten nöthig.

§. 103.

Jedes Viereck wird durch eine Diagonallinie (§. 25.) in zwei Dreiecke getheilt, ſo daß die Summe der Winkel in den Dreiecken der Summe der Winkel des Vierecks gleich iſt. Da nun jedes Dreieck in der Summe aller Winkel 2 R oder 180° faſſet, ſo beträgt die Summe aller Winkel in jedem Vierecke 2. 180 oder 360°, d. i. vier rechte Winkel.

Anmerkung.

Auch hier kann man die Zeichnungsart der Vierecke als Methoden betrachten, wie man auf dem Felde dergleichen Vierecke mißt, oder wenn die zu ihrer Beſtimmung nöthigen Stücke gegeben ſind, ſolche auf dem Felde auftragen kann.

§. 104.

Da das Quadrat als Maß zur Ausmeſſung aller Flächen gebraucht wird, ſo kann man ſich hier von dem überzeugen, was theils in der Arithmetik von dem zehntheiligen Flächenmaße (§. 93. u. §. 206.), theils in der Geometrie (§. 82.), erwähnt worden iſt. Iſt nämlich die Länge eines Quadrats (Fig. 74.) eine Ruthe oder 10 Fuß im Längenmaße, ſo iſt der Inhalt 100 Quadratfuße, und ſo bei allen folgenden kleinern zehntheiligen Maßflächen. Daher hat die Quadratruthe 100 Quadratfuße, der Quadratfuß 100 Quadratzolle, der Quadratzoll 100 Quadratlinien ꝛc. Verbindet man nun hiermit die Vortheile der Verwandelung durch Hülfe der Decimalbrüche, ſo wird man begreifen, warum man das Quadrat als Maßfläche, und unter den möglichen Eintheilungen, gerade die zehntheilige gewählt hat.

§. 105.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Quadrats zu finden, Fig. 69.

Aufloͤſung.

Man meſſe eine Seite des Quadrats nach Ruthen, Fußen ꝛc. und mache davon die Quadratzahl, d. i. man multiplicire ſie mit ſich ſelbſt. Dies Produkt oder die Quadratzahl giebt den Inhalt im Quadratmaße von eben demſelben Namen, von welchem man die Seite gefunden hat.

Iſt z. B. ab (Fig. 69) $4^{\circ}\,5'\,6'' = 456''$ Decimallängenmaß, ſo iſt $456 \cdot 456 = 20^{\circ}\,79'\,36''$ Quadratmaß oder 20 R^2 79 F^2 36 Z^2.

Anmerkung.

Zieht man aus dem Inhalte des Quadrats die Quadratwurzel $\sqrt{207936\ Z^2} = 456''$, ſo giebt die Wurzel $456''$ oder 4 R 5 F 6 Z wiederum die Seite des Quadrats. Hiernach rechtfertigen ſich die Begriffe von Quadratzahlen und Quadratwurzeln in der Arithmetik Kap. 6. Abſchnitt 2. 3.

§. 106.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Oblongum oder länglichen Vierecks zu finden, Fig. 70.

Aufloͤſung.

Man meſſe die Grundlinie ac und die Höhe ab, multiplicire ſie in einander, ſo giebt das Produkt den verlangten Inhalt des Oblongum abcd.

Es

Es ſei ac = 724''; ab = 345'', ſo iſt 724 × 345 = 249780'' oder 24 R^2 97 F^2 80 Z^2 der Inhalt.

Auch findet man aus dem Inhalte und der Grundlinie, wenn man die letztere in den Inhalt dividirt, die Höhe; aus dem Inhalte und der Höhe aber, die Grundlinie, wenn die Höhe in den Inhalt dividirt wird.

Es ſei der Inhalt 249780 Z^2; die Grundlinie ac = 724 Z; alſo 249780 : 724 = 345 Z die Höhe; dividirt man aber 249780 durch 345, ſo iſt der Quotient 724 Z die Grundlinie.

§. 107.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Raute und einer länglichen Raute zu finden, Fig. 71 und 72.

Auflöſung.

Man nehme in beiden Figuren 71 und 72, die Seite ab für die Grundlinie an und fälle aus der Spitze c die ſenkrechte Linie ce, ſo hat man die Höhe. Das Produkt der Grundlinie in die Höhe giebt in beiden Figuren den Inhalt.

Es ſei z. B. ab = 456''; ce = 398''

```
     398
   -----
    3648
   4104
  1368
  ------
  181488'' oder 18 R² 14 F² 88 Z²
                   Inhalt.
```

§. 108.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Trapezoids zu finden, Fig. 75.

Auflöſung.

Man ziehe in abcd (Fig. 75.) eine Diagonallinie ad, ſo hat man den Trapezoid in zwei Dreiecke getheilt, worin ad als gemeinſchaftliche Grundlinie für beide Dreiecke acb und abd angeſehen werden kann. Fällt man aus der Spitze c des Dreiecks acb die ſenkrechte Linie ce, und aus b des Dreiecks abd die ſenkrechte df, ſo hat man die Höhen beider Dreiecke. Sucht man nun den Inhalt jedes dieſer Dreiecke nach §. 83. und addirt dieſe Inhalte, ſo giebt die Summe den Inhalt des Trapezoids abcd.

Es ſei ad $= 33^\circ$; ce $= 17^\circ$; bf $= 18^\circ$:

ſo iſt $\frac{33 \cdot 17}{2} = 2180\ R^2\ 5\ F^2 = \triangle$ acb.

und $33 \cdot 9 = 297\ R \quad = \triangle$ abd.

folglich $577\ R^2\ 5\ F^2 =$ der Fläche oder dem Inhalte des Trapezoids.

Oder, man multiplicirt die halbe Summe der beiden Höhen mit der Diagonallinie (jetzt gemeinſchaftliche Grundlinie), ſo hat man ebenfalls den Inhalt des Trapezoids, alſo $\frac{1}{2}(ce + bf) \cdot ad =$ abcd.

Es iſt $\frac{1}{2} ce = 85'$; $\frac{1}{2} bf = 90'$, alſo

$$85 + 90 + = 175' = \tfrac{1}{2}(ce + bf)$$
$$330' = ad$$
$$5250$$
$$525$$
$$57750' \text{ oder } 577\ R^2\ 5\ F^2,$$

welches mit dem vorigen Inhalte des Trapezoids abcd übereinſtimmt. Auch kann man die halbe Diagonallinie mit der Summe beider Höhen multipliciren, und man erhält ebenfalls den Inhalt (§. 83.)

Anmer-

Anmerkung.

Auf eben dieſe Art kann man auch ein Trapez ausrechnen. Auch findet man den Inhalt eines Trapez, wenn man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten (denn dadurch iſt das Trapez vom Trapezoid verſchieden) mit der Höhe multiplicirt. Es ſei z. B. (Fig. 76.) ab die eine, cd aber die andere parallele Seite und ce die Höhe, ſo iſt der Inhalt $= \frac{1}{2}(ab + cd) . ce$. Iſt $ab = 24'$; $cd = 20'$; $ce = 8'$, ſo iſt $\frac{1}{2} ab = 12'$; $\frac{1}{2} cd = 10'$, folglich $\frac{1}{2}(ab + cd) = 22'$,

und $22' = \frac{1}{2}(ab + cd)$
$8 = ce$

176 oder $1 R^2\ 76 F^2$ der Inhalt des Trapez abcd

Auch kann man die Summe beider parallelen Seiten mit der halben Höhe multipliciren, um den Inhalt des Trapez zu erhalten.

§. 109.

Was die Theilung der Parallelogramme in eine gegebene Anzahl gleicher Theile betrifft, unter der Bedingung, daß die Theilungslinien mit zwei Seiten parallel laufen, ſo hat dieſe keine Schwierigkeit, weil man nur entweder die Grundlinien, oder die Höhen in ſo viele gleiche Theile theilen darf, als verlangt wird, uud mit den beiden andern Seiten oder mit der Höhe Parallellinien zu ziehen nöthig hat.

Wollte man z. B. das Parallelogramm abcd Fig. 76 in drei gleiche Theile theilen, ſo theilte man die Linie ab oder die gegenüberſtehende Grundlinie dc in eben ſo viel Theile, wie bei 1 und 2, und zöge durch die Theilungspunkte Parallellinien mit ad oder bc und jeder dadurch abgeſchnittene Theil wäre der dritte Theil des Ganzen. Daß man auf eine ähnliche Art bei allen Parallelogrammen verfahren müßte, bedarf keines weitern Unterrichts.

§. 110.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm aus einem gegebenen Punkte, der in einer Seitenlinie liegt, in zwei gleiche Theile zu theilen, Fig. 77.

Auflöſung.

Es ſei das Parallelogramm abce (Fig. 77.) und in der Seitenlie ab, der Theilungspunkt d gegeben. Man meſſe ad und mache auf der entgegengeſetzten Seite ce, die Linie ef = ad, und ziehe df, ſo iſt abcf = dbfe, und jedes dieſer Trapezien iſt die Hälfte des gegebenen Parallelogramms abce.

Oder man zieht, wie in Fig. 77* im Parallelogramme abcd die Diagonalen ad und bc, und leget durch beider Durchſchnittspunkt g eine gerade Linie, in welche Lage gegen die Seitenlinien des Parallelogramms man will, wie hier f, ſo wird in jedem Falle abcd in zwei gleiche Theile getheilt. Hier iſt aecf = ebfd, aber auch △ abd = △ cbd, ſo wie auch △ cab = △ cdb.

§. 111.

Aufgabe.

Jedes Parallelogramm in eine gegebene Anzahl ungleicher Theile ſo zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer, folglich auch mit der, jener entgegengeſetzten Seite parallel laufen, Fig. 78.

Auflöſung.

Sollte man z. B. die Theilung ſo einrichten, daß 3 Perſonen A, B und C ſich ſo theilen, daß B noch einmal ſo viel als A, und C noch einmal ſoviel als B erhielte, ſo müßten

müßten die Abtheilungen auf der Seitenlinie, auf welcher die Theilungspunkte geſucht werden ſollten, nach der Regel Detri (§. 176.) beſtimmt werden.

Der Inhalt der zu theilenden Fig. 78. ſei 15120 R^2 und die Grundlinie oder Länge des Parallelogramms ſei 360 R; nun aber ſollte A, 2160 R^2 zu ſeinem Antheile haben; folglich B, $2 . 2160 = 4320$ R^2; C aber $2 . 4320$ oder 8640 R^2. Wie viel müßte man auf ab für A, B und C abſchneiden, daß der Inhalt jedes Parallelogramms, deren Höhen gleich ſind, ſo groß würde, als die vorgeſchriebenen Zahlen?

Man ſetze:

$$15120 : 360 = 2160 : x$$

und es iſt $x = \frac{360 . 2160}{15120} = 51^{0} 4^{I} 2^{II} 8^{III} \ldots$ für A auf ab, welche Länge man von a nach A auf ab aufträgt, und mit der, der Grundlinie des Parallelogramms entgegengeſetzten Seitenlinie, eine Parallellinie zieht, welches die Theilungslinie durch A für den Antheil des A iſt. Da nun B zweimal ſoviel als A von der Fläche erhalten ſoll, und alle Umſtände die vorigen ſind, ſo trage man von A nach B auf ab für B, $2 . 51428^{III}$ oder $102^{0} 8^{I} 5^{II} 6^{III}$ auf. Der Reſt des Parallelogramms iſt nun doppelt ſo groß als der Antheil des B, folglich muß auch die Grundlinie von B bis C auf ab doppelt ſo groß, als die Grundlinie für den Antheil B, oder AB ſeyn; alſo $2 . 102856'''$ oder $205^{0} 7' 1'' 2'''$, welche man von B nach C nachmeſſen kann.

§. 112.

Aufgabe.

Ein Trapezoid oder überhaupt ein Viereck in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 79.

Auf-

Aufloſung.

Es ſei das Viereck abcd (Fig. 79.) gegeben.

Zieht man die Diagonallinien ac und bd, theilt bd in e in zwei gleiche Theile, zieht durch e mit ac eine Parallellinie ef und von f nach a die Linie af, ſo hat man in af die Theilungslinie, und es iſt das Dreieck afd = dem Trapezoid abcf.

Sollte das gegebene Viereck abcd in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo dürfte man nur das Dreieck afd ſowohl als den Trapezoid abermals halbiren, ſo würde jede dieſer Hälften den vierten Theil des ganzen Vierecks abcd angeben. Hieraus läßt ſich leicht begreifen, wie man in dieſem Fall das Ganze in 8, 16, 32 ꝛc. gleiche Theile theilen könnte.

Oder: Man berechnet den Inhalt der ganzen Fläche des Vierecks abcd (Fig. 80) und zieht das kleinere Dreieck abc von dem halben Inhalt des Vierecks abcd ab: ſo erhält man den Inhalt eines Dreiecks, welches von dem Dreiecke bac weggenommen, und dem Dreiecke abc zugeſetzt werden muß, um zwei gleiche Theile des Vierecks zu erhalten. Nimmt man daher ac zur Grundlinie an, und ſucht des Dreiecks Höhe (§. 85.), zieht in der Weite der gefundenen Höhe mit ad eine Parallellinie, und bemerkt den Punkt f, wo dieſe ab ſchneidet, und zieht nun fc, ſo ſind die beiden Theile fbc und fabc einander gleich.

Es ſei z. B. ac = 365′; de = 150′; ab = 192′:
ſo iſt ac . $\frac{1}{2}$ de = 365 . 75 = 27375 F^2 = △ ade.
und ac . $\frac{1}{2}$ ab = 365 . 96 = 35040 F^2 = △ abc.

addirt 62415 F^2 = abcd.

2) 31207 F^2 = $\frac{1}{2}$ abcd
27375 F^2 = △ ade

ſubtrahirt 3832 die Differenz.

Nun

Nun iſt ac aber 365 : 2 = 182 = $\frac{1}{2}$ ac oder die halbe Grundlinie des Dreiecks, welches noch von abc weggenommen, und adc zugeſetzt werden muß.

Der Inhalt dieſes Dreiecks iſt 3832 F²; 3832 : 182 giebt 21 F oder af, welche auf der Linie ab als der Höhe des Dreiecks afc von a nach f aufgetragen werden müſſen.

§. 113.

Aufgabe.

Ein Trapez in eine vorgeſchriebene Anzahl Theile zu theilen, Fig. 81 und 82.

Aufloͤſung.

Es ſei das Trapez abcd (Fig. 81); ad = 96° und bc = 60°. Soll die Figur in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo theile man die beiden parallelen Seiten, jede für ſich, ſo wohl ad, als auch bc in 4 gleiche Theile, und ziehe die Theilungslinien durch die geſuchten Punkte, ſo iſt die Theilung verrichtet, und jeder Theil der vierte von abcd.

Oder: man dividirt die Zahlen der beiden Parallellinien, alſo ad = 96°, und bc = 60° durch die Theilungszahl 4; ſo bekommt man auf ad, nämlich $\frac{96}{4}$ = 24°, auf bc aber $\frac{60}{4}$ = 15°. Trägt man jede dieſer erhaltenen Zahlen auf die ihr zugehörige Theilungslinie viermal auf, ſo hat man ebenfalls abcd in vier gleiche Theile getheilt.

Sollte die Theilung nicht in gleiche Theile geſchehen, ſo könnte man die jedem Theile zukommende Länge ſo wohl auf ad, als auch auf bc auftragen, und die Theilungslinien

linien ziehen. Oder man könnte, wenn abcd Fig. 82 ein Gehölze wäre, welches in ungleichen Theilen unter A, B, C, D und E getheilt werden ſollte, die Theilung auch auf dieſe Art vornehmen.

Es ſei die Fläche abcd (Fig. 82) = 37170 R^2 und ab = 370 R, cd = 306 R und die Bedingung der Theilung ſo, daß B noch einmal ſo viel als A, C zwei und ein halbmal ſo viel, als A; D dreimal ſoviel als A, und E nur halb ſo viel als A bekomme. Man berechnet, wie groß eines jeden Antheil an Quadratruthen ſei, und nun kann man die Länge jedes Stücks auf ab und auf ac abmeſſen, die Theilungspunkte beſtimmen und die Scheidelinien ziehen.

Zuvörderſt muß man ſuchen, wie viel jeder Theilnehmer am Ganzen habe. Da nun E nur halb ſo viel als A erhalten ſoll, ſo bekömmt E unter allen Theilnehmern den kleinſten Theil; dieſer ſei unterdeſſen = x. Nach dieſer Vorausſetzung iſt alſo

$$\begin{aligned} E &= 1x \\ A &= 2x \\ B &= 4x \\ C &= 5x \\ D &= 6x \\ \hline E+A+B+C+D &= 18x. \end{aligned}$$

Nun betragen $18x = 37170$ R
$18x = 18x$ dividirt

alſo iſt der Antheil x od. für E = 2065 Quadratruthen.

Alſo bekommt E	=	1x	von der ganzen Fläche	2065 R^2
A	=	2x	— — — —	4130 —
B	=	4x	— — — —	8260 —
C	=	5x	— — — —	10325 —
D	=	6x	— — — —	12390 —
E + A + B + C + D	=			37170 R^2,

welches der Inhalt der ganzen Fläche iſt.

Soll

Soll eines jeden Antheil durch Theilungspunkte auf ab und cd bemerkt werden, ſo theile man beide Linien, jede für ſich, in 18 gleiche Theile, und gebe jeder Abtheilung ſo viel $\frac{1}{18}$, als ihr zukommen, welche man auf folgende Art findet:

$18x : ab = 370^{\circ} : x$

alſo iſt $x = 20\frac{5}{9}$ R für E auf ab.

$18x : cd = 306^{\circ} : x$

alſo iſt $x = 17$ R für E auf cd.

Auf dieſe Art fährt man fort, die Längen auf ab ſo wohl als auf cd für A, B, C und D zu berechnen.

$x = 20\frac{5}{9}$	R für E auf ab	$x = 17$	R für E auf cd
$2x = 41\frac{1}{9}$	R — A — —	$2x = 34$	R — A — —
$4x = 82\frac{2}{9}$	R — B — —	$4x = 68$	R — B — —
$5x = 102\frac{7}{9}$	R — C — —	$5x = 85$	R — C — —
$6x = 12\ \frac{3}{9}$	R — D — —	$6x = 102$	R — D — —
S. = 370 R	welche die ganze Länge von ab ausmachen.	S. = 306 R	welche die ganze Länge von cd ausmachen.

Die ſo gefundenen Längen werden nun auf ab und cd aufgetragen, und die Theilungspunkte markirt.

§. 114.

Aufgabe.

Von einem Trapezoid oder einem Vierecke eine gegebene Anzahl Äcker oder Quadratruthen ꝛc. abzuſchneiden, Fig 83.

Auflöſung.

Das Viereck ſei abcd (Fig. 83). Von dieſem ſollen 12000 Quadratſuß und zwar ſo abgeſchnitten werden, daß

Aufloſung.

Es ſei das Viereck abcd (Fig. 79.) gegeben.

Zieht man die Diagonallinien ac und bd, theilt bd in e in zwei gleiche Theile, zieht durch e mit ac eine Parallellinie ef und von f nach a die Linie af, ſo hat man in af die Theilungslinie, und es iſt das Dreieck afd = dem Trapezoid abcf.

Sollte das gegebene Viereck abcd in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo dürfte man nur das Dreieck afd ſowohl als den Trapezoid abermals halbiren, ſo würde jede dieſer Hälften den vierten Theil des ganzen Vierecks abcd angeben. Hieraus läßt ſich leicht begreifen, wie man in dieſem Fall das Ganze in 8, 16, 32 ꝛc. gleiche Theile theilen könnte.

Oder: Man berechnet den Inhalt der ganzen Fläche des Vierecks abcd (Fig. 80) und zieht das kleinere Dreieck abc von dem halben Inhalt des Vierecks abcd ab: ſo erhält man den Inhalt eines Dreiecks, welches von dem Dreiecke bac weggenommen, und dem Dreiecke abc zugeſetzt werden muß, um zwei gleiche Theile des Vierecks zu erhalten. Nimmt man daher ac zur Grundlinie an, und ſucht des Dreiecks Höhe (§. 85.), zieht in der Weite der gefundenen Höhe mit ad eine Parallellinie, und bemerkt den Punkt f, wo dieſe ab ſchneidet, und zieht nun fc, ſo ſind die beiden Theile fbc und fabc einander gleich.

Es ſei z. B. ac = 365′; de = 150′; ab = 192′:
ſo iſt ac . $\frac{1}{2}$ de = 365 . 75 = 27375 F^2 = △ ade.
und ac . $\frac{1}{2}$ ab = 365 . 96 = 35040 F^2 = △ abc.

addirt 62415 F^2 = abcd.

2) 31207 F^2 = $\frac{1}{2}$ abcd
27375 F^2 = △ ade

ſubtrahirt 3832 die Differenz.

Nun

Nun iſt ac aber $365 : 2 = 182 = \frac{1}{2}$ ac oder die halbe Grundlinie des Dreiecks, welches noch von abc weggenommen, und adc zugeſetzt werden muß.

Der Inhalt dieſes Dreiecks iſt $3832 F^2$; $3832 : 182$ giebt 21 F oder af, welche auf der Linie ab als der Höhe des Dreiecks afc von a nach f aufgetragen werden müſſen.

§. 113.

Aufgabe.

Ein Trapez in eine vorgeſchriebene Anzahl Theile zu theilen, Fig. 81 und 82.

Aufloͤſung.

Es ſei das Trapez abcd (Fig. 81); ad = 96° und bc = 60°. Soll die Figur in vier gleiche Theile getheilt werden, ſo theile man die beiden parallelen Seiten, jede für ſich, ſo wohl ad, als auch bc in 4 gleiche Theile, und ziehe die Theilungslinien durch die geſuchten Punkte, ſo iſt die Theilung verrichtet, und jeder Theil der vierte von abcd.

Oder: man dividirt die Zahlen der beiden Parallellinien, alſo ad = 96°, und bc = 60° durch die Theilungszahl 4; ſo bekommt man auf ad, nämlich $\frac{96}{4} = 24°$, auf bc aber $\frac{60}{4} = 15°$. Trägt man jede dieſer erhaltenen Zahlen auf die ihr zugehörige Theilungslinie viermal auf, ſo hat man ebenfalls abcd in vier gleiche Theile getheilt.

Sollte die Theilung nicht in gleiche Theile geſchehen, ſo könnte man die jedem Theile zukommende Länge ſo wohl auf ad, als auch auf bc auftragen, und die Theilungs- linien

linien ziehen. Oder man könnte, wenn abcd Fig. 82 ein Gehölze wäre, welches in ungleichen Theilen unter A, B, C, D und E getheilt werden ſollte, die Theilung auch auf dieſe Art vornehmen.

Es ſei die Fläche abcd (Fig. 82) = 37170 R^2 und ab = 370 R, cd = 306 R und die Bedingung der Theilung ſo, daß B noch einmal ſo viel als A, C zwei und ein halbmal ſo viel, als A; D dreimal ſoviel als A, und E nur halb ſo viel als A bekomme. Man berechnet, wie groß eines jeden Antheil an Quadratruthen ſei, und nun kann man die Länge jedes Stücks auf ab und auf ac abmeſſen, die Theilungspunkte beſtimmen und die Scheidelinien ziehen.

Zuvörderſt muß man ſuchen, wie viel jeder Theilnehmer am Ganzen habe. Da nun E nur halb ſo viel als A erhalten ſoll, ſo bekömmt E unter allen Theilnehmern den kleinſten Theil; dieſer ſei unterdeſſen = x. Nach dieſer Vorausſetzung iſt alſo

$$\begin{aligned} E &= 1x \\ A &= 2x \\ B &= 4x \\ C &= 5x \\ D &= 6x \\ \hline E+A+B+C+D &= 18x. \end{aligned}$$

Nun betragen 18x = 37170 R
18x = 18x dividirt

alſo iſt der Antheil x od. für E = 2065 Quadratruthen.

Alſo bekommt E	= 1x	von der ganzen Fläche	2065 R^2
A	= 2x	— — — —	4130 —
B	= 4x	— — — —	8260 —
C	= 5x	— — — —	10325 —
D	= 6x	— — — —	12390 —
E+A+B+C+D	=		37170 R^2,

welches der Inhalt der ganzen Fläche iſt.

Soll

Soll eines jeden Antheil durch Theilungspunkte auf ab und cd bemerkt werden, ſo theile man beide Linien, jede für ſich, in 18 gleiche Theile, und gebe jeder Abtheilung ſo viel $\frac{1}{18}$, als ihr zukommen, welche man auf folgende Art findet:

$$18x : ab = 370^\circ : x$$

alſo iſt $x = 20\frac{5}{9}$ R für E auf ab.

$$18x : cd = 306^\circ : x$$

alſo iſt $x = 17$ R für E auf cd.

Auf dieſe Art fährt man fort, die Längen auf ab ſo wohl als auf cd für A, B, C und D zu berechnen.

$x = 20\frac{5}{9}$ R für E auf ab	$x = 17$ R für E auf cd
$2x = 41\frac{1}{9}$ R — A — —	$2x = 34$ R — A — —
$4x = 82\frac{2}{9}$ R — B — —	$4x = 68$ R — B — —
$5x = 102\frac{7}{9}$ R — C — —	$5x = 85$ R — C — —
$6x = 12\ \frac{3}{9}$ R — D — —	$6x = 102$ R — D — —
S. = 370 R welche die ganze Länge von ab ausmachen.	S. = 306 R welche die ganze Länge von cd ausmachen.

Die ſo gefundenen Längen werden nun auf ab und cd aufgetragen, und die Theilungspunkte markirt.

§. 114.

Aufgabe.

Von einem Trapezoid oder einem Vierecke eine gegebene Anzahl Acker oder Quadratruthen ꝛc. abzuſchneiden, Fig 83.

Auflöſung.

Das Viereck ſei abcd (Fig. 83). Von dieſem ſollen 12000 Quadratſuß und zwar ſo abgeſchnitten werden, daß

daß die Theilungslinie eine ſenkrechte Linie zwiſchen a b und a d ſei.

1) Man verlängere die Linien b c und a d, bis ſie ſich (da ſie nicht parallel ſind) irgend wo, etwa in e ſchneiden, ſo daß aus a b c d das Dreieck c e d wird.

2) Man fället aus b auf die Grundlinie dieſes Dreiecks, hier auf e d eine ſenkrechte Linie b f, mißt ſowohl b f = 148′, als auch e f = 440′ und a e = 480′ und berechnet den Inhalt beider Dreiecke b a e und b f e.

3) Hierauf ſchließt man:

Wie △ b f e : Quadrate der Grundlinie e f = △ b a e + 12000 F²: Quadrate der Grundlinie e g.

4) Aus dem gefundenen Quadrate der Linie e g, zieht man die Quadratwurzel, und ſubtrahirt von der Länge derſelben die Linie a e, ſo giebt der Reſt die Größe von a g.

Errichtet man endlich aus

5) g auf d eine ſenkrechte Linie g h, ſo ſondert dieſe die vorgeſchriebenen 12000 F² von dem Vierecke ab.

Die Berechnung iſt folgende:

b f = 148′; e f = 440′; a e = 480′

Nach n. 2. iſt b f =	148′	Nach n. 2. b f =	148′
½ e f =	220	½ a e =	240′
	2960		5920
	296		296
△ b f e =	32560 F²	△ b a e =	35520

Nach

Nach n. 3. $32560\,F^2 : 440^\circ = (35520 + 12000)\,F^2 : eg^2$

$$\begin{array}{rr} 440 & 47520 \\ \hline 17600 & 1936\,00 \\ 176 & \\ \hline 193600 & 28512000 \\ & 14256 \\ & 42768 \\ & 4752 \\ \hline 32560) & 9199872000|281937\,F^2 \end{array}$$

Nach n. 4. $\sqrt{281937} = 5309''$

$$\begin{array}{rl} 4800'' & ae = 480' \\ \hline 509'' & = 50'9'' = ag. \end{array}$$

Trägt man nun von a bis g die Länge von 50′9″ auf und errichtet gh ſenkrecht, ſo enthält das Viereck agbh die vorgeſchriebenen 12000 Quadratfuß.

Wollte man aber dieſe 12000 Quadratfuß von der Seite dc in das Viereck abcd hineinmeſſen und abtheilen, ſo berechnet man.

1) Das ganze Viereck abcd und ſubtrahirt von der Summe die vorgeſchriebenen 12000 F^2.

2) Den erhaltenen Reſt nimmt man nun anſtatt der 12000 F^2 und verfährt übrigens wie vorhin, ſo bleibt das Stück, deſſen Inhalt 12000 F^2 beträgt, an der Seite bc übrig, oder iſt an dieſer Seite abgeſchnitten.

Es ſei $ac = 326'$; $di = 220'$ und $bk = 130'$.

$$\begin{array}{rl} 220 & = di \\ 130 & = bk \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{2} ac = 163 \,.\, 350 = 57050\,F^2$ das ganze Viereck abcd

$12000\,F^2$ nach n. 1.

45050 Reſt

 Nach

$$\text{Nach n. 2.}\quad 32560 F^2 : 193600 = \underbrace{35520 + 45050}_{80570} : eg^2$$

$$\begin{array}{r} 8057\ \ 0 \\ \hline 13552000 \\ 9680 \\ 15488 \\ \hline 32560)\ 15598352000 \,|\, 509777\ F^2 \end{array}$$

$$\sqrt{509777} = 71398'''$$
$$48000''' = ae = 480'$$
$$\overline{23398''' = 233'9''8''' = ag.}$$

Trägt man auch hier von a nach g die Länge von $233'9''8'''$ auf und errichtet gh ſenkrecht, ſo enthält das $\triangle$ ghd die vorgeſchriebenen 12000 Quadratfuß.

Anmerkung.

Auſſer dieſen nothwendigſten Theilungen der Vierecke, giebt es noch eine Menge andere, die aber theils zu weitläuftig, theils für den gegenwärtigen Zweck nicht brauchbar genug ſind. Jede andere vorgeſchriebene Theilung irgend eines Vierecks läßt ſich dadurch am leichteſten bewerkſtelligen, daß man die Vierecke in Dreiecke zerlegt, alsdenn mit einander vergleicht und die Theilung auf dieſem Wege vornimmt. Da dieſe Fälle auch bei den vielſeitigen Figuren vorkommen, ſo wird vorzüglich im praktiſchen Theile davon Gebrauch gemacht werden.

III.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Vielecke.

§. 115.

Eine vielſeitige Figur oder ein Vieleck iſt entweder gleichſeitig oder ungleichſeitig. Gleichſeitige Figuren aber haben auch gleiche Winkel an den Peripherien, und deswegen nennt man ſie insbeſondere reguläre

Viel-

Vielecke oder reguläre Polygone. Dergleichen Polygone trifft man zwar ſelten in der Natur und vielleicht am wenigſten auf Forſtrevieren an; indeß, da es ſich zutragen kann, daß man Luſtplätze in Wäldern, ſo wie Jagdhäuſer zu Vergnügungsörtern in der Geſtalt der regulären Polygone anlegt, von welchen aus Durchſichten in den Wald gemacht werden müſſen, die ihren Grund im der Form ſolcher Gebäude haben, ſo muß man ſich wenigſtens in Allgemeinen mit den regulären Polygonen von 5, 6 und mehrern Seiten bekannt machen.

§. 116.

Alle regulären Polygone, alſo ſolche, die gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, werden entweder in oder um Kreiſe gezeichnet. Die erſtern nennt man innere, die letztern aber äußere Polygone. Der Mittelpunkt des Kreiſes iſt zugleich der Mittelpunkt des Polygons, welches in oder um dieſen Kreis gezeichnet wird. Die Seiten der innern Polygone ſind Sehnen des Kreiſes, und die Seiten der äußern Tangenten, oder Berührungslinien. Unter der Summe aller Seiten eines Polygons verſteht man deſſen Peripherie oder Umfang, die bei den innern kürzer, bei den äußern Polygonen aber länger iſt als die Kreisperipherie, wenn man die letztere in eine gerade Linie verwandelt. Eben dieſe Vergleichung findet auch bei den Flächen oder dem Inhalt der regulären Polygone mit derjenigen Kreisfläche ſtatt, in oder um deren Peripherie ſolche Polygone gezeichnet werden. Die Fläche eines innern Polygons iſt kleiner, die Fläche eines äußern hingegen größer, als die Kreisfläche; jedoch kommmen Peripherien ſo wohl, als Flächen, der Kreisperipherie und der Kreisfläche näher und näher, je mehr die Polygone Seiten haben, ohne daß je ein Polygon angegeben werden könnte, deſſen Peripherie und Fläche eben ſo groß wäre, als die Peripherie und Fläche des Kreiſes.

Da die äußern Polygone innere werden, wenn man aus dem Mittelpunkte um ſie eine Kreislinie ſo beſchreibt, daß ſie durch alle Winkelſpitzen geht, ſo iſt es genug, wenn man ſich zum gegenwärtigen Zwecke nur mit den innern Polygonen bekannt macht. Folgende Stücke ſind auſſer den genannten noch in jedem Polygone merkwürdig: die Polygonwinkel, das ſind ſolche, deren Spitzen in der Kreisperipherie liegen, und deren Schenkel Seiten des Polygons, alſo Sehnen des Kreiſes ſind; die Centriwinkel oder ſolche, die ihre Spitze im Mittelpunkt des Polygons, folglich auch im Mittelpunkte des Kreiſes haben, und dann entſtehen, wenn man aus jeden zwei nächſten Winkelſpitzen Halbmeſſer des Kreiſes zieht. Der größte Halbmeſſer des regulären innern Polygons iſt zugleich der Halbmeſſer des Kreiſes, und geht von den Winkelſpitzen bis in den Mittelpunkt; der kleinſte Halbmeſſer hingegen iſt die Entſernung jeder Polygonſeite vom Mittelpunkte.

Alle regulären Polygone ſind dann in Kreiſe zu zeichnen möglich, wenn man entweder ihre Polygon- oder ihre Centriwinkel zu finden weiß, und die erſten in die Peripherie, die letztern aber an den Mittelpunkt des Kreiſes zu zeichnen im Stande iſt. Da hier keine vollkommene geometriſche Strenge zu beobachten nöthig iſt, ſo werden die folgenden Lehren genügen, die erſten praktiſchen Kenntniſſe von den Polygonen zu erläutern.

§. 117.

Aufgabe.

Den Centriwinkel ſowohl, als auch den Polygonwinkel, wie auch die Summe aller Polygonwinkel in einem regulären Polygone zu finden.

Auf-

Aufloſung.

1) Man dividire mit der Anzahl der Seiten des Polygons in die Anzahl der Grade der ganzen Kreisperipherie, ſo giebt der Quotient den Centriwinkel des Polygons (§. 16.)

2) Subtrahirt man den ſo gefundenen Centriwinkel von 180° als der Summe aller Winkel jedes Dreiecks, alſo auch des Dreiecks, welches beide Halbmeſſer, die den Centriwinkel machen, und eine Seite des Polygons einſchließen, ſo giebt der Reſt die Zahl der Grade ꝛc. des Polygonwinkels (§. 16).

Beiſpiele.

Wie groß iſt der Centriwinkel ſo wohl als der Polygonwinkel im regulären Fünfecke?

5) 360 | 72° der Centriwinkel.
35
10

180° — 72° = 108° der Polygonwinkel.

Wie groß iſt der Centriwinkel ſo wohl als der Polygonwinkel im regulären Sechsecke?

6) 360 | 60° der Centriwinkel.
36

180° — 60° = 120° der Polygonwinkel.

3) Die Summe aller Winkel in einem jeden regulären Polygone findet man entweder, wenn man den gefundenen Polygonwinkel mit der Zahl der Seiten multiplicirt; oder, wenn man zwei rechte Winkel oder 180° ſo vielmal nimmt, als das Polygon Seiten hat, und vom Produkte 4 rechte Winkel oder 360° ſubtrahirt.

Beiſpiele.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Fünfecke?

180° der Polygonwinkel
5 die Zahl der Seiten
———
540 die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 108° die Grade zweier rechten Winkel
5 tie Zahl der Seiten
———
900°
360° die Grade von 4 rechten Winkeln
———
540° die Summe aller Polygonwinkel.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Sechsecke?

120° der Polygonwinkel
6 die Zahl der Seiten
———
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 180°
6
———
1080°
360°
———
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Bezeichnet R den rechten Winkel, und n die Anzahl der Seiten des Polygons, ſo iſt allgemein jeder Centriwinkel $\frac{4R}{n}$; jeder Polygonwinkel aber $2R - \frac{4R}{n}$ und die Summe aber Polygonwinkel im n Ecke $(2n - 4)R$.

Anmerkung.

Da die Centriwinkel ſo wohl als die Polygonwinkel der regulären Vielecke theils dazu dienen, dergleichen Figuren in Kreiſe zu zeichnen, theils auf dem Felde

abzu-

abzuſtecken, und die Summe aller Winkel im Umfange dazu gebraucht werden kann, die Richtigkeit der Vermeſſung einer Figur aus dem Umfange zu prüfen, ſo folgt am Schluſſe dieſes Lehrbuches eine Tabelle, worin man die Polygonwinkel und die Summe aller Winkel am Umfange eines regulären Polygons findet. Die Centriwinkel fehlen zwar, indeß kann man ſie leicht aus den Polygonwinkeln finden, wenn man nämlich dieſe von 180° ſubtrahirt.

§. 118.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ab ein reguläres Polygon von ſo viel Seiten, als man will, zu zeichnen, (Fig. 84. 85 und 86).

Auflöſung.

1) Man ſuche den Polygonwinkel des verlangten Polygons (§. 117.), und zeichne dieſen in a (§. 51.).

2) Hierauf mache man ac = ab, und beſchreibe durch a, b und c eine Kreislinie (§. 63.), faſſe ac = ab in den Zirkel, und trage ſie als Sehne in der Kreislinie ſo oft fort, als es angehet, ſo iſt das Polygon vollendet.

Oder:

Man trägt in a und b, (Fig. 85.) alſo in jeden dieſer Punkte den halben Polygonwinkel, ſo werden ſich die Schenkel deſſelben ac = bc als Seiten eines gleichſchenkligen Dreiecks acb in c ſchneiden, und der Durchſchnittspunkt iſt ſowohl des Polygons als auch des Kreiſes Mittelpunkt. Beſchreibt man nun aus c mit ac = bc eine Kreislinie, ſo kann man die gegebene Seite ab darin herumtragen.

Oder:

Man nimmt die gegebene Linie ab Fig. 86. als Halbmeſſer an, und beſchreibt mit demſelben einen Kreis trägt um den Mittelpunkt den Centriwinkel des Polygons (§. 117.) acb, ſo viel mal herum, als es möglich iſt, verlängert die Schenkel bis an die Peripherie, ſo hat man zugleich die Polygonſeiten ab ꝛc. weil nur die Sehnen von Theilungspunkt zu Theilungspunkt gezogen werden dürfen.

Im regulären Sechsecke (Fig. 85.) iſt die Seite ab dem größten Halbmeſſer ac gleich. Da nun der Halbmeſſer des Kreiſes eben ſo groß, und 6 mal in der dazugehörigen Peripherie enthalten iſt, ſo kann man durch bloßes Herumtragen des Halbmeſſers ein reguläres Sechseck zeichnen.

Anmerkung 1.

Iſt in einem Kreiſe ein reguläres Sechseck abgetheilt, und man verbindet den erſten und dritten, ferner den dritten und fünften, und endlich den fünften und erſten Theilungspunkt, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes gleichſeitiges Dreieck. Halbirt man hingegen die Bogen des Sechsecks, und verbindet die Theilungspunkte durch Sehnen, ſo entſteht ein reguläres Zwölfeck. Hieraus ergiebt ſich, wie das reguläre Vier und Zwanzigeck, das Acht und Vierzigeck ꝛc. zu zeichnen möglich iſt, ohne daß man den Transporteur zur Zeichnung irgend eines Winkels im Polygon nöthig hat, und wodurch die Zeichnungen viel genauer werden. Die Reihe der ſo gezeichneten Polygone iſt 3, 6, 12, 24, 48, 96 ꝛc.

Schneidet man den Kreis durch zwei Durchmeſſer rechtwinkelig, und verbindet die Durchſchnittspunkte in der Peripherie durch Sehnen, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes Quadrat. Werden die Bogen des Quadrats halbirt, ſo entſteht ein reguläres Achteck, und durch wiederholtes Halbiren ein Sechzehneck, Zwey und Dreißigeck ꝛc. kurz: man erhält durch dieſes Verfahren eine Reihe von Polygonen 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc.

Vergleicht man beide Reihen, ſo fehlen die regulären Polygone von 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 ꝛc. Seiten, die man nur nach dem hier gegebenen Unterrichte mit Hülfe des Transporteurs zeichnen kann, wenn man die Bogen der Kreislinie nicht mechaniſch durch bloßes Probiren ſuchen will.

Anmerkung 2.

Um dem ganz mechaniſchen Verfahren ſo wohl, als dem Gebrauche des Transporteurs auszuweichen, kann man die regulären Polygone auch auf folgende Art in Kreiſe zeichnen. Man beſtimme den Durchmeſſer des Kreiſes und theile dieſen in ſo viel gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben ſoll; halbire dieſen Durchmeſſer und beſchreibe aus dem Mittelpunkte den Kreis. Auf den Durchmeſſer zeichne man überdies ein gleichſeitiges Dreieck, ziehe durch die Spitze deſſelben und den zweiten Theilungspunkt des Durchmeſſers die gerade Linie, welche die Peripherie des Kreiſes auf der andern Seite des Durchmeſſers ſchneidet und ziehe endlich die Sehne des Bogens, deſſen Länge der Anfangspunkt und der erwähnte Durchſchnitt beſtimmt. Dieſe Sehne iſt die Seite des verlangten regulären Polygons. Trägt man ſie in der Kreisperipherie fort und vollendet die Sehnen, ſo iſt das Polygon gezeichnet.

Geometriſche Richtigkeit hat zwar dieſe Konſtruktion nicht, aber im Praktiſchen, wenn man nur genau zeichnet, ſo viel Brauchbarkeit, als man verlangt. Sie heißt von ihrem Erfinder Renaldinus, die Renaldiniſche Methode.

§. 119.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden regulären Polygons zu finden, Fig. 87.

Auflöſung.

Da ein jedes reguläre Polygon aus dem Mittelpunkte des Kreiſes, in welchem es beſchrieben iſt, in ſo viele

Beiſpiele.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Fünfecke?

180° der Polygonwinkel
5 die Zahl der Seiten
540 die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 108° die Grade zweier rechten Winkel
5 die Zahl der Seiten
900°
360° die Grade von 4 rechten Winkeln
540° die Summe aller Polygonwinkel.

Wie groß iſt die Summe aller Polygonwinkel im regulären Sechsecke?

120° der Polygonwinkel
6 die Zahl der Seiten
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Oder 180°
6
1080°
360°
720° die Summe aller Polygonwinkel.

Bezeichnet R den rechten Winkel, und n die Anzahl der Seiten des Polygons, ſo iſt allgemein jeder Centriwinkel $\frac{4R}{n}$; jeder Polygonwinkel aber $2R - \frac{4R}{n}$ und die Summe aber Polygonwinkel im n Ecke $(2n - 4)R$.

Anmerkung.

Da die Centriwinkel ſo wohl als die Polygonwinkel der regulären Vielecke theils dazu dienen, dergleichen Figuren in Kreiſe zu zeichnen, theils auf dem Felde

abzu-

abzuſtecken, und die Summe aller Winkel im Umfange dazu gebraucht werden kann, die Richtigkeit der Vermeſſung einer Figur aus dem Umfange zu prüfen, ſo folgt am Schluſſe dieſes Lehrbuches eine Tabelle, worin man die Polygonwinkel und die Summe aller Winkel am Umfange eines regulären Polygons findet. Die Centriwinkel fehlen zwar, indeß kann man ſie leicht aus den Polygonwinkeln finden, wenn man nämlich dieſe von 180° ſubtrahirt.

§. 118.

Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie ab ein reguläres Polygon von ſo viel Seiten, als man will, zu zeichnen, (Fig. 84. 85 und 86).

Auflöſung.

1) Man ſuche den Polygonwinkel des verlangten Polygons (§. 117.), und zeichne dieſen in a (§. 51.).

2) Hierauf mache man ac = ab, und beſchreibe durch a, b und c eine Kreislinie (§. 63.), faſſe ac = ab in den Zirkel, und trage ſie als Sehne in der Kreislinie ſo oft fort, als es angehet, ſo iſt das Polygon vollendet.

Oder:

Man trägt in a und b, (Fig. 85.) alſo in jeden dieſer Punkte den halben Polygonwinkel, ſo werden ſich die Schenkel deſſelben ac = bc als Seiten eines gleichſchenkligen Dreiecks acb in c ſchneiden, und der Durchſchnittspunkt iſt ſowohl des Polygons als auch des Kreiſes Mittelpunkt. Beſchreibt man nun aus c mit ac = bc eine Kreislinie, ſo kann man die gegebene Seite ab darin herumtragen.

Oder:

Man nimmt die gegebene Linie ab Fig. 86. als Halbmeſſer an, und beſchreibt mit demſelben einen Kreis trägt um den Mittelpunkt den Centriwinkel des Polygons (§. 117.) acb, ſo viel mal herum, als es möglich iſt, verlängert die Schenkel bis an die Peripherie, ſo hat man zugleich die Polygonſeiten ab ꝛc. weil nur die Sehnen von Theilungspunkt zu Theilungspunkt gezogen werden dürfen.

Im regulären Sechsecke (Fig. 85.) iſt die Seite ab dem größten Halbmeſſer ac gleich. Da nun der Halbmeſſer des Kreiſes eben ſo groß, und 6 mal in der dazugehörigen Peripherie enthalten iſt, ſo kann man durch bloßes Herumtragen des Halbmeſſers ein reguläres Sechseck zeichnen.

Anmerkung 1.

Iſt in einem Kreiſe ein reguläres Sechseck abgetheilt, und man verbindet den erſten und dritten, ferner den dritten und fünften, und endlich den fünften und erſten Theilungspunkt, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes gleichſeitiges Dreieck. Halbirt man hingegen die Bogen des Sechsecks, und verbindet die Theilungspunkte durch Sehnen, ſo entſteht ein reguläres Zwölfeck. Hieraus ergiebt ſich, wie das reguläre Vier und Zwanzigeck, das Acht und Vierzigeck ꝛc. zu zeichnen möglich iſt, ohne daß man den Transporteur zur Zeichnung irgend eines Winkels im Polygon nöthig hat, und wodurch die Zeichnungen viel genauer werden. Die Reihe der ſo gezeichneten Polygone iſt 3, 6, 12, 24, 48, 96 ꝛc.

Schneidet man den Kreis durch zwei Durchmeſſer rechtwinkelig, und verbindet die Durchſchnittspunkte in der Peripherie durch Sehnen, ſo hat man ein im Kreiſe beſchriebenes Quadrat. Werden die Bogen des Quadrats halbirt, ſo entſteht ein reguläres Achteck, und durch wiederholtes Halbiren ein Sechzehneck, Zwey und Dreißigeck ꝛc. kurz: man erhält durch dieſes Verfahren eine Reihe von Polygonen 4, 8, 16, 32, 64, 128 ꝛc.

Vergleicht man beide Reihen, ſo fehlen die regulären Polygone von 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 ꝛc. Seiten, die man nur nach dem hier gegebenen Unterrichte mit Hülfe des Transporteurs zeichnen kann, wenn man die Bogen der Kreislinie nicht mechaniſch durch bloßes Probiren ſuchen will.

Anmerkung 2.

Um dem ganz mechaniſchen Verfahren ſo wohl, als dem Gebrauche des Transporteurs auszuweichen, kann man die regulären Polygone auch auf folgende Art in Kreiſe zeichnen. Man beſtimme den Durchmeſſer des Kreiſes und theile dieſen in ſo viel gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben ſoll; halbire dieſen Durchmeſſer und beſchreibe aus dem Mittelpunkte den Kreis. Auf den Durchmeſſer zeichne man überdies ein gleichſeitiges Dreieck, ziehe durch die Spitze deſſelben und den zweiten Theilungspunkt des Durchmeſſers die gerade Linie, welche die Peripherie des Kreiſes auf der andern Seite des Durchmeſſers ſchneidet und ziehe endlich die Sehne des Bogens, deſſen Länge der Anfangspunkt und der erwähnte Durchſchnitt beſtimmt. Dieſe Sehne iſt die Seite des verlangten regulären Polygons. Trägt man ſie in der Kreisperipherie fort und vollendet die Sehnen, ſo iſt das Polygon gezeichnet.

Geometriſche Richtigkeit hat zwar dieſe Konſtruktion nicht, aber im Praktiſchen, wenn man nur genau zeichnet, ſo viel Brauchbarkeit, als man verlangt. Sie heißt von ihrem Erfinder Renaldinus, die Renaldiniſche Methode.

§. 119.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden regulären Polygons zu finden, Fig. 87.

Auflöſung.

Da ein jedes reguläre Polygon aus dem Mittelpunkte des Kreiſes, in welchem es beſchrieben iſt, in ſo viele

gleichgroße Dreiecke getheilt werden kann, als das Polygon Seiten hat (Fig. 87.); ſo erhält man den Inhalt eines jeden Polygons, wenn man den Inhalt eines dieſer Dreiecke ſucht, und denſelben durch die Anzahl der Seiten multiplicirt.

Es ſei z. B. die Polygon-Seite ab = 120′, und die ſenkrechte Entfernung vom Mittelpunkte, oder der kleinſte Halbmeſſer cd = 95′,

ſo iſt $cd = 95'$
$\frac{1}{2} ab = 60'$

der Inhalt des Dreiecks $abc = 5700\ F^2$
Iſt nun 5 die Anzahl der Seiten
ſo iſt $28500\ F^2 = 285\ R^2$ der Inhalt des Polygons.

Auch iſt die Fläche eines jeden regulären Polygons einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie der Peripherie, und deſſen Höhe dem kleinſten Halbmeſſer des Polygons gleich iſt; demnach findet man auch den Inhalt des regulären Polygons, wenn man entweder ſeine Peripherie mit dem kleinſten Halbmeſſer multiplicirt, und das Produkt mit 2 dividirt; oder wenn man die Peripherie mit der Hälfte des kleinſten Halbmeſſers, oder die halbe Peripherie mit dem kleinſten Halbmeſſer multiplicirt (§. 83.).

Den kleinſten Halbmeſſer findet man aus der halben Polygonſeite und dem Halbmeſſer des Kreiſes nach §. 87, denn es iſt Fig. 87, $ac^2 - ad^2 = cd^2$, alſo $\sqrt{(a^2 - ad^2)} = cd$, welches der kleinſte Halbmeſſer iſt.

§. 120.

So einfach die Zeichnungsmethode und Berechnung des Inhalts der regulären Polygone iſt, ſo einfach und leicht

leicht iſt auch die Theilung in eine vorgeſchriebene Anzahl gleicher Theile.

Soll z. B. ein reguläres Fünfeck in zwei gleiche Theile getheilt werden, ſo zieht man aus einer Winkelſpitze auf die Mitte der entgegengeſetzten Seite eine Perpendikularlinie; dieſe giebt zwei gleichgroße Vierecke, wovon jedes die Hälfte des gegebenen Polygons iſt.

Soll aber ein Fünfeck in fünf gleiche Theile getheilt werden, ſo ſucht man den Mittelpunkt des Polygons (§. 63.), wofern er nicht ſchon bekannt iſt, und zieht aus demſelben nach allen Winkelſpitzen, gerade Linien oder größte Halbmeſſer; dieſe theilen das Fünfeck in fünf gleichgroße Dreiecke.

Ein Sechseck theilt man durch eine gerade Linie in zwei gleiche Theile, die man aus einer Winkelſpitze in die gegenüber ſtehende zieht; wird dieſe Linie durch eine andere übers Kreuz (d. i. ſenkrecht und zwar durch den Mittelpunkt) geſchnitten, ſo hat man vier gleiche Theile.

Am zweckmäßigſten werden auch die Flächen der regulären Polygone in Dreiecke zerlegt, und mit dieſen die Theilung nach vorgeſchriebenen gleichen oder ungleichen Theilen vorgenommen.

§. 121.

Ungleichſeitige, alſo irreguläre Vielecke, die man ſchlechthin Vielecke nennen könnte, kommen in der Ausübung der Meßkunſt überhaupt, und vorzüglich dem Forſtbedienten bei der Vermeſſung, Berechnung und Eintheilung der Waldungen vor, denn die mehreſten Flächen der Wälder, Forſte, Wieſen, Horſte, Blößen ꝛc. ſind ſolche Vielecke; daher iſt es nöthig ihre Zeichnungsart, die Ausrechnungsmethode und die Theilung derſelben, ausführlich zu beſchreiben. Die hier folgenden Lehren ſollen als Vorbereitung zur Anwendung im praktiſchen Theile der Meßkunſt dienen.

§. 122.

Aufgabe.

Jedes gegebene geradelinige irreguläre Vieleck mit dem Zirkel abzutragen, Fig. 90.

Auflöſung.

Man zerlege die ganze Fläche der Figur durch Diagonallinien in ſo viel Dreiecke, als möglich ſind, und die Zahl ſolcher Dreiecke wird in jedem Falle ſo viel betragen, als die Figur Seiten oder Winkel hat, weniger zwei. Iſt dieſe Zerlegung geſchehen, ſo trägt man alsdenn ein Dreieck nach dem andern ab, und ſetzt eins an das andere ſo an, daß immer zwei und zwei benachbarte eine Seite mit einander gemein haben.

Es ſei z. B. das gegebene Vieleck Figur 90. ein Siebeneck abcdefg; in dieſem ſei ab die erſte Grundlinie. Auf dieſe trägt man durch Hülfe des Zirkels die Linien ag und bg die ſich in g dann ſchneiden, wenn $ag + bg > ab$, und man erhält das Dreieck agb (§. 75.). Nun ſei bg Grundlinie. Auf dieſe trägt man die Linien be und eg wie vorhin, und man erhält das Dreieck beg. Iſt nun ge die Grundlinie, ſo trägt man in e die Linie ef, und in g die Linie gf, und man bekommt das Dreieck gfe. Hierauf ſei be Grundlinie. An dieſe trägt man bd in b, und ed in e, ſo ergiebt ſich das Dreieck ebd. Endlich ſei bd Grundlinie; an dieſe trägt man in b die Linie bc, und in d die Linie dc, ſo hat man, wenn wie vorhin verfahren wird, das Dreieck bcd, mithin den ganzen Entwurf der Figur abcdefg.

Anmerkung.

Die ſo gezeichnete Figur iſt entweder der gegebenen **gleich**, wenn die Seiten in beiden einerlei Größe haben; oder **ähnlich**, wenn die Seiten bloß nach einerlei Verhältniß, etwa nach einem verjüngten Maßſtabe aufgetragen worden ſind. Dieſe Methode, vielſeitige irre-

guläre Figuren zu zeichnen, dient auch dazu, im Felde, nach eben den Regeln, eine Figur durch Dreiecke aufzunehmen, wenn man innerhalb der Figur zu allen Seiten und Winkeln kommen kann, und der Boden eben iſt, worauf die Figur liegt. Man hat hiernach keinen Winkelmeſſer nöthig, ſondern bloß die Meßkette, und alle zur Konſtruktion der Figur nöthigen Stücke werden unmittelbar gemeſſen, wodurch die Figur einen ſolchen Grad der Richtigkeit erhält, den man durch den Gebrauch der Winkelmeßinſtrumente nicht zu erhalten im Stande iſt.

§. 123.

In jeder ebenen geradelinigen Figur, alſo auch in jedem irregulären Vielecke ſchlechthin, beträgt die Summe aller Winkel im Umfange herum, zweimal ſo viele rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechte Winkel. Denn, wenn man innerhalb der Figur irgendwo einen Punkt annimmt, von welchem aus man gerade Linien nach allen Winkelſpitzen der Figur zieht, ſo wird dadurch das Vieleck in ſo viele Dreiecke zerlegt, als die Figur Seiten hat. Da nun auf jedes Dreieck 2 R kommen, und die Summe aller Winkel um den Punkt innerhalb der Figur 4 R beträgt, ſolche aber nicht zur Figur gehören, ſo hat man die Summe aller zur Figur gehörigen Winkel in dem Umfange herum, wenn man ſo viel rechte Winkel nimmt, als die Figur Seiten hat, und davon vier rechte Winkel ſubtrahirt.

Ueberhaupt kommt die Summe aller Winkel am Umfange in allen Figuren mit einander überein, ſie mögen reguläre oder irreguläre ſeyn, wofern ſie nur eine gleiche Anzahl Seiten haben; daher kann man auch für die irregulären Vielecke zur Prüfung der Summe aller Winkel, die §. 117. in der Anmerkung erwähnte Tabelle gebrauchen.

Anmerkung.

Die erwähnte Tabelle iſt von vorzüglichem Nutzen beim Aufnehmen der Waldungen ꝛc. weil Flächen

dieſer

dieſer Art gewöhnlich aus dem Umfange oder der Peripherie durch Hülfe irgend eines Winkelmeſſers aufgenommen werden müſſen.

§. 124.

Aufgabe.

Jedes Vieleck aus allen Seiten und drei Winkeln weniger, als die Anzahl der Seiten beträgt, zu zeichnen, Fig. 88.

Aufloſung.

Man nehme ab (Fig. 88.) als Grundlinie an, und trage auf ab an a und b die gegebenen Winkel a und b (§. 51.), ſo wie auf die beiden noch unbeſtimmten Schenkel die Seiten ae und bc. Nimmt man alsdenn, wenn mehrere Winkel gegeben ſind, den dritten und trägt ihn in e, ſo kann man auch auf die unbeſtimmten Schenkel die Seite ed tragen. Hier beim Fünfeck aber ſind nur zwei Winkel zu geben nöthig, mithin nimmt man die beiden letzten Seiten ed und cd und beſchreibt damit aus e und c Bogen, die ſich in d ſchneiden, und die ganze Figur iſt gezeichnet.

§. 125.

Aufgabe.

Den Inhalt eines jeden Vielecks zu finden, Fig. 88 und 89.

Aufloſung.

1) Da ſich Fig. 88 bei d durch Diagonallinien ad und bd in ſo viel Dreiecke zerlegen läßt, als die Figur Seiten hat, weniger zwei (§. 122.), ſo kann man den Inhalt finden, wenn man jedes Dreieck für ſich berechnet (§. 83.) und den Inhalt in eine Summe bringt.

2) Oder

2) Oder, wenn zwei Dreiecks-Höhen af und dg (Fig. 89.) auf einerlei Diagonallinie cb gezogen werden, ſo kann man dieſe als eine gemeinſchaftliche Grundlinie anſehen, und den Trapezoid abcd ſuchen, indem man entweder die Summe der Höhen af + dg mit $\frac{1}{2}$ bc, oder bc mit $\frac{1}{2}$ (af + dg) multipliciret, und den Inhalt des Dreiecks bed, deſſen Höhe eh iſt, dazu addirt.

Es ſei z. B. nach n. 2. af = 140′; dg = 100′; bc = 286′; bd = 150′, und ch = 130′; ſo iſt

$\frac{1}{2}$bc = 143′	$\frac{1}{2}$bc = 143′	$\frac{1}{2}$bd = 75′
dg = 100′	af = 140′	ch = 130′
△ bdc = 14300 F²	5720	2250
	143	75
	△ abc = 20020 F²	△ bed = 9750 F²

Alſo 14300 F² = △ bdc
20020 — = △ abc
9750 — = △ bed

44070 F² oder 440 R² 70 F² die Fläche der ganzen Figur abcde.

Oder: wenn man den Trapezoid abcd für ſich berechnet;

af = 140′
dg = 100′

af + dg = 240′, alſo $\frac{1}{2}$(af + dg) = 120′
bc = 286

720
96
24

Trap. abcd = 34320 F²
△ bed = 9750 —

Der Inhalt der ganzen Fläche abcde = 44070 F²
oder 440 R² 70 F²

§. 126.

§. 126.

Soll nun ein dergleichen irreguläres Vieleck in eine gegebene Anzahl Theile getheilt werden, ſo geſchieht dies am vortheilhafteſten dadurch, daß die gegebene Figur in ſo viel Dreiecke getheilt wird, als durch Diagonallinien oder andere Theilungslinien möglich ſind. Dieſe Theilung nützt dem Forſtbedienten vorzüglich dazu, einen Theil eines Forſts in eine vorgeſchriebene Anzahl von Gehauen oder in Schläge nach der Größe des Flächeninhalts zu theilen, ohne daß man auf die Menge und Beſchaffenheit des zu ſchlagenden Holzes Rückſicht nimmt.

§. 127.

Aufgabe.

Jedes geradlinige Vieleck in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen, Fig. 91.

Aufloſung.

1) Man ſucht den Inhalt der ganzen Fläche (§. 125.) und dividirt denſelben mit der Theilungszahl, ſo giebt der Quotient einen dieſer gleichen Theile beſtimmt an.

2) Den Inhalt des Dreiecks (die Zerlegung der ganzen Fläche in Dreiecke iſt in n. 1. vorausgeſetzt), bei welchem man mit der Theilung anfangen will, ſubtrahirt man vom Quotient in n. 1., und dividirt den Reſt durch die halbe Grundlinie des ſubtrahirten Dreiecks, ſo erhält man die Höhe des Dreiecks, welches dem erſten noch zugeſetzt werden muß, wenn es ein verlangter Theil der Fläche werden ſoll. Die gefundene Höhe trägt man auf die Grundlinie des erſten Dreiecks und zieht durch den Endpunkt dieſer Höhe mit gedachter Grundlinie eine Parallellinie, welche die Seite des folgenden Dreiecks, von welchem das kleine Dreieck, welches die gefundene Differenz anzeigt, ſubtrahirt werden muß, durchſchneidet.

Zieht

Zieht man nun die erſte Theilungslinie, ſo hat man einen gleichen verlangten Theil des gegebenen Vielecks.

3) Halbirt man nun den verlangten Theil des Vielecks, und dividirt dieſe Hälfte durch die halbe erſte Theilungslinie, ſo hat man die Höhe eines Dreiecks, welches die Hälfte eines verlangten Theils beträgt. Zieht man alsdenn in der Weite dieſer gefundenen Höhe mit der erſten Theilungslinie eine Parallellinie, ſo ergiebt ſich auf der Seitenlinie des Vielecks der zweite Theilungspunkt. Dividirt man endlich dieſen halben Theil des Vielecks mit der Linie, die den zweiten Theilungspunkt giebt, ſo iſt der Quotient die Höhe eines Dreiecks, welches zu dem vorigen addirt werden muß, um den zweiten verlangten Theil des Vielecks zu erhalten. Dieſe Höhe trägt man mit der vorigen Linie parallel dem erſten Theilungspunkte auf die gegenüberſtehende Seite, ſo erhält man darauf abermals einen Theilungspunkt, der mit dem vorhin gefundenen durch eine gerade Linie verbunden werden kann. Auf dieſe Art hat man den zweiten verlangten Theil des Vielecks gefunden. Soll nun das Vieleck nur in drei gleiche Theile getheilt werden, ſo iſt der Reſt der verlangte dritte Theil.

Soll aber ein gegebenes Vieleck in 4, 5 und mehrere Theile getheilt werden, ſo wiederholt man die Regeln in n. 3. ſo oft, als es nöthig iſt, und endlich bleibt ſo der letzte Theil übrig.

Da dieſe Lehre zuſammengeſetzt und etwas verwickelt zu ſeyn ſcheint; ſo iſt es nothwendig, ſie durch ein Beiſpiel mehr zu erläutern.

Es ſei alſo Fig. 91 das Vieleck oder die Fläche abcde, welche in drei gleiche Theile getheilt werden ſoll. Darin iſt das △ dae, worin ad = 2 5′; e = 166′;
" " " △ bcd, " bd = 248′; c = 120′;
" " " △ abd, " ab = 330′; a = 226′.

Nun ſucht man nach n. 1. den ganzen Inhalt des Vielecks:

235′ = ad	113′ = ½ a Höhe	284′ = bd
83′ = ½ e Höhe	330′ = ab	60′ = ½ c Höhe
705	3390	17040 = △ bcd
1880	339	
19505 = △ dae	37290 = △ abd	

37290 = △ abd
19505 = △ dae
17040 = △ bcd

73835 F^2 = Inhalt des Vielecks abcde.

Da nun dieſes Vieleck in 3 gleiche Theile getheilt werden ſoll, ſo dividire man mit 3.

(73835 : 3) = 24611 F^2 = ⅓ von abcde.

Nach n. 2. ſubtrahirt man das Dreieck dae von dem gefundenen Quotienten, und man erhält

24611 F^2
19505 F^2

den Reſt = 5106 F^2

(5106 : ½ ad = 117′) = 436″ Höhe des △ adi, welche an das Dreieck dae geſetzt wird, und wodurch man den Punkt i, folglich auch die Theilungslinie di erhält, welche das erſte Drittel von abcde abſchneidet.

Nach n. 3. iſt (24611 F^2 : 2) = 123055 Z^2 = ½ von ⅓ abcde, und di = 210, alſo ½ di = 105′.

(123055 : 105) = 1171″² = der Höhe des △ dik, welches Dreieck ⅙ des Vielecks abcde iſt.

Wird nun in der Weite dieſer Höhe auf di eine Parallellinie gezogen, ſo findet man auf ab den Punkt k. Und da dk = di; ſo folgt, daß für das andere ⅙ von abcde, der Quotient der Höhe des Dreiecks kdl, dem vorigen dik gleich ſeyn müſſe. Wird nun durch eben dieſe Höhe

auf

auf kd eine Parallellinie gezogen, ſo giebt dieſe den Punkt l. Die Theilungslinie kl ſchneidet das zweite Drittel oder $\frac{2}{6}$ vom Vielecke abcde ab, und der Trapezoid bclk iſt das dritte und letzte Drittel der ganzen Fläche abcde. Mithin enthält das Vieleck die drei gleichen Theile diae + dikl + bclk.

§. 128.

Aufgabe.

Eine gegebene vielſeitige Figur in ungleiche Theile, und zwar ſo zu theilen, daß die Theilung von einem Dreiecke der Figur zum andern fortgehe, Fig. 90.

Auflöſung.

Sucht man den Inhalt der ganzen Fläche Fig. 90, nachdem ſie in Dreiecke zerlegt worden, ſo findet man dieſen 517 R^2 43 F^2, und zwar ſo, daß

das	△ abg	=	10368 F^2
"	△ gbe	=	6500 —
"	△ bcd	=	17825 —
"	△ bde	=	5500 —
"	△ egf	=	11550 —
	also zuſammen	=	51743 F^2 = 517 R^2 43 F^2.

Sollte man nun das Siebeneck in vier Theile und zwar ſo theilen, daß A, 20000 F^2; B, 15000 F^2; C, 10000 F^2, und D den Reſt von 6743 F^2 erhielte, ſo würde man auf folgende Art verfahren.

Man mache z. B. den Anfang der Theilung mit dem Dreiecke bcd, deſſen Inhalt 17825 F^2 beträgt; da nun A 20000 F^2 erhalten ſoll, ſo muß man zu dem Dreiecke bcd noch 2175 F^2 von dem Dreiecke bde dazu nehmen, damit man den Antheil des A ganz erhalte. Um dies möglich zu machen, ſucht man ſolchen auf ed = 130′, indem man ſchließt:

$$5500 : 130 = 2175 : x$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ \hline 65250 \\ 2175 \\ \hline \end{array}$$

$$5500 : 282750 \mid 51' 4'' = x$$

welche 51′ 4″ man auf ed von d nach h wegnimmt, und in h aus dem Winkel b eine Linie zieht. Dieſe Linie iſt die erſte Theilungslinie, und giebt den Antheil für A = 20000 F^2 vom Inhalt der ganzen Fläche; das ſo erhaltene Stück iſt der erſte Theil.

Nun ſoll man für B, 15000 F^2 abſchneiden. Zu dieſen nimmt man das Dreieck abg = 10368 F^2. Da aber noch 4632 F^2 zum Antheile für B fehlen, ſo nehme man von dem anliegenden Dreiecke gbe = 6500 F^2 dieſe 4632 F^2 weg, und ſetze ſie zu dem Dreiecke abg, ſo daß beide Stücke 15000 F^2 werden. Das hinzuzuſetzende ſuche man auf der Linie ge = 130′, und ſchließe, wie vorhin:

$$6500 : 130 = 4632 : x$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ \hline 138960 \\ 4632 \\ \hline \end{array}$$

$$6500 : 602160 \mid 92' 6'' = x$$

Dieſe 92′ 6″ nehme man auf ge, von g bis i weg, und ziehe in i aus dem Winkel b eine Linie; dieſe Linie iſt die zweite Theilungslinie, und giebt den Antheil für B = 15000 F^2. Das nun erhaltene Stück iſt der zweite Theil.

Nun ſind von dem Dreiecke bed noch 3325 F^2 übrig, welche das Dreieck beh ausmachen. Eben ſo hat man noch vom Dreiecke gbe 1868 F^2 übrig, die das Dreieck ibe ausmachen. Dieſe beiden Reſte betragen zuſammen 5193 F^2. Da aber D, 6743 F^2 auf ſein Antheil erhal-

ten ſoll, ſo muß man zur Summe jener Reſte noch 1550 F² vom Dreieck e g f hinzufügen. Dies geſchieht nach §. 95. auf folgende Weiſe: Man mißt aus i, aus welchem die Theilung auf f e vorgenommen werden ſoll, die Perpendicularlinie i k = 40, und dividirn mit ihrer Hälfte die vom Dreiecke e g f wegzunehmenden 1550 F², und der Quotient giebt die Anzahl der Fuße ꝛc. hier 77, die auf f e aus e in l getragen werden müſſen, um die Linie i l zu erhalten. Hat man i l gezogen, ſo iſt der Inhalt von l i b h e 6743 F², welches der Antheil für D und zugleich der dritte Theil iſt.

Das noch übrige Stück g f l i von der ganzen Figur, enthält 10000 F², alſo den Antheil für D, und iſt zugleich der vierte Theil.

Mithin iſt die ganze Fläche Fig. 91 in vier Theile und zwar ſo getheilt, daß in jedem Theile die vorgeſchriebene Anzahl von Quadratfußen enthalten iſt.

Anmerkung 1.

Sollen Theilungen der hier beſchriebenen Figur auf dem Felde, oder in Forſtrevieren wirklich abgeſteckt und markirt werden, ſo nimmt man Theilungspunkte und Theilungslinien aus der dazu entworfenen Zeichnung vom Papiere nach dem verjüngten Maßſtabe und beſtimmt die Winkel, unter welchen ſich ſolche Linien ſchneiden, nach Graden, Minuten ꝛc.; trägt Punkte und Linien mit der Meßkette auf die korreſpondirenden Linien in den Revieren und giebt die Abweichungen von einander durch irgend einen Winkelmeſſer an. Auf dieſe Art erhält man die Abtheilungen im Großen auf eben die Art, wie in der verjüngten Zeichnung.

Anmerkung 2.

Aus folgenden Schriften, deren Inhalt und Vortrag dem gegenwärtigen Zwecke entſprechen, kann man theils dieſe, theils einige andere Theilungsarten kennen lernen, welche die dabei befindlichen Zeichnungen ſehr verſinnlichen.

 1) An-

1) Anweiſung, die geradelinigen Figuren nach einer gegebenen Verhältniß ohne Rechnung zu theilen, mit illum. Kupfern. Frankfurth und Leipzig 1776. Eine Ueberſetzung im Auszuge aus Ozanam Cours de Mathematique Tom. III. p. 33.

2) Vollimhaus Anweiſung zu Felder- und Landtheilungen. Hannover und Leipzig, 1773.

IV.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der Kreiſe und anderer krummlinigen Figuren.

§. 129.

1) Jeder Kreis iſt einem Dreiecke gleich, deſſen Grundlinie ſo groß iſt, als die Kreisperipherie, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer gleicht.

2) Jeder Kreisausſchnitt aber gleicht einem Dreiecke, deſſen Grundlinie der Länge des Bogens, und deſſen Höhe dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich iſt, zu welchem der Ausſchnitt als ein Theil gehört.

3) Jeder Abſchnitt gleicht der Differenz des dazu gehörigen Bogens und des geradelinigen Dreiecks, welches im Kreisabſchnitte von den beiden Halbmeſſern und der zum Bogen gehörigen Sehne eingeſchloſſen wird.

Anmerkung.

Zur Richtigkeit dieſer Sätze wird nichts weiter erfordert, als daß man im Stande ſei, ſowohl die Kreisperipherie, als auch jeden Theil derſelben oder einen Kreisbogen als eine gerade Linie genau anzugeben und auszumeſſen. Da dies aber bisher unmöglich geweſen iſt, ſo muß man ſich mit einer geraden Linie begnügen, die beinah ſo groß iſt, als die Kreisperipherie, und deren

Größe zu jedem gegebenen Durchmeſſer nach §. 66. gefunden werden kann. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit den Kreisbogen, deren Länge man ebenfalls nur beinahe nach §. 68. auszumitteln im Stande iſt. Zu dem gegenwärtigen Zwecke gewähren die Methoden §. 66 und §. 68. Richtigkeit genug, jede Kreisperipherie und jeden Bogen im Längenmaße zu berechnen. Genauere Beſtimmungen lehrt die theoretiſche Geometrie, wenn man bis über die erſten Anfangsgründe hinweggeht.

Die gewöhnliche Vorſtellung zur Erläuterung der Sätze n. 1 und 2 iſt dieſe: Man denkt ſich nämlich ein reguläres Polygon in einen Kreis beſchrieben, wie Fig. 92 von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, die ſich im Umfange des Kreiſes verlieren. Wenn nun aus den Endpunkten ſolcher Polygonſeiten gerade Linien nach des Kreiſes Mittelpunkte gezogen werden, ſo erhält man auch unendlich viele Dreiecke, deren Grundlinien zuſammen genommen der Kreisperipherie gleichen, und deren Höhen dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich ſind. Alle dieſe Dreiecke in ein einziges gebracht, iſt alsdenn ein ſolches, das der Fläche des Kreiſes gleich iſt. Allein durch dieſe Vorſtellung gewinnt man nichts, und überhaupt gehört der Begriff von unendlich kleinen Linien nicht in die Elementargeometrie, und man wird daher wohl damit zufrieden ſeyn, was von der Beſtimmuug der Kreisperipherie §. 65 rc. geſagt worden iſt.

§. 130.

Kennt man alſo die Kreisperipherie und den Durchmeſſer im Längenmaße, ſo wird man die Fläche eines Kreiſes, vermöge §. 129 finden, wenn man entweder den vierten Theil des Durchmeſſers mit der Kreisperipherie oder den vierten Theil der Kreisperipherie mit dem Durchmeſſer, oder die halbe Kreisperipherie mit dem Halbmeſſer, multiplicirt. Auf eben dieſe Art findet man auch die Fläche eines Kreisausſchnitts, wenn man nämlich die halbe Länge des Bogens mit dem Halbmeſſer, oder den vierten Theil des Durchmeſſers mit der Länge des Bogens multiplicirt.

§. 131.

Der Inhalt eines Kreiſes verhält ſich zum Quadrate ſeines Durchmeſſers, wie beinahe 785 : 1000.

Denn, geſetzt der Durchmeſſer habe 100 gleiche Theile, Fuße oder Zolle ꝛc., ſo hat die Kreisperipherie 314 ſolcher Theile (§. 65). Multiplicirt man nun (§. 130.) die Kreisperipherie = 314 mit dem vierten Theile des Durchmeſſers = 25, ſo hat die Kreisfläche 25 . 314 oder 7850 Quadrate, deren Seiten den Theilen des Durchmeſſers gleichen, alſo Quadratfuße oder Quadratzolle ꝛc. Da nun das Quadrat des Durchmeſſers 100 . 100 oder 10000 iſt, und 7850 ſo wohl als 10000 mit 10 dividirt werden können (§. 58. Arithmetik), ſo kann man das Verhältniß der Kreisfläche zum Quadrate des Durchmeſſers durch 785 : 1000 ausdrücken. Bezeichnet C die Kreisfläche und D den Durchmeſſer, ſo iſt $C : D^2$ ein allgemeiner Ausdruck für dieſes Verhältniß. Setzt man $D^2 : C$ ſo iſt dies der allgemeine Ausdruck des Verhältniſſes vom Quadrate des Durchmeſſers zur Kreisfläche.

Anmerkung.

Andere Verhältniſſe $C : D^2$ enthalten größere Zahlen und ſind nicht genauer. So drücken es Merkel und Böhme durch die Zahlen 961 : 1225 aus; genauer iſt das Verhältniß $C : D^2$, wie 355 : 452, und in Rechnungen, wo nicht die größte Genauigkeit erfordert wird, kann man dies Verhältniß durch 7 : 9 oder 11 : 14 ausdrükken. Kehrt man dieſe Zahlen um, ſo hat man das Verhältniß $D^2 : C$ oder das Verhältniß des Quadrats vom Durchmeſſer zur Kreisfläche.

§. 132.

Aufgabe.

Aus dem Durchmeſſer oder der Peripherie eines Kreiſes, den Inhalt deſſelben zu finden.

Auf-

Auflöſung.

Wird der Durchmeſſer gegeben, ſo ſucht man nach §. 66. die Kreisperipherie; wird aber die letztere gegeben, ſo ſucht man den erſtern nach §. 67. Hierauf multiplicirt man die Peripherie durch den vierten Theil des Durchmeſſers, oder den Durchmeſſer mit dem vierten Theile der Kreisperipherie (§. 130.).

Es ſei z. B. der Durchmeſſer = 56′ = 5600‴ ſo iſt die Kreisperipherie 17584‴. Nun iſt $\frac{1}{4}$ von 56 = 14′ oder 1400‴; folglich

17584‴
1400‴
———
7033600
17584
———
Inhalt des Kreiſes = 24617600‴ = 24 R^2 61 F^2 76 Z^2

Oder: $\frac{1}{4}$ von 17584 iſt 4396‴.

4369 . 56 oder $\frac{7}{8}$
———
30772
———
246176″ = 24 R^2 61 F^2 76 Z^2 Fläche des Kreiſ.

Nach dem Verhältniſſe $D^2 : C$ findet man die Kreisfläche auf folgende Art: Wenn der Durchmeſſer 56′, ſo iſt das Quadrat, oder 56 . 56 = 3136. Nun ſchließt man

1000 : 785 = 3136′ : x
785
———
15680
25088
21952
———
1) 2461760 | 2461, 760 R^2 oder die
000 |
Fläche des Kreiſes beträgt 24 R^2 61 F^2 76 Z^2.

Nimmt man aus der Anmerkung zu §. 131. das Verhältniß 9 : 7, ſo kann man ſehen, wie die Reſultate von einander abweichen.

```
9 : 7 = 3136′ : x
              7
       ---------
    9) 21952|2439 F² oder 24 R² 39 F².
       18 ..
       --
        39 ..
        36 ..
        --
         35 .
         27 .
         --
          82
          81
          --
           1
```

Anmerkung.

Da das Verhältniß 1000 : 785 oder 785 : 1000 ſich auf das Lydolphiſche Verhältniß der Kreisperipherie zum Durchmeſſer gründet, und zu Berechnungen dieſer Art Richtigkeit genug hat, 9 : 7 aber offenbar zu klein iſt, ſo werden alle Berechnungen der Kreisflächen in der Folge nach dem Verhältniſſe 1000 : 785 vorgenommen werden.

§. 133.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreisausſchnitts zu finden, wenn der Halbmeſſer des Kreiſes und die Größe des Bogens gegeben ſind. Fig. 93.

Auflöſung.

Man ſucht zu 100, 314 und dem gegebenen Halbmeſſer ac (Fig. 93.) die vierte Proportionalzahl, ſo erhält man die halbe Kreisperipherie. Nun enthält die

halbe

halbe Kreisperipherie 180°; daher ſucht man ferner zu 180, dem gegebenen Bogen, und der gefundenen halben Kreisperipherie, die vierte Proportionalzahl und man bekommt die Länge des Bogens ab. Dieſe multiplicirt man mit der Hälfte des Halbmeſſers, und man erhält den Inhalt des Kreisausſchnitts acba.

Es ſei z. B. $ac = 8'$, der Bogen $ab = 70°$
$100 : 314 = 8' : x$

und es iſt $x = \frac{314 \cdot 8}{100} = 2512''$ die halbe Kreisperipherie.

Ferner $180° : 70° = 2512'' : x$

und es iſt $x = \frac{70 \cdot 2512}{180} = 976\frac{8}{9}'''$ die Länge des Bogens ab; $\frac{1}{2}$ von 8' giebt 4' oder 400''':

Alſo $976\frac{8}{9}$

8792

$400 = \frac{1}{2}ac$

9) 3516800 | 390755''' oder 39 F² 7 Z² 55 L²

welches der Inhalt des Kreisausſchnitts acba iſt.

§. 134.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Sehne eines Kreisbogens und deſſen Höhe (Entfernung von der Sehne), den Durchmeſſer, folglich auch den Mittelpunkt des Kreiſes zu finden, Fig. 94.

Auflöſung.

Die Sehne des Bogens (Fig. 94.) ſei ab, und die Höhe des Bogens de.

Man

Man ſucht zu de und db die dritte Proportionalzahl (§. 177 der Arithmetik). Dieſe iſt df. Addirt man nun zu df die Höhe des Bogens de, ſo iſt df + de = fe der Durchmeſſer, den man nur halbiren darf, um den Mittelpunkt c zu finden.

Es ſei z. B. de = 47′; db = 90′; ſo iſt

$$\begin{array}{r} 90 \\ 9\,0 \\ \hline 47)\ 8100 \end{array} \Big| \; 172'3''4''' = df$$ oder die dritte Proportionalzahl.

Ferner df = 17234‴
de = 4700‴

df + de = fe = 21934‴ der Durchmeſſer.

und (21934 : 2) = 10967‴ oder 1° 9′ 6″ 7‴ = ec.

§. 135.

Aufgabe.

Den Mittelpunkt eines Kreiſes zu finden, Fig. 95.

Auflöſung.

Man ziehe eine beliebige Sehne ab (Fig. 95); halbire dieſe ſenkrecht (§. 57.) durch die Linie cd, und cd halbire man ebenfalls durch die Linie ef, ſo iſt der Durchſchnittspunkt dieſer beiden Linien, welches Durchmeſſer ſind, oder g der Mittelpunkt des Kreiſes.

§. 136.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreisabſchnitts, der kleiner als ein Halbkreis iſt, zu finden, Fig. 96.

Auf=

Aufloſung.

Der Kreisabſchnitt (Fig. 96) ſei a b c d.

1) Man mißt die Höhe des Bogens c d und die Hälfte der Sehne, alſo a d, und ſucht den Durchmeſſer des Kreiſes (§. 134.).

2) Nun beſchreibt man um den Durchmeſſer einen Kreis trägt die Sehne a b in denſelben, und mißt den Winkel a e b mit dem Transporteur nach Graden ꝛc.

3) Berechnet den Kreisausſchnitt a e b c (§. 133.)

4) Endlich ſucht man auch den Inhalt des Dreiecks a e b, ſubtrahirt dieſes vom Inhalte des Ausſchnitts, und es bleibt der Inhalt des Abſchnitts a b c d übrig.

Es ſei z. B. $cd = 80'$; $ab = 240'$, alſo $\frac{1}{2} ab = ad = 120'$

$80 : 120 = 120 : x$.

und es iſt $x = \frac{120 \cdot 120}{80} = 180' = df$
$80' = cd$
$260' = cf$

und es iſt $(260 : 2) = 130' = ce$. n. 1.

Nun ſei nach n. 2. $aeb = 120$ Grade:

alſo $100 : 314 = 130' : x$

$$\begin{array}{r} 130 \\ \hline 9420 \\ 314 \\ \hline 40820 \end{array}$$

1) 40820 | 4082″ halbe Kreis-
00 peripherie.

Ferner nach n. 3. $180 : 120° = 4082'' : x$

und es iſt $x = \frac{120 \cdot 4082}{180} = 2721\frac{1}{3}$

$2721\frac{1}{3}$

2721⅓
8164
650 = ½ ce
1408200
48984
3) 5306600 | 17688⅔′ = aeb.

Nach n. 4. iſt ½ ab = 120′
7 0′ = de
8400 F^2 = △ aeb.

Der Kreisausſchnitt war 17688⅔ F^2
8400 F^2 = △ aeb
9288⅔ F^2 oder der Inhalt des Kreisabſchnitts abcd iſt = 92 R^2 88⅔ F^2

§. 137.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreisabſchnitts zu berechnen, der größer als ein Halbkreis iſt, Fig. 97.

Auflöſung.

Dieſe Aufgabe wird eben ſo wie die vorige aufgelöſt, nur daß in dem gegenwärtigen Falle das Dreieck aec (Fig. 97.) addirt wird, da es §. 136. ſubtrahirt wurde.

Es ſei z. B. ac = 140′; df = 180′, der Bogen fac = 240°.

1) 180 : 120 = 120 : x

und es iſt $x = \frac{120 . 120}{180}$ = 80 = db
180 = df
260 = fb
2) 130 = eb

2) 100:

2) $100 : 314 = 130 : x$

und es iſt $x = \frac{314 \cdot 130}{100} = 408\frac{2}{10}''$

3) $180^\circ : 240^\circ = 4082'' : x$

und es iſt $x = \frac{240 \cdot 4082}{180} = 5442\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r} 5442\frac{2}{3} \\ \hline 16328 \\ 650'' = \frac{1}{2}eb \\ \hline 816400 \\ 97968 \\ \hline 3)\ 10613200 \mid 35377\frac{1}{3} = \text{Kreisausſchnitt.} \end{array}$$

4) $de = 70'$; $\frac{1}{2}ac = 120'$

$$\begin{array}{r} 120 \\ 70 \\ \hline 8400\,F^2 = \triangle\,aec. \end{array}$$

Vorhin war in n. 3. der Kreisausſchnitt $= 35377\frac{1}{3}F^2$

$\triangle\,aec = 8400$

Der Inhalt des Abſchnitts afcd $= 43777\frac{1}{3}F^2$

d. i. $437\,R^2\,77\frac{1}{3}\,F^2 = afcd.$

Oder:

Man ſucht die Fläche des Kreiſes und den kleinen Abſchnitt, ſubtrahirt beide Inhalte von einander, ſo bleibt der große Abſchnitt afcd (Fig. 97.) übrig.

Man ſchließt:

$1000 : 785 = 260^2\ x$

$$
\begin{array}{r}
260 \cdot 260 = 67600 \\
785 \\
\hline
338000 \\
5408 \\
4732 \\
\hline
1)\ 53066000 \\
000
\end{array}
\Big|\ 530 R^2\, 66 F^2 =
$$

Inhalt der Kreisfläche.

Wird nun von der Kreisfläche = 53066 F^2
der kleine Abſchnitt = $9288\frac{2}{3}$ F^2
ſubtrahirt, ſo bleibt $43777\frac{1}{3}$ F^2
oder der große Abſchnitt a f c d übrig.

§. 138.

Aufgabe.

In einem gegebenen Kreis ein Quadrat zu beſchreiben, Fig. 101.

Auflöſung.

Man ſchneide den Kreis durch zwei ſenkrechte oder im Mittelpunkte a ſich kreuzende Durchmeſſer b d und c e, verbinde b c, c d, d e und e b durch gerade Linien, ſo iſt das Quadrat b c d e vollendet.

§. 139.

Aufgabe.

Die Länge der Seite eines Quadrats zu finden, welches in einen Kreis gezeichnet werden kann, Fig. 101.

Auflöſung.

Man multiplicirt den Halbmeſſer des Kreiſes mit ſich ſelbſt und die ſo erhaltene Quadratzahl abermal mit 2.

Aus

Aus dieſem doppelten Produkte der Quadratzahl vom Halbmeſſer, zieht man die Quadratwurzel, ſo erhält man die Seite bc, die ſich im Kreiſe von b nach c, von c nach d, und von d nach e eintragen läßt. Werden nun die Seiten bc, cd, de, eb gezogen, ſo iſt das Quadrat vollendet.

Es ſei ab = 12′, ſo iſt

$$\begin{array}{r} 12^2 = 144 \\ 2 \\ \hline \sqrt{} 2|88|\ 16'9''7''' = bc. \end{array}$$

Dieſe Linie bc = 1697‴ läßt ſich viermal in der Kreisperipherie herumtragen, und iſt demnach die Seite des verlangten Quadrats.

§. 140.

Aufgabe.

Um ein Quadrat einen Kreis zu beſchreiben, Fig. 101.

Auflöſung.

Man ziehe im Quadrate beide Diagonallinien, die ſich in a ſchneiden. a iſt der Mittelpunkt des Kreiſes. Aus a mit dem Halbmeſſer ab läßt ſich ein Kreis beſchreiben, deſſen Peripherie durch alle Winkelſpitzen des Quadrats läuft.

§. 141.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Seite bc (Fig. 101.) eines im Kreiſe beſchriebenen Quadrats, den Durchmeſſer des Kreiſes zu finden.

Aufloſung.

Man quadrirt bc und multiplicirt das Produkt durch 2. Zieht man nun aus dieſem Produkte die Quadratwurzel, ſo iſt dieſe der geſuchte Durchmeſſer bd.

Es ſei z. B. $bc = 1697''' + \frac{191}{1000}$, ſo iſt

$1697 \cdot 1697 = 2\,87\,98\,09$
191 addirt
$2\,88\,00\,00$
2
$\sqrt{5|76|00|00}\,|\,24' = bd$; oder der Durchmeſſer; $\frac{1}{2}\,bd = 12'$ aber der Halbmeſſer.

§. 142.

Ein Oval, wie Fig. 100. wird aus zwei Mittelpunkten b und c wie ein Kreis, und vermittelſt zwei anderer Kreisbogen aus n gezeichnet (§. 64.). Demnach beſteht die Fläche des Ovals (Fig. 100.) aus der Fläche eines Kreiſes gah + fde, aus einem länglichen Vierecke ghfe und aus zwei gleichen Kreisabſchnitten giel + hkfm.

§. 143.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Ovals zu finden, Fig. 100.

Aufloſung.

Man theile das Oval nach ſeiner Länge durch ad in zwei gleiche Theile. Die Linie ad ſelbſt theilt man in drei Theile, nämlich in ab, bc, cd; ſo ſind die Theilungspunkte b und c die Mittelpunkte der Kreiſe, durch welche das Oval gezeichnet iſt; halbirt man bc, ſo hat man im Mittelpunkte n. Ferner laſſe man ſenkrechte Linien auf b und c aus der Peripherie fallen, ziehe die Parallellinien

hf

hf und ge, und man hat in der Mitte des Ovals ein Viereck, welches ſo breit iſt als der Halbmeſſer ab, woraus das Oval gezeichnet worden. Oben und unten hat man endlich die noch übrigen Kreisabſchnitte giel und hkfm.

Hierauf berechne man jedes Stück im Ovale für ſich und bringe alle in eine Summe, welche den Inhalt des Ovals anzeigt.

Es ſei z. B. ad $= 18°$; gh $= 12°$, die Höhe der Bogen il $=$ mk $= 3°$. agbh $+$ ecfd iſt ein Kreis, zu welchem der Durchmeſſer $12°$ groß iſt, und ghfe iſt ein Oblongum, deſſen Länge $12°$ und die Breite $6°$ beträgt. Die Abſchnitte giel und hkfm, deren Sehnen ge und hf $= 7°$, deren Höhen il und mk $= 5'$ und deren Winkel in den dazugehörigen Kreisausſchnitten gme $= 37°$ ausmachen.

Nun verfährt man auf folgende Art:

1) $10000 : 785 = 12^2 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 144}{1000} = 113° 04'$ für agbh $+$ ecfd

2) Das Viereck: $12° =$ gh
$6° =$ ge
$72° =$ ghfe Inhalt des Vierecks.

3) il $= 5$; $\frac{1}{2}$ ge $= 35'$

und es iſt $5 : 35 = 35 : x$

x aber $= \frac{35 \cdot 35}{5} = 245' =$ lk
$5' =$ il
$250' =$ ik der Durchmeſſer
2) $125' =$ iln der Halbmeſſer

$100 : 314 = 125' : x$

und es iſt $x = \frac{314 \cdot 125}{100} = 392'5''$ die halbe Kreisperipherie

$180^\circ : 37^\circ = 3925'' : x$

und es iſt $x = \frac{37 \cdot 3925}{180} = 8068'''$ der Bogen

$$
\begin{array}{r}
8068''' \\
12500''' = \text{iln} \\
\hline
4034000 \\
16136 \\
8068 \\
\hline
\end{array}
$$

2) $100850000 \mid 504250\ Z^2$ = Inhalt des Ausſchnitts gnei

Den Inhalt des △ gne findet man:

$$
\begin{array}{l}
35' = \tfrac{1}{2}\text{ge} \\
120' = \text{ln Höhe des Dreiecks} \\
\hline
700 \\
35 \\
\hline
4200\ F^2 = \text{Inhalt des } \triangle \text{ gne}
\end{array}
$$

Der Inhalt des Ausſchnitts gnei war $= 504250\ Z^2$
Inhalt des Dreiecks gne $= 420000\ Z^2$

Inhalt des Abſchnitts giel $= 84250\ Z^2$
Inhalt des Abſchnits hkfm $= 84250\ Z^2$

Summe des Inhalts beider Abſchnitte $= 168500\ Z^2$

Nach n. 1 war $11304\ F^2$ der Inhalt der Kreisfläche
— — 2 — $7000\ F^2$ — — des Vierecks
— — 3 — $1685\ F^2$ — — d. beiden Abſchnitte.

Alſo iſt $20189\ F^2$, oder 201 Quadratruthen 89 Quadratfuß der geſammte Inhalt des Ovals.

Anmer.

Anmerkung.

Wenn man nach Feld- und Waldvermeſſungen zur Berechnung des Flächeninhalts kommt, ſo kommen häufig, beſonders an krummlinigen Gränzen, Kreisabſchnitte, oder dieſen beinahe gleiche Figuren vor, deren Bogen ohne große Weitläuftigkeit und viele Umſtände nicht ausgemittelt werden können. Um dieſe Umſtände zu vermeiden, und wenigſtens den Inhalt ſolcher Stücke nach Möglichkeit, aber kurz zu beſtimmen, theilt man z. B. bei wirklichen Kreisabſchnitten, wie z. B. Fig. 99 den Bogen a c b in drei gleiche Theile, wie bei e und f, und zieht von a durch e, ſo wie von b durch f gerade Linien, welche ſich auſſerhalb des Abſchnitts, in g ſchneiden, wo alſo auch g mit c zuſammen kommt, und c d für die Höhe des Bogens und das ganze Dreieck a c b, deſſen Höhe mit der Höhe des Bogens einerlei iſt, für den Kreisabſchnitt angenommen, und berechnet werden kann.

Kommen aber Kreisabſchnitte von beträchtlicher Höhe wie g h i g (Fig. 98.) vor, ſo zieht man anfänglich ein Dreieck g h i, worin die Spitze h, den höchſten Punkt des Bogens vorſtellt; behandelt man nun die auf den Seitenlinien des vorigen Dreiecks liegenden kleinen Kreisabſchnitte auf dieſelbige Art, und fährt ſo fort, bis man die ganze Fläche des gegebenen Kreisabſchnitts ſo in Dreiecke verwandelt hat, und addirt zuletzt alle auf dieſem Wege erhaltenen Dreiecke, ſo hat man den Inhalt einer ſolchen Figur zwar nicht vollkommen genau, doch für die Ausübung richtig genug beſtimmt. Dieſe letztere Art führt beſonders auf das Verfahren, Bogenſtücke oder andere krummlinige Gränzſtücke an Feldern und Waldungen mit einem ſolchen Grade der Richtigkeit zu berechnen, als es nur immer ohne viele Weitſchweifigkeit möglich iſt.

§. 144.

Die Theilung der Kreis- und Ovalflächen hat nichts beſonders. Sind ſie nur erſt auf das Papier entworfen oder gezeichnet, alsdenn werden ſie aus dem Mittelpunkte, ſo wie die regulären Polygone getheilt, wo-

bei die Ovalflächen wohl Schwierigkeiten machen möchten, wenn ſie gewöhnlicher, als geſchieht, in der Ausübung vorkämen. Die auf dem Papiere gefundenen Theilungspunkte und Linien mißt man alsdenn mit dem verjüngten Maßſtabe und trägt dieſe unter den gefundenen Winkel auf das Feld oder in die Waldungen.

§. 145.

Irreguläre krummlinige Figuren, wie z. B. Fig. 102, werden, ſo weit es angehet, in Dreiecke und Vierecke, und endlich in Kreisabſchnitte getheilt; jedes Stück wird beſonders berechnet und der Inhalt aller in eine Summe gebracht, welche denn dem Inhalte der irregulären krummlinigen Figur gleich iſt.

So wie man die Berechnung dieſer Art von Figuren nach Dreiecken, Vierecken und Kreisabſchnitten vornimmt. ſo wird größtentheils die Theilung derſelben verrichtet. Anfangs ſucht man die Summe des geſammten Inhalts, dividirt darein mit der Anzahl der Theile, in welche das Ganze ſoll zertheilt werden, und der Quotient giebt die Anzahl der Ruthen, Fuße rc. für jeden Theil insbeſondere. Die Größe eines jeden Theils wird nun durch Dreiecke oder Kreisabſchnitte, welche den Dreiecken zugeſetzt werden, eingetragen, und ſo werden von Stück zu Stück die Theilungslinien beſtimmt. Der Hauptſache nach iſt dieſe Methode ſchon bei der Theilung der Vielecke erläutert worden.

Die Berechnung der irregulären krummlinigen Figur 102, nämlich abcdefgh, wird dieſe hingeworfenen Sätze erläutern.

Dieſe Figur theilt man in das Fünfeck abcef und in einige Abſchnitte, die ſich größtentheils in Dreiecke verwandeln laſſen, wovon der Abſchnitt gh, weil er in das Fünfeck hineinfällt, wenn er berechnet worden, vom Inhalt deſſelben ſubtrahirt werden muß. Alle übrigen Flächen

chen aber, weil ſie insgeſammt innerhalb der Gränzen der gegebenen Figur liegen, werden für ſich berechnet, und ihr Inhalt wird in eine Summe gebracht.

1) Das Fünfeck abcef enthält:

a) Das Dreieck abf, worin bf = 540′, u. die Höhe a = 160′
b) — — bfe, — bf = 540′, — — — e = 134′
c) — — bce, — be = 542′, — — — c = 210′

folglich:

$$\begin{array}{r} 540 = bf \\ 80 = \tfrac{1}{2} a \\ \hline 43200\,F^2 = \triangle\, abf. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 134 = e \\ 540 = bf \\ \hline 5360 \\ 670 \\ \hline (72360:2) = 36180\,F^2 = \triangle\, bfe \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 542' = be \\ 105' = \tfrac{1}{2} c \\ \hline 2610' \\ 542 \\ \hline 56810\,F^2 = \triangle\, bce \end{array}$$

Addirt man nun

a) Das Dreieck abf = 43200 F²
b) — — bfe = 36180 —
c) — — bce = 56810 —

ſo iſt abf + bfe + bce = 136190 F² = abcef

2) Die Dreiecke als

△ ab, worin ab = 174′, und deſſen Höhe = 45′;
— bc, — bc = 210′ — — — = 75′;
— cd, — cd = 300′ — — — = 70′;
— de, — de = 225′ — — — = 55′;
— ef, — ef = 140′ — — — = 40′;
— fg, — fg = 180′ — — — = 45′;
— ha, — ha = 180′ — — — = 42′;
— gh, — gh = 140′ — — — = 30′;

 folg-

folglich:

87	105
45	75
435	525
348	735
3915 F^2 △ = ab	7875 F^2 = △ bc
35	225
300	55
10500 F^2 = △ cd	1125
	1125
	(12375 : 2) = 6187 $\frac{1}{2}$ F^2 = △ de
140	45
20	90
2800 F^2 = △ ef	4050 F^2 = △ fg
42	70
90	30
3780 F^2 = △ ha	2100 F^2 = △ gh

Addirt man nun

△ ab = 3915 F^2
— bc = 7875 —
— cd = 10500 —
— de = 6187 $\frac{1}{2}$ —
— ef = 2800 —
— fg = 4050 —
— ha = 3780 —
— gh = 2100 —

ſo iſt die Summe = 39107 F^2 50 Z^2
das Fünfeck a b c e f = 136190 F^2 addirt
175297 F^2 50 Z^2
2100 — = △ gh, welches in
173197 F^2 50 Z^2; das Fünfeck fällt, aber auſſerhalb der gegebenen Figur liegt.

Alſo

Alſo enthält die geſammte Fläche der Figur 1731 R^2 97 F^2 50 Z^2.

Anmerkung.

Daß der Grad der Richtigkeit bei der Berechnung und Theilung ſolcher irregulären Figuren, wie Fig. 102, nicht ſo groß ſeyn kann, als bei geradelinigen und beſonders bei regulären Figuren, lehrt die Natur der Sache.

V.

Von der Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der gemiſchtlinigen Figuren.

§. 146.

Da es eben ſo wenig beſtimmte Regeln für die Ausmeſſung, Berechnung und Theilung der gemiſchtlinigen Figuren giebt, als für dergleichen Behandlungen der krummlinigen Figuren, ſo muß man ſich auch hier damit begnügen, wenn man Mittel antrifft, durch welche man der Richtigkeit des vorgeſetzten Zwecks ſo nahe kommt, als möglich. In der Hauptſache ſind die Regeln für die Behandlung der gemiſchtlinigen Figuren die nämlichen, die bei den krummlinigen im vierten Abſchnitte angewandt wurden. In der Ausübung kommen Figuren beider Arten am häufigſten vor, weswegen auch der folgende praktiſche Theil der Geometrie nähern Unterricht geben wird, wie man dieſe Figuren behandeln ſoll, welches auch zugleich der Grund iſt, warum in der gegenwärtigen Abtheilung nur ſo viel davon erwähnt wird, als man unumgänglich zu wiſſen nöthig hat.

§. 147.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Figur zu finden, die zwiſchen zwei geraden Linien und ein Paar koncentriſchen Kreisbogen liegt, Fig. 103.

Aufloͤſung.

Die Figur ſei abcd. Jeder Bogen, ab ſo wohl als cd ſei im Längenmaße 48°, und jede der geraden Linien ac und bd ſei 18° lang.

Man ziehe, da die Bogen gleiche Länge und einerlei Abſtand von den dazugehörigen Sehnen haben, dieſe Sehnen ab und cd, ſo erhält man, da auch ac ♯ bd, ein Parallelogramm, welches, weil der weggenommene Kreisabſchnitt auf ab, durch einen eben ſo großen hinzugekommenen auf cd erſetzt wird, eben ſo viel Fläche faſſet, als die gegebene Figur.

Berechnet man nun dieſes Parallelogramm, ſo hat man zugleich den Inhalt der gegebenen Figur.

Da nun das Parallelogramm abcd rechtwinkelig iſt, ſo erhält man den Inhalt nach §. 106.

cd = 48° Länge
ca = 18 Breite

384
48

864 R^2 = abcd.

Anmerkung.

In dieſer Form kommen gewöhnlich ſchmale Ackerſtreifen vor, die anfänglich geradelinige Gränzen als Seitenlinien gehabt, dieſe aber durchs Abpflügen nach und nach verloren, und krumme, aber ebenfalls parallele Linien, alſo koncentriſche Kreisbogen erhalten haben.

§. 148.

Aufgabe.

Den Inhalt jeder gemiſchtlinigen Figur zu finden, Fig. 104.

Auf-

Auflöſung.

Es ſei Fig. 104. gbikcfe gegeben.

Man bringe eine ſolche Figur, ſo weit es nämlich möglich iſt, in gerade Linien, und zerlege ſie in Dreiecke, und zwar in ſolche, die ſich am bequemſten ausmeſſen und berechnen laſſen. Demnach umgebe man die gegebene Fläche mit geraden Linien (Blindlinien wie in der Figur), ſo iſt die ganze Fläche ein Viereck geworden, welches ſich in die Dreiecke dab und dcb aufs neue zerlegen läßt. Da beide Dreiecke auf einer gemeinſchaftlichen Grundlinie ſtehen, ſo kann man das Viereck leicht als ein Ganzes berechnen, wenn man die Grundlinie db mit der Hälfte der Summe der Höhen beider Dreiecke multiplicirt.

Nun ſei db = 644′; ac die Summe der Höhen beider Dreiecke = 494′; alſo $\frac{1}{2}$ ac = 247′.

Demnach ſetzt man:

$$
\begin{array}{r l}
644' & = db \\
247' & = \frac{1}{2}\, ac \\
\hline
4508 & \\
2576 & \\
1288 & \\
\hline
159068\,F^2 & = abcd
\end{array}
$$

Von dieſem Vierecke abcd aber müſſen, wie die Figur lehrt, folgende Flächen

1) Die Summe der Kreisabſchnitte epg + nrm + mql,

2) Der Kreisausſchnitt ibki, und

3) Die Summe der Dreiecke fde + gah,

ſubtrahiret werden, weil ſie nicht zur Figur gehören, ſondern außerhalb der Peripherie derſelben liegen. Demnach muß man dieſe Flächen einzeln berechnen, und ihre Summe

von

von dem berechneten Vierecke a b c d ſubtrahiren. Die Differenz oder der Reſt giebt alsdenn den Inhalt der gegebenen gemiſchtlinigen Figur an.

Man verwandle zu dieſem Zwecke diejenigen zu ſubtrahirenden Figuren in Dreiecke, die an und für ſich keine ſind (nach §. 143. Anmerkung) und meſſe die ſie beſtimmenden Stücke, und man hat

das $\triangle$ e d f, worin e f = 88′, und die Höhe d = 44′;
— — e p g, — e g = 160′, — — — p = 86′;
— — g h a, — g h = 150′, — — — a = 80′;
— — i b k, — i k = 110′, — — — b = 110′;
— — l q m, — l m = 90′, — — — q = 60′;
— — m r n, — m n = 85′, — — — r = 50′.

ſo iſt der Inhalt

88′ = e f
22 = ½ d
———
176
176
———
1936 F² = $\triangle$ e d f

166′ = e g
43′ = ½ p
———
498
664
———
7138 F² = $\triangle$ e p g

150′ = g h
40 = ½ a
———
6000 F² = $\triangle$ g h a

55′ = ½ i k
110′ = b
———
550
55
———
6050 F² = $\triangle$ i b k

90′ = l m
30′ = ½ q
———
2700 F² = $\triangle$ l q m

85′ = m n
25′ = ½ r
———
425
170
———
2125 F² = $\triangle$ m r n

Nun

Nun addirt man den Inhalt dieſer Dreiecke:

1936 F^2 = △ edf
7138 — = △ epg
6000 — = △ gha
6050 — = △ ibk
2700 — = △ lqm
2125 — = △ mrn

25949 F^2 = der Summe aller Dreiecke.

Das Viereck abcd war = 159068 F^2
Die Summe aller Dreiecke = 25949 —

133119 F^2

oder 1331 R^2 19 F^2 iſt der Inhalt der gegebenen gemiſchtlinigen Figur.

Allgemeine Anmerkung.

Einige andere Methoden, den Inhalt der Figuren durch Rechnung zu finden, die der Richtigkeit der Beſtimmung in der Ausübung angemeſſener ſind, aber auch mehr theoretiſche Geometrie erfordern, findet man in Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt, im Zwölften Kapitel, S. 370, wo auch zugleich auf die Fehler aufmerkſam gemacht wird, die bei der Berechnung der Figuren begangen werden, und die Mittel angezeigt ſind, wie dieſe Fehler möglichſt vermindert werden können, ſo daß durch ihren Einfluß die Richtigkeit wenig leidet.

Eben ſo vortheilhaft iſt die Verwandelung aller Flächenfiguren in gleichgroße Rechtecke oder Dreiecke, weil man dadurch in den Stand geſetzt wird, den Inhalt einer Figur, beſonders wenn ſie vielſeitig, oder krummlinig iſt, genauer zu berechnen, als es nach den gewöhnlichen Methoden geſchehen kann. Auch dieſe Lehre findet man kurz abgehandelt in Meinerts Anfangsgr. der Feldmeßk. im dreizehnten Kapitel. S. 382.

Dritte

Dritte Abtheilung.

Die Körpermeſſung oder die Stereometrie.

§. 149.

Die Körpermeſſung oder die Stereometrie lehrt, alle Arten von Körpern mit einem angenommenen Maße, welches ein Körper von bekannter Größe ſeyn muß, zu vergleichen, die Größe des Raums, den jeder Körper einnimmt, oder den körperlichen Inhalt auszumitteln, die Körper, deren Abmeſſungen bekannt ſind, verjüngt zu zeichnen, und wenn es die Umſtände nöthig machen, nach gegebenen Verhältniſſen oder nach vorgeſchriebenen Zahlen zu theilen.

In der Forſtgeometrie iſt dieſer Theil der theoretiſchen Geometrie um deswillen von großem Nutzen, weil außer der Größe der Flächen, die forſtwirthſchaftlichen Gegenſtände lauter natürliche Körper ſind, deren Größe nur durch die Lehren des gegenwärtigen Theils der Geometrie ausgemittelt werden können.

Die Lehren dieſes Theils der Geometrie ſetzen die Kenntniß der Längen- und Flächenmeſſung voraus, und zeigen, wie man durch Rechnung aus unmittelbar gemeſſenen Stücken eines Körpers, welche ſeine Größe beſtimmen, den Inhalt finden kann, ohne daß man nöthig hat, mit dem Maßkörper unmittelbar zu meſſen.

Anmerkung.

In der Forſtgeometrie kommen als körperliche Gegenſtände vorzüglich Baumſtämme, Bauhölzer, Holzmalter und Klaftern, Kohlenmeiler und dergl.

dergl. vor, deren Inhalt, nach einem angenommenen Körpermaße, jeder Förſter anzugeben oder zu berechnen wiſſen muß.

§. 150.

Die dem gegenwärtigen Zwecke entſprechenden Körper, deren Inhalt jeder Förſter zu berechnen verſtehen muß, ſind die in §. 31 bis §. 40. erklärten, unter welchen der Würfel, das Balkenſtück oder Parallelepipedum, der Cylinder oder die Walze und der Kegel, die wichtigſten ſind. Dieſe körperlichen Figuren muß man wenigſtens zu zeichnen wiſſen und durch Rechnung ihren Inhalt anzugeben verſtehen.

§. 151.

Der Maßkörper iſt der Würfel oder Kubus, von welchem das Maß auch den Namen Kubikmaß erhalten hat; daher denn auch die Ausdrücke Inhalt, körperlicher Inhalt und Kubikinhalt in der körperlichen Geometrie von einerlei Bedeutung ſind, denn ſie zeigen nichts anders als den Raum an, den Körper nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnehmen. Nach der Seitenlinie des Würfels erhält das Maß den Namen Kubikruthe, oder Kubikzoll, Kubiklinie ꝛc. Die Eintheilung, ſo wie die Verwandelung der größern Maßkörper in kleinere, und umgekehrt, ſind in der Arithmetik §. 94 und §. 207. erwähnt, womit man §. 31. der Geometrie vergleichen kann. Nach der in der Geometrie angenommenen Maßvertheilung hat die Kubikruthe 1000 Kubikfuß, ſo wie der Kubikfuß 1000 Kubikzoll ꝛc.

Um ſich davon zu überzeugen, betrachtet man den Würfel Fig. 105, deſſen Länge und Breite in der Grundfläche bd = 10, alſo die Grundfläche ſelbſt = 100 iſt. Da nun die Höhe ba auch 10 iſt, und das Produkt 100. 10 = 1000, ſo iſt dieſer Würfel, der eine Kubikruthe heißen

heißen mag, durch dieſe Theilung in ſeine 1000 Kubikfuße eingetheilt. Wäre bd = 12, ſo würde die Grundfläche 12 . 12 oder 144, und der Würfel ſelbſt 12 . 144 oder 1728 ſeyn, d. i. Eine Kubikruthe hat nach der zwölftheiligen Eintheilung 1728 Kubikfuß ꝛc.

§. 152.

Aufgabe.

Einen Würfel zu zeichnen, Fig. 106.

Auflöſung.

Man zeichne die Grundfläche des Würfels, oder das Quadrat bhci = a. Auf den Ecken oder Winkelſpitzen errichtet man ſenkrechte Linien bd, ce, hf, ig, jede = bc = der Seitenlinie des Würfels. Verbindet man die Endpunkte dieſer Perpendikularen mit geraden Linien, und denkt ſich in jede zwei einander entgegengeſetzte Ebenen gelegt, ſo iſt der Raum begränzt und folglich der Würfel gezeichnet.

Da man aber bei einem Würfel nicht mehr als drei Seiten zu Geſichte bekommt, ſo zeichnet man eine Seitenfläche a, und verbindet mit dieſer die beiden Seiten mit bc, und cd parallel und gleich ſo, daß die Seite bc unter einem beliebigen Winkel geſchnitten wird, ſo hat man auch einen Würfel Fig. 27. gezeichnet.

Anmerkung.

Durch die Zeichenkunſt kann man Körper auf verſchiedene Art ausdrücken, oder dem Auge darſtellen. Unter dieſen ſind folgende zwei für die theoretiſche Geometrie ſowohl, als auch für die praktiſche Forſtgeometrie hinreichend, nämlich die Abbildung der Körper im geometriſchen und im perſpektiviſchen Aufriſſe. Im geometriſchen Aufriſſe entdeckt das Auge an einem Würfel, und überhaupt an einem viereckigen Körper nur eine Fläche, nämlich eine Seitenfläche unverkürzt;

im

im perſpektiviſchen Aufriſſe aber an einem viereckigen Körper drei Flächen, wovon eine dem Auge am nächſten ſteht und ſowohl verkürzt als auch unverkürzt erſcheinen kann. Hier Fig. 27. erſcheinen die drei Seitenflächen, wovon zwei verkürzt ſind. Um das Auge noch mehr zu täuſchen, ſich einen Körper auf einer Ebene gezeichnet vorzuſtellen, überträgt man die dem Auge entferntern Flächen mit Tuſche und zwar in dem Grade der Stärke, in welchem ſie vom Auge entfernt erſcheinen ſollen, d. i. man giebt den Körpern Licht und Schatten. Die dem Lichte zugekehrten Seiten werden blaß, die dem Lichte abgekehrten aber dunkel gehalten. Dieſes Kunſtgriffes bedient man ſich auch bei den Gränzen der Körper, die Linien ſind, und durch Hülfe der Reißfeder mit Tuſche ausgezogen werden. Iſt die Abbildung ein Viereck wie a (Fig. 27.) und man nimmt das Licht in b in der Diagonallinie bd einfallend an, ſo heißen die Schenkel des Winkels b Licht-, die entgegengeſetzten Seiten, wie cd und die Grundlinie, Schattenlinien. Die Lichtlinien überzieht man nur ſchwach, die Schattenlinien aber ſtark mit Tuſche.

Alle übrigen Regeln laſſen ſich aus den hier nur hingeworfenen Bemerkungen entwickeln.

Ueberhaupt kann man die vorhin erwähnte Perſpektiv, die natürliche Perſpektiv nennen, und ihre Regeln am leichteſten aus aufmerkſamen Beobachtungen beleuchteter Körper erlernen. Hat man verjüngte Körper von Glas, oder aus Drath zuſammen geſetzt, ſtellt dieſe in verſchiedenen Lagen vor ſich hin, und zeichnet ſie ſo, wie ſie dem Auge nach ihren Abmeſſungen erſcheinen, und giebt denſelben das Licht, welches ſie entweder von der Sonne, oder irgend einer andern Beleuchtung erhalten, ſo wird man nach und nach in den Stand geſetzt, die Körper ſo zu zeichnen, wie ſie in der Natur dem Auge in gewiſſen Entfernungen und in vorgeſchriebenen Lagen erſcheinen.

§. 153.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Würfels zu finden, Fig. 105.

Aufloſung.

Man mißt die Seite ab des Würfels Fig. 105. mit einem bekannten Längenmaße und macht davon die Quadratzahl, ſo hat man die Grundfläche abcd. Wird dieſe abermals mit der gemeſſenen Seite, als Höhe des Würfels, multiplicirt, ſo giebt dies Produkt den Inhalt des Würfels, der mit dem Maße einerlei Namen hat, womit die Seite iſt gemeſſen worden.

Oder kürzer: Man mache die Kubikzahl von der Seite des Würfels, ſo hat man den Inhalt.

Iſt z. B. die Seite ab = 1, ſo iſt $1 \cdot 1 = 1^2 = 1$ die Grundfläche abcd; $1^2 \cdot 1 = 1$ der Inhalt des Würfels. Die Seite ab eines andern Würfels ſei = 26', ſo iſt

$$\begin{array}{r l} 26' & = ab \\ 26' & = ab \\ \hline 156 & \\ 52 & \\ \hline 676' & = abcd \text{ Grundfläche} \\ 26' & = ab \\ \hline 4056 & \\ 1352 & \\ \hline 17576 F^3 & \text{oder} \end{array}$$

17 Kubikruthen 576 Kubikfuß Inhalt des Würfels. Demnach verhält ſich der Würfel, deſſen Seite 1, zum Würfel deſſen Seite 26 iſt, wie $1^3 : 26^3$, oder wie $1 : 17576$, demnach enthält der größere den kleinern Würfel in dieſem Falle 17576 mal, und daher ſagt man kurz, der Würfel ſei 17576 Kubikfuß groß.

§. 154.

Aufgabe.

Ein Balkenſtück oder ein Parallelepipedum zu zeichnen, Fig. 107.

Auflöſung.

In der Hauptſache verfährt man wie beim Würfel, nur daß hier mehrerlei Abmeſſungen vorkommen. Man zeichnet nämlich nach Fig. 107. die Grundfläche aufs Papier, trägt auf die Ecken die Höhe des Parallelepipedums rechtwinkelig auf, und zieht die Endpunkte durch Parallellinien zuſammen. Oder da auch hier, wie (Fig. 28.) zeigt, nur drei Seiten dem Auge auf einmal erſcheinen, und das Parallelepipedum aus einem Geſichtspunkte gezeichnet werden ſoll, ſo zeichnet man das längliche Viereck a als eine Seitenfläche, und verbindet mit dieſer die beiden andern Seiten durch Parallellinien unter einem Winkel, unter welchem das Auge den Körper betrachten will, ſo iſt die Zeichnung vollendet.

Anmerkung.

Die Ausarbeitung und das Anlegen, oder Licht und Schatten richtet ſich nach §. 152. Anmerkung.

§. 155.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Balkenſtücks oder eines Parallelepipedums zu finden, Fig. 107.

Auflöſung.

Man multiplicirt die Länge b c mit der Breite b d (Fig. 107.), ſo hat man die Grundfläche b d c f. Wird hierauf die gefundene Grundfläche mit der Höhe c e multiplicirt, ſo giebt das Produkt den Inhalt des Parallelepipedums.

Iſt z. B. die Länge bc = 310′, die Breite bd = 120′, und die Höhe ce = 134′ gemeſſen worden, ſo iſt

310′ = bc
120′ = bd
―――――
6200
31
―――――
37200′ = Grundfläche bdcf
134′ = ce
―――――
148800
1116
372
―――――
4984800 F^3, oder 4984 Kubikruthen 8 Kubikfuß, Inhalt des Parallelepipedums.

§. 156.

Aufgabe.

Jedes vielſeitige Prisma zu berechnen.

Auflöſung.

Man ſucht die Grundfläche, und multiplicirt dieſe mit der Höhe, ſo iſt das Produkt der Inhalt.

Da die Grundfläche ein reguläres Polygon iſt, ſo wird der Inhalt deſſelben nach §. 119. berechnet.

Es ſei z. B. die Grundfläche 28500 F^2, die Höhe aber 96 Fuß lang, ſo iſt

28500 F^2 Grundfläche
96′ Höhe
―――――
171000
2565
―――――
2736000 F^3, oder 2736 Kubikruthen, der Inhalt des Prisma.

Anmer-

Anmerkung.

Auch der Inhalt eines ungleichſeitigen Prisma würde auf dieſelbige Art gefunden, wenn man nur erſt den Inhalt der Grundfläche berechnete, und in dieſe mit der Höhe multiplicirte.

Die Zeichnungsart der vielſeitigen prismatiſchen Körper läßt ſich leicht aus der des Würfels und des Balkenſtücks herleiten.

§. 157.

Kennt man den Inhalt des Parallelepipedums, oder überhaupt der prismatiſchen Körper, ſo findet man, wenn man mit der Höhe den Inhalt dividirt, die Grundfläche; der Quotient aber der Grundfläche in den Inhalt, giebt die Höhe. Hiernach laſſen ſich mancherlei Aufgaben auflöſen, die in der Forſtwirthſchaft ihre Anwendung finden.

§. 158.

Aufgabe.

Einen Cylinder oder eine Walze zu zeichnen, (Fig. 30.)

Auflöſung.

Man zeichne den Durchmeſſer der Grundfläche ab, und ziehe durch den Mittelpunkt eine ſenkrechte Blindlinie cd = der Länge oder Höhe des Cylinders. Theilt man dieſe Linie in e in zwei gleiche Theile, ſo kann man mit ea einen Bogen acb beſchreiben. Verlängert man cd über ab, und beſchreibt den Bogen unterwärts ab mit dem nämlichen Halbmeſſer, ſo hat man eine perſpektiviſche Grundfläche. Eben ſo verfährt man am andern Ende des Cylinders, indem man den Bogen gdf zeichnet. Verbindet man nun ga und bf mit geraden Linien ⋕ cd, ſo iſt der verlangte Cylinder gezeichnet.

Anmerkung.

Walzen oder walzenförmige Körper erhalten Licht und Schatten ihrer Natur nach ſo, daß wenn das Licht nach der Richtung ed fällt, der obere Theil nur ſchwach, der untere aber ſtark angelegt wird. Die Mitte der Rundung über b nach d zu bleibt weiß, oder hat das Licht.

§. 159.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Walze oder eines Cylinders zu finden, Fig. 30.

Auflöſung.

Man meſſe den Durchmeſſer der Grundfläche und die Höhe, ſuche aus dem Durchmeſſer die Grundfläche nach §. 132, multiplicire dieſe mit der Höhe (Länge), ſo giebt das Produkt den Inhalt des Cylinders. Es ſei z. B. Fig. 30. der Durchmeſſer ab = 24″, die Höhe oder Länge des Cylinders aber ag = 286″.

Man ſchließe:

```
1000 : 785 = 24 . 24 : x
       576   ———————
    ———————    576
      4710
     5495
    3925
   ———————
1)  452160 | 45216‴ die Grundfläche acbe
       000 |
               2860‴ = ag
         ——————————
           2712960
          361728
          90432
         ——————————
         129317760 L³
```

129317760 L³ oder der Inhalt der Walze beträgt 129 Kubikfuß 317 Kubikzoll und 760 Ku-

bikli-

bikklinien, welche man auch ſo 129 F³ 317 Z³ 760 L³, oder ſo 129, 317760 F³ ausdrücken kann.

§. 160.

Aus dem Inhalte des Cylinders, wenn überdies ſeine Höhe bekannt iſt, findet man die Grundfläche, wenn man mit der Höhe in den Inhalt dividirt; die Höhe aber wird gefunden, wenn man den Quotient der Grundfläche in den Inhalt ſucht. Wie man aus der Grundfläche die Peripherie oder den Durchmeſſer finden kann, wenn eins dieſer Stücke bekannt iſt, begreift man aus §. 132.

§. 161.

Aufgabe.

Einen Kegel zu zeichnen, Fig. 29.

Auflöſung.

Man zeichne den Durchmeſſer der Grundfläche ab (Fig. 29.) und errichte aus dem Mittelpunkte c eine ſenkrechte Linie in der gegebenen Höhe cd, welches die Höhe des geraden Kegels iſt. Zieht man nun wie bei dem Cylinder die Bogen aeb ober- und unterwärts des Durchmeſſers, und verbindet man überdies ad und bd mit geraden Linien, als Seitenlinien, ſo iſt der Kegel gezeichnet.

§. 162.

Jedes dreiſeitige Prisma kann man als ein Ganzes für ſich, aber auch als die Hälfte eines Parallelepipedums betrachten, wenn die Grundfläche des dreiſeitigen Prisma die Hälfte der Grundfläche des Parallelepipedums iſt, und beider Körper Höhen gleich ſind. Denn die Grundfläche des Parallelepipedums iſt ein Parallelogram, welches durch eine Diagonallinie in zwei gleiche Dreiecke getheilt werden kann. Auf einer ſolchen Grundfläche ſteht ein

dreiſeitiges Prisma, wenn es unter den vorigen Bedingungen die Hälfte des Parallelepipedums iſt.

Wird ein dreiſeitiges Prisma aber als ein für ſich beſtehendes Ganze betrachtet, ſo kann es durch Diagonalflächen der Länge nach in drei Pyramiden getheilt werden, die jede für ſich mit dem Prisma einerlei, oder eine gleiche Grundfläche und Höhe haben.

Demnach iſt jede dreiſeitige Pyramide der dritte Theil eines dreiſeitigen Prismen von einerlei Grundfläche und Höhe; oder jede dreiſeitige Pyramide iſt der ſechste Theil eines Parallelepipedums, das gegen die Pyramide eine doppelt ſo große Grundfläche, aber gleiche Höhe mit ihr hat. Da nun alle vielſeitigen Pyramiden durch Diagonallinien in der Grundfläche, und darein gelegte Durchſchnitte, in dreiſeitige zerlegt werden können, ſo iſt der Satz allgemein.

Ferner ſind alle Cylinder und Prismen oder Parallelepipeda auf gleichen Grundflächen in gleichen Höhen gleich; folglich iſt auch ein Cylinder einem dreiſeitigen Prisma unter den vorigen Bedingungen gleich. Demnach muß auch ein Kegel der dritte Theil eines Cylinders ſeyn, wenn beide Körper einerlei Grundfläche und Höhe haben. Vergleicht man nun dreiſeitige Pyramiden und Kegel mit einander, ſo ſind beide gleich, wenn ſie gleiche Grundflächen und einerlei Höhen haben. Aus dem vorhergehenden aber ergiebt ſich auch, daß jede (auch vielſeitige) Pyramide einem Kegel an Größe gleicht, wenn die Grundflächen ſo wie die Höhen beider gleich ſind.

Auf dieſe Sätze gründet ſich die Berechnung des körperlichen Inhalts der Kegel und Pyramiden.

§. 163.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Kegels zu finden, Fig. 29.

Auf-

Aufloſung.

1) Man ſucht die Grundfläche des Kegels (§. 132.) und multiplicirt ſolche mit dem dritten Theile der Höhe.

2) Oder: Man multiplicirt die Grundfläche mit der ganzen Höhe des Kegels, ſo hat man den Inhalt eines Cylinders oder einer Walze von gleicher Grundfläche und Höhe mit dem Kegel; dividirt man nun dieſen Inhalt durch die Zahl 3, ſo giebt der Quotient den Inhalt des Kegels.

Es ſei z. B. (Fig. 29.) $ab = 24''$, alſo $(ab)^2 = 576''$; $cd = 219''$, alſo $\frac{1}{3}\,cd = 73''$.

Nach n. 1. $1000 : 785 = 576'' : x$

```
          576
        -----
         4710
        5495
       3925
     --------
1)   452160 | 452'' 16''' = Grundfläche
        000 |
```

```
            45216''
               730''' = 1/3 cd
           ---------
            1356480
           316512
         -----------
           33007680''' oder 33 F³ 7 Z³
```

680 L^3 = Inhalt des Kegels.

Oder, nach n. 2. 45216 L^2 die Grundfläche

```
          2190''' die ganze Höhe cd
        ---------
        4069440
        45216
       90432
     ---------
3)   99023040 | 33007680 L³, oder
```

33 F^3 7 Z^3 680 L^3 = Inhalt des Kegels.

Anmerkung.

Hieraus ergiebt ſich von ſelbſt die Vorſchrift, nach welcher man den Kubikinhalt einer jeden Pyramide, ſie mag drei- oder vielſeitig ſeyn, zu berechnen im Stande iſt, nämlich: Man ſucht zuerſt den Quadratinhalt der Grundfläche, multiplicirt dieſen mit der Höhe der Pyramide und dividirt das erhaltene Produkt durch 3; oder man multiplicirt ſogleich die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe; oder man macht das Produkt aus dem dritten Theile der Grundfläche in die ganze Höhe. Jede dieſer Rechnung giebt den Inhalt der Pyramide.

§. 164.

Aufgabe.

Den Inhalt eines abgekürzten Kegels zu finden, Fig. 108.

Auflöſung.

Es ſei der abgekürzte Kegel abcd (Fig. 108.)

Man ſchließt: Wie die Differenz ah der beiden Halbmeſſer ag und cf zu der Höhe ch = gf des abgekürzten Kegels, ſo der große Halbmeſſer ag zur Höhe ge des ganzen Kegels.

Ferner ſucht man nun aus der Höhe ge und dem Durchmeſſer ab der Grundfläche den Inhalt des Kegels aeb (§. 163.). Subtrahirt man ch oder gf, d. i. die Höhe des abgekürzten Kegels, von ge als der Höhe des ganzen Kegels, ſo giebt die Differenz in ef die Höhe des kleinen Kegels ced oder der obern Spitze. Berechnet man ferner aus dieſer, nämlich aus ef und dem dazu gehörigen Durchmeſſer cd den Inhalt dieſes kleinern Kegels ced, und ſubtrahirt den Inhalt vom Inhalte des größern Kegels aeb, ſo giebt die Differenz den Inhalt des abgekürzten Kegels abcd.

Es ſei z. B. $ab = 36'$; $\frac{1}{2}ab = ag = 18'$; $cd = 20'$; $\frac{1}{2}cd = cf = 10'$; $ch = af = 12'$, ſo iſt $ag - cf = 18' - 10' = 8' = ah$.

$$8 : 12 = 18 : x$$

und es iſt $x = \frac{12 \,.\, 18}{8} = 27' =$ eg Höhe des größern oder ganzen Kegels aeb.

Um die Grundfläche des ganzen Kegels zu finden, ſchließt man:

$$1000 : 785 = 36.36 : x$$

oder $1000 : 785 = 1296 : x$,

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 1296}{1000} = 101736''$

$90'' = \frac{1}{3}\, eg$

$9156240\, Z^3$ oder der Inhalt des ganzen Kegels aeb beträgt $9 R^3\ 156 F^3\ 240 Z^3$.

Um die Grundfläche des kleinern Kegels, oder der Spitze ced zu finden, ſchließt man abermals:

$$1000 : 785 = (20.20)' : x$$

oder $1000 : 785 = 400 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 400}{1000} = 314\, F^2 =$ Grundfläche des kleinern Kegels ced.

Nun iſt $eg = 27'$

$ch = 12'$

$eg - ch = 15' = ef$.

Nimmt man $\frac{1}{3}$ von ef, ſo hat man 5 Fuß;

und es iſt $314\, F^2$ = Grundfläche

5 = $\frac{1}{3}$ der Höhe ef

$1570\, F^3$ = Inhalt des kleinern Kegels ced.

Oben

Oben war aeb = 9156240 Z^3
ced = 1570000 Z^3 ſubtrahirt

aeb — ced = 7586240 Z^3;

alſo iſt der Inhalt des abgekürzten Kegels abcd = 7 R^3 586 F^3 240 Z^3.

Anmerkung 1.

Hieraus läßt ſich begreifen, wie man den Inhalt einer abgekürzten Pyramide finden kann, wenn man nämlich ſowohl den Inhalt der ganzen Pyramide als auch den Inhalt der kleinern oder der Spitze ſucht, und beide Inhalte von einander ſubtrahirt. Die Differenz giebt den Inhalt der abgekürzten Pyramide.

Anmerkung 2.

Die Kohlenmeiler haben gewöhnlich eine koniſche oder kegelartige Form, jedoch ſind ſie weder ganz vollkommene Kegel, noch vollkommene abgekürzte Kegel. Berechnet man ſie wie ganze Kegel, ſo giebt der Inhalt etwas zu viel; berechnet man ſie aber wie abgekürzte Kegel, ſo giebt der Inhalt etwas zu wenig. Ihr wahrer Inhalt liegen zwiſchen den genannten Kegeln.

Vielleicht könnte man dadurch der Wahrheit am nächſten kommen, wenn man einen Kohlenmeiler einmal wie einen ganzen, und dann wie einen abgekürzten Kegel berechnete. Würden alsdenn beide Kegel von einander ſubtrahirt, und man ſetzte die halbe Differenz dem abgekürzten Kegel zu, ſo würde dieſer Inhalt vom wahren Inhalte nur wenig verſchieden ſeyn.

Man ſehe den erſten Band des Schauplatzes der Künſte und Handwerker. Ueberſetzt v. Juſti. Berlin, Stettin u. Leipzig 1762. Die Kunſt des Kohlenbrennens ꝛc. von du Hamel du Monceau.

§. 165.

§. 165.

Eine **Kugel** entſteht, wenn ein Halbkreis ſich um ſeinen unverrückten Durchmeſſer bewegt. Dieſer Durchmeſſer heißt die **Axe der Kugel** und der Mittelpunkt des bewegten Halbkreiſes iſt der **Mittelpunkt der Kugel**. Die krumme Oberfläche, die durch die Bewegung der Peripherie des Halbkreiſes entſteht, wird die **Kugelfläche** genannt. Der **Halbmeſſer der Kugel** iſt die Entfernung der Kugelfläche vom Mittelpunkte. Auch bei der Kugel iſt der Durchmeſſer doppelt ſo groß, als der Halbmeſſer. Die Durchmeſſer einer Kugel, ſo wie ihre Halbmeſſer ſind gleich. Alle Kugeln ſind einander ähnlich, und diejenigen ſind gleich, deren Halbmeſſer oder Durchmeſſer gleich ſind.

Ein Durchſchnitt durch einen Durchmeſſer der Kugel giebt einen **größten Kreis**, deſſen Halbmeſſer und Durchmeſſer mit dem Halbmeſſer und Durchmeſſer der Kugel einerlei iſt. Durch einen ſolchen Durchſchnitt zerfällt die Kugel in zwei gleiche Theile, die man **Halbkugeln** nennt.

§. 166.

Den Inhalt einer Kugel findet man durch Vergleichung der Kugel mit dem Cylinder. Wenn Kugel und Cylinder einerlei Höhe haben, und des Cylinders Grundfläche ſo groß iſt, als der größte Durchſchnitt der Kugel, ſo iſt **die Kugel Zweidrittel von der Größe des Cylinders**. Setzt man unter dieſen Bedingungen den Cylinder = 3, ſo iſt der Inhalt der Kugel = 2. Da nun ein Kegel der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe iſt (§. 162.), ſo iſt die Kugel unter den vorigen Bedingungen doppelt ſo groß, als ein Kegel. Setzt man alſo den oben beſchriebenen Cylinder = $\frac{3}{3}$; ſo iſt die Kugel $\frac{2}{3}$ und der erwähnte Kegel $\frac{1}{3}$. Oder wenn der Cylinder 3 iſt, ſo iſt die Kugel 2 und der Kegel 1, oder der Cylinder : Kugel : Kegel = 3 : 2 : 1.

§. 167.

§. 167.

Aufgabe.

Den Inhalt einer Kugel zu finden.

Auflöſung.

Man ſuche zu 1000,785 und zum Quadrate des Durchmeſſers die vierte Proportionalzahl, ſo erhält man den größten Kreis oder Durchſchnitt der Kugel. Wird dieſer mit dem Durchmeſſer der Kugel multiplicirt und das Produkt mit $\frac{2}{3}$ dividirt, ſo hat man den Inhalt der Kugel.

Oder, man multiplicirt den größten Durchſchnitt der Kugel mit $\frac{2}{3}$ vom Durchmeſſer, ſo giebt das Produkt ebenfalls den Inhalt der Kugel.

Es ſei z. B. der Durchmeſſer einer Kugel 12 Fuß, ſo iſt $12^2 = 144$, und man findet durch

1000 : 785 = 144 : x
144
———
3140
3140
785
———
1) 113040 | 11304 Z^2 die größte Durchſchnittsfläche.
000 |

Da nun der Durchmeſſer 120″
———
226080
11304
———
ſo iſt 1356480 Z^3 der Inhalt des Cylinders.

Dividirt man mit $\frac{2}{3}$, ſo iſt das nichts anders, als man multiplicirt den Inhalt des Cylinders mit 2, und dividirt das Produkt durch 3, nämlich

1356480 Z^3
2
———
3) 2712960 | 904320 Z^3

oder der Inhalt der Kugel beträgt 904 F^3 320 Z^3.

Oder:

Oder: der größte Durchſchnitt war 113,04 F³
also 11304
80″ = ⅔ vom Durchmeſſer

904320 Z³ oder 904 F³ 320 Z³, welches mit dem vorigen übereinkommt.

Anmerkung.

Man ſieht hieraus, wie man die Größe einer Halbkugel berechnen müßte, wenn es auf irgend eine Art nöthig werden ſollte.

§. 168.

Die hier berechneten Körper haben insgeſammt Oberflächen, die, wenn es erfordert würde, nach ihrem Flächeninhalte berechnet werden könnten.

Alle ekkigen Körper haben entweder drei-, vier- oder vielſeitige ebene Figuren; Kugel, Cylinder und Kegel aber machen Ausnahmen. Jene Flächen werden nach Gründen der Flächenmeſſung, ſo wie ſie in der zweiten Abtheilung abgehandelt worden iſt, ausgemeſſen; dieſe krummen Oberflächen aber kann man mit ziemlicher Genauigkeit in ebene Figuren verwandeln, und als ſolche berechnen. So iſt die krumme Oberfläche eines Cylinders einem Rechtecke gleich, deſſen Grundlinie der Peripherie, und deſſen Höhe der Höhe des Cylinders gleicht. Ferner die krumme Oberfläche eines Kegels gleicht einem Kreisausſchnitte, deſſen Halbmeſſer der Seitenlinie, und deſſen Bogen der Peripherie des Kegels gleich iſt. Da nun der Ausſchnitt ſo groß iſt, als ein Dreieck auf einer Grundlinie, ſo groß als der Bogen, in einer Höhe, die dem Halbmeſſer des Ausſchnitts gleicht; ſo kann man auch die Oberfläche des Kegels in ein ſo beſchriebenes Dreieck verwandeln. Die Grundflächen der Cylinder und Kegel ſind Kreiſe, die nach §. 133 berechnet, und den krummen Oberflächen der Cylin-

der

der und Kegel zugeſetzt werden müßten, wenn man die geſammte Oberfläche dieſer Körper zu erhalten wünſchte.

Um die Oberfläche einer Kugel zu finden, darf man nur den größten Durchſchnitt der Kugel mit 4 multipliciren; würde dieſer größte Kreis aber mit 2 multiplicirt, ſo hätte man die Oberfläche einer Halbkugel. Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels findet man, wenn man von der Oberfläche des ganzen Kegels (wovon der abgekürzte nur ein Theil iſt), die Oberfläche des kleinern Kegels oder der Spitze ſubtrahirt. Werden beider Kegel Oberflächen in Dreiecke verwandelt, ſo kann man auch den Inhalt des größern durch den Inhalt des kleinern vermindern.

Schlußanmerkung zur theoretiſchen Geometrie.

Der Inhalt ſo wohl der Flächen als auch der Körper, iſt bei dem gegenwärtigen Vortrage in jedem Falle nur im Decimalmaße angegeben worden.

Sollte jemand in den Fall kommen, den Inhalt entweder einer Fläche oder eines Körpers im Duodecimalmaß zu berechnen, der darf nur die in der Arithmetik angezeigten Reduktionszahlen des Duodecimalmaßes wiſſen, und der Inhalt wird ſich auf eben dieſe Art ergeben. Auch kann man den gefundnen Inhalt im Decimalmaße in Duodecimalmaß verwandeln, wenn man die Verhältnißzahlen beider Maße zum Grund legt. Hierbei iſt zu bemerken, wenn es bloß darauf ankommt, einen gefundnen Inhalt im Decimalmaße, in eine Zahl im Duodecimalmaße zu verwandeln, daß, wenn der Fuß bei beiden Abtheilungen von gleicher Größe angenommen worden iſt, die Fuße, welche den Inhalt ausdrücken, unverändert bleiben, alſo nur die Zolle und Linien verwandelt werden dürfen.

In der Längenmeſſung ſind die Ruthen von einerlei Länge, die Fuße aber ſind ungleich. Daher muß man, wenn

wenn Inhalte der Flächenfiguren im Decimalmaße ausgedrückt ſind, und dieſe Inhalte im Duodecimalmaße angegeben werden ſollen, die Fuße ſo wohl, als auch die Zolle und Linien verwandeln.

Gewöhnlich berechnet man die Inhalte der Körper nach Duodecimalmaß, weil Bauhölzer, Bohlen ꝛc. faſt überall von den Werkleuten nach Duodecimalmaße angegeben werden. Iſt man dieſer Annahme gewiß, ſo kann man deren Inhalt ſogleich ohne Schwierigkeit in Duodecimalmaß angeben.

Uebrigens iſt in dieſem theoretiſchen Theile der Geometrie keine reine Theorie der Geometrie allein enthalten, ſondern es ſind damit überall Anwendungen verbunden, ſo daß man dieſen Theil ſchicklicher den gemiſchten Theil der Geometrie nennen könnte. Da aber hier noch ein beſonderer praktiſcher Theil folgt, ſo iſt dieſer ganz beſonders der Anwendung der Geometrie auf forſtwirthſchaftliche Gegenſtände gewidmet.

Bemerkungen
über
die Erweiterung der im gegenwärtigen theoretiſchen Theile der Forſtmathematik abgehandelten Kenntniſſe.

Da die gegenwärtig abgehandelten arithmetiſchen und geometriſchen Kenntniſſe nur das Allerunentbehrlichſte für einen Förſter enthalten, die mehreſten der vorgetragenen Sätze auch gewiſſermaßen nur hingeworfen ſind; ſo wird es demjenigen, der dieſe Sätze gefaßt hat und anzuwenden weiß, auch intereſſant ſeyn, wenn er theils die Gründe der Sätze, theils die Erweiterung der mathematiſchen

Kenntniſſe in Schriften zu ſuchen weiß, die ſeiner Faſſungskraſt angemeſſen ſind, und ſie grade ſo zur Hand nehmen kann, wie ſie nach der Leichtigkeit des Vortrags und der Menge der darin vorgetragenen Kenntniſſe auf einander folgen. Zu dieſer Abſicht, und weil nach dem gegenwärtigen Zuſtande der mathematiſch-forſtwiſſenſchaftlichen Kenntniſſe eine Erweiterung der gegenwärtigen nöthig iſt, und der Forſtofficiant auch von Stufe zu Stufe vorwärts zu kommen wünſcht, ſchlage ich folgende Hülfsmittel vor, die dazu dienen, durch eigenen Fleiß, nachdem nur einmal ein Anfang durch den gegenwärtigen Unterricht gemacht worden iſt, in der Kenntniß mathematiſcher Lehren fortzurücken. Dazu nun, glaube ich, werden folgende Schriften in der angeführten Ordnung vollkommen genügen.

1) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, nebſt ihrer Anwendung auf practiſche Rechnungen, das Feldmeſſen ꝛc. Von Georg Simon Klügel. Zweite verbeſſerte Auflage. Berlin und Stettin 1792.
Der Vortrag iſt leicht und faßlich, und der Inhalt betrift die erſten Kenntniſſe der Arithmetik und Geometrie, kurz und gründlich; die Arithmetik ohne Buchſtabenrechnung und Algebra.

2) Anfangsgründe der Mathematik. Von Gerhard Ulrich Anton Vieth. Leipzig 1796. Der erſte Theil enthält die Arithmetik und Geometrie. Zweckmäßig, vollſtändig, deutlich und gut geordnet. Die Arithmetik enthält die gemeine und allgemeine.

3) Lehrbuch der Mathematik. Von Friedrich Meinert. Halle 1789. Erſter und zweiter Theil. Gemeine und allgemeine Arithmetik.

tik. Elementargeometrie und die erſten Anfangsgründe eines Theils der Analyſis, und der analytiſchen Geometrie.

Wer mit den Kenntniſſen, die in dieſen Schriften vorgetragen ſind, bekannt worden iſt, der kann es nun mit Vortheil wagen, ſich mit den Meiſterwerken deutſcher Mathematiker bekannt zu machen. Hierzu rechne ich

4) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie und Perſpektiv. Von Abraham Gotthelf Käſtner. Der mathematiſchen Anfangsgründe erſten Theils erſte Abtheilung. Vierte vermehrte Auflage. Göttingen 1786. Deſſen Fortſetzung der Rechenkunſt; der mathematiſchen Anfangsgründe erſten Theils zweite Abtheilung. Göttingen 1786. Ferner deſſen Geometriſche Abhandlungen; der mathematiſchen Anfangsgr. erſten Theils dritte und vierte Abtheilung. Göttingen 790. 1791.

Unſtreitig das gründlichſte Werk über Arithmetik und Geometrie, wie es von einem Käſtner zu erwarten war. Erläuterungen dazu giebt es verſchiedene; aber auch ohne Erläuterungen deutlich und faßlich.

5) Anfangsgründe der mathematiſchen Wiſſenſchaften. Von Wencesl. Johann Guſtav Karſten. Erſter Band. Die Rechenkunſt, Geometrie und ebene Trigonometrie. Greifswald 1780.

Deutlich und faßlich, und wo nur ein Anfang gemacht iſt, zum Selbſtunterrichte geſchickt.

Gründliche, zum Theil neue und beim jetzigen Zuſtande der Forſtwiſſenſchaft unentbehrliche Theorien mathematiſcher Unterſuchungen aus dem Gebiete der Forſt-

wirthſchaft, findet man in der Anleitung die Mathematik und phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen und forſtliche Camerale nützlich anzuwenden. Von Joh. Leonhard Späth. Nürnberg 1797.

Dieſe Anleitung ſetzt die arithmetiſchen und geometriſchen Kenntniſſe als bekannt voraus, und lehrt ihre zweckmäßige Anwendung.

Andere praktiſchmathematiſche Schriften werden im folgenden praktiſchen Theile angezeigt.

Zweiter

Zweiter Theil.

Die praktiſche Forſtgeometrie.

Einleitung,

welche die Begriffe von den in der Forſtgeometrie vorkommenden Gegenſtänden der Forſtwirthſchaft und Beſtimmung der üblichen Maße enthält.

§. 1.

Da ein jedes kleinere oder größere Forſtrevier eine Fläche iſt, die theils mit geraden, theils mit krummen Linien begränzt und mit Holz bewachſen iſt, welches entweder unter die Nutzhölzer oder unter das Feuerholz unter verſchiedenen Namen und Eintheilungen gehört; ſo hat ein Forſtbedienter vorzüglich bei ſeinem Reviere in mathematiſcher Rückſicht auf dreierlei zu merken, nämlich auf Linien, Flächen und Körper. Alle drei Arten von Größen werden nach einem entweder allgemein angenommenen, oder beſonders vorgeſchriebenen Maße nach geometriſchen Regeln gemeſſen und beſtimmt, wie davon der theoretiſche Theil der Geometrie mehrere Beiſpiele enthält.

§. 2.

Da die Waldbewirthſchaftung oder die praktiſche Forſtwirthſchaft die Eintheilung der Wälder, Forſte ꝛc. unter die wichtigſten Geſchäfte eines Förſters zählt, ſo wird es nicht unnöthig ſeyn, hier vorläufig einige Be-

griffe z. B. von Wald, Forſt ꝛc., oder wenigſtens einige Kunſtwörter zu erklären, die in der Folge häufig vorkommen, und die man ſich geläufig zu machen ſuchen muß. Hierher gehören unter andern folgende:

Wald. Unter Wald verſteht man eigentlich einen, ſich auf mehrere Meilen erſtreckenden Theil der Erdoberfläche, der überhaupt mit Holz, ſo wohl ſtarken Bäumen oder Bauſtämmen, als auch mit Buſch- oder Unterholz bewachſen iſt, und ſehr oft verſchiedene Forſte, Hölzer und Gebüſche, bisweilen auch Städte und Dörfer, ſo wie ganze Diſtrikte einer Landſchaft unter ſich begreift. So gehört zu den ausgedehntern Wäldern in Deutſchland: der Thüringerwald, der Schwarzwald, der Böhmerwald, der Harzwald ꝛc.

Die Oberaufſicht über ſolche Wälder iſt gewöhnlich unter mehrere Perſonen oder unter ganze Collegia vertheilt.

Mit dem Begriff eines Waldes kommt in Sachſen das Wort Heide faſt überein; denn Heide nennt man ebenfalls eine große mit Holz bewachſene Fläche, die in verſchiedene Theile getheilt wird, die man Reviere nennt, über welche zuſammen ein Oberforſtmeiſter die Aufſicht hat. So ſagt man die Annaberger Heide, die Torgauer Heide, die Liebenwerdiſche Heide, die Dreßdner Heide, oder der ſogenannte Friedewald. Mit dieſen Begriffen ſtimmen die Schleſiſchen Heiden überein, z. B. die Hainauer Heide, die Liegnitziſche Heide ꝛc.

Forſt, iſt ein Theil eines Waldes oder einer Heide, welcher nach Beſchaffenheit des Landes Wieſen, Thäler und Berge unter ſich begreift, die zum Theil mit einerlei, zum Theil aber auch mit verſchiedenem Holze bewachſen ſind und ſtrichweiſe ihre eigene Namen haben. Derjenige, dem eine Forſt zur Aufſicht, Wartung und

Pflege oder überhaupt zur Verwaltung anvertraut iſt, erhält davon den Namen Förſter.

Buſch- und Feldholz. Unter dieſen Wörtern verſteht man einen Theil einer Forſt, der entfernt von der eigentlichen Forſt liegt, durch Felder, Wieſen ꝛc abgeſondert, kleiner iſt, als die Forſt ſelbſt, und auch von allen Seiten frei liegt. Büſche und Feldhölzer nennt man auch Vorlagen, und ſie werden gewöhnlich zu der nächſtgelegenen Forſt gerechnet.

Hölzer ſind kleine Theile einer Forſt, woraus die Reviere und Huthungen ꝛc. zuſammengeſetzt ſind. Diejenigen Hölzer, welche gewiſſermaßen den Rand oder das Aeußerſte eines Reviers ausmachen, nennt man an manchen Orten Vorhölzer, Vorberge oder Vorköpfe.

Block, iſt ein durch beſtimmte Gränzen abgeſonderter Theil eines Reviers, der im Nadelholz (nach den Regeln der Preuß. Forſtwirthſchaft) in 70 gleiche Theile oder Schläge (Gehaue) getheilt wird.

Abtheilung, iſt im Nadelholze ein Inbegriff von 2 mal 70 oder 140 Schlägen, oder von zwei Blöcken. Wo keine Abtheilungen üblich ſind, erhält der Block 140 oder 120 Schläge, je nachdem man auf den Wiederaufwuchs des Holzes Jahre rechnen kann, und man bemerkt den Block ſowohl in der Forſt auf den Pfählen, als auch in der Karte und Regiſter mit einem großen Buchſtaben des lateiniſchen Alphabeths.

Block, im Schlagholz, ein Diſtrikt, der 25 bis 30 ſo viel wie möglich gleiche Schläge oder Gehaue begreift.

Schlag oder Gehau, iſt ein Theil des Blocks, deſſen Größe durch die Diviſion der Anzahl der Jahre, in welchen das in ihm beſtandene Holz haubar werden kann, in den Flächeninhalt des Blocks beſtimmt wird. Man ſchließt Schläge und Gehaue allezeit, wenn nicht die

äußerſte Nothwendigkeit es verbietet, in parallele Linien ein, die übrigens gegen eine andere gerade Linie jede mögliche, aber wirthſchaftlich vortheilhafte Lage haben.

Schlag- oder Gehaulinien, nennt man ſolche Linien, welche die Länge eines Schlages beſtimmen.

Scheidungsgeſtell, muß wenigſtens eine Ruthe breit aufgehauen werden, ſcheidet zwei Blöcke und muß ſich der geraden Linie ſo viel möglich nähern.

Nummergeſtelle, ſind gerade, 1 Ruthe breite, durch die Forſt gehauene Geſtelle, auf welchen eine Reihe Schläge oder Gehaue zuſammenhängend abgeſetzt, und die Nummerpfähle eingegraben werden.

Vogelgeſtelle, nennt man 6 Fuß breite kurze Geſtelle, wodurch der Anfang oder das Ende einiger wenigen Schläge oder Gehaue beſtimmt wird. Man ſetzt darauf ebenfalls Nummerpfähle, aber nur in geringerer Anzahl.

Schlag- oder Nummerpfähle, ſind 6 Fuß hohe, 6 bis 8 Zoll im Quadrat ſtarke vierkantige Pfähle, welche am Anfange und Ende einer Schlaglinie eingegraben werden. Auf der Seite nach dem Geſtell werden ſie mit dem Buchſtaben des Blocks bezeichnet, und auf beiden neben dieſen befindlichen Seiten werden die Nummern beider Schläge, welche die Linie ſcheidet, eingeriſſen und mit Oelfarbe ausgefüllt. Sie haben zwei Fuß von unten an eine cylindriſche Figur, ſo weit ſie nämlich in die Erde kommen; das über der Erde hervorragende vierkantige Stück wird oben in der Form eines Satteldaches abgeſchärft.

Anfangspfahl, iſt ein Nummerpfahl, der an dem ſüdlichen Ende der Schlaglinie, oder am Anfange des Schlages ſteht.

Endpfahl, iſt ein Nummerpfahl, der am nördlichen Ende der Schlaglinie eingeſetzt wird.

Alignementszeichen, ſind Hügel, Graben oder Schalme, welche die Richtung der Schlaglinien am An-

Anfangs- und Endpfahl bezeichnen, und welche bei dem Durchſtecken der Schlaglinien in gewiſſen Entfernungen, aber in derſelbigen Richtung vermehrt werden.

Alignementshügel, ſind Hügel, die am Anfange und Ende der Schlaglinien aufgeworfen werden, und deren Anzahl bei dem Durchſtecken der Schlaglinien wie vorhin vermehrt werden muß. Um das Alignement oder die Richtungslinie noch genauer zu haben, ſo werden Pfähle in die Mitte dieſer Hügel geſchlagen, welche man **Hügelpfähle** nennt.

Alignementsgraben, ſind Graben, welche nach der Richtung der Schlaglinie aufgeworfen werden. Sollen dergleichen Graben die Richtung ſicher bezeichnen, ſo muß am Anfange und Ende derſelben gerade auf die Mitte der Richtung der Schlaglinie ein Pfahl, (**Richtungspfahl**) eingeſchlagen werden.

Alignementsſchalme, ſind **Schalme**, welche man an den Bäumen, die an oder in der Richtung der Schlaglinie ſtehen, anhauen läßt.

Hauptgeſtelle; ſo heißen diejenigen, welche den größten Theil oder die größte Länge der Forſt durchſchneiden. Werden aber die Forſtcharten ſo gezeichnet, daß Norden **oben** zu liegen kommt, ſo nennt man beſtimmter die Geſtelle, welche die Forſt von Oſt nach Weſt durchſchneiden, ohne auf größere oder kleinere Ausdehnung der Forſt zu ſehen, **Hauptgeſtelle**.

Feuergeſtelle, auch **Queergeſtelle**; diejenigen Geſtelle, welche die Hauptgeſtelle durchſchneiden, und auf der gezeichneten Forſtcharte von Nord nach Süd laufen.

Dieſe Geſtelle, nämlich die Haupt- und Feuergeſtelle, machen auf den Forſtcharten gewiſſermaßen die Grade der Länge und der Breite, oder ſie können wenigſtens damit verglichen werden.

Jagen, ſind Theile einer Forſt, welche durch die Interſektion (Durchſchneidung) der Hauptgeſtelle von den

Feuergeſtellen entſtehen. In der Mitte der Forſt ſind die Jagen gewöhnlich vierſeitig; an den Gränzen aber können ſie auch drei und vielſeitig vorkommen.

Horſt, eine zwiſchen Wieſen und Brüchen liegende Anhöhe, die nur zum Theil mit Holz bewachſen, zum Theil aber abgeholzet, oder auch in Feld verwandelt worden iſt.

Blöße, heißt ein jeder Platz oder Ort in Forſten oder Waldungen, der von Holz ganz entblößt iſt, woher er auch ſeinen Namen erhalten hat.

Räumde, ein mit einzelnen Bäumen und Geſträuchen bewachſener Ort in einer Forſt.

Schonung, ein Platz oder Theil eines Reviers, der nicht abgehütet werden darf, und daher zur Anzeige, daß er geſchonet oder gehäget werden muß, mit Hägewiſchen bezeichnet oder eingezäunt wird.

Anmerkung 1.

Andere Benennungen ſind theils bekannt, theils nur örtlich und verdienen keine beſondere Anzeige, weil der Forſtwirth ſich leicht davon eine deutliche Vorſtellung machen kann.

Anmerkung 2.

Gewöhnlich iſt die Jagdbenutzung mit der Forſtwirthſchaft verbunden. Die erſtere aber ſollte in keinem Staate zum Nachtheile der letztern betrieben werden. Der Förſter iſt zugleich Jäger — aber nicht jeder Jäger iſt ein Förſter. Ueberhaupt ſind Forſt- und Jagdweſen verſchiedene Dinge. So viel als ehedem und noch jetzt in einigen Provinzen Deutſchlands Sorgfalt auf das Jagdweſen verwandt worden iſt, ſo viel Aufmerkſamkeit hat man dem Forſtweſen nicht gewidmet; daher auch in manchen Staaten der Holzmangel. Indeß hat man nun ſchon ſeit vielen Jahren angefangen, das Forſtweſen nach ſeiner Beſtimmung und nach dem großen Einfluſſe zu würdigen, den eine gut geordnete Forſtwirthſchaft auf die Erhaltung und Beförderung der Glückſeligkeit eines Staats hat, und dieſer

ſer Aufmerkſamkeit hat man auch das beſſer geleitete Studium der Forſtwiſſenſchaft und aller dazu nöthigen Hülfskenntniſſe zu verdanken. Einen achtungswerthen Förſter charakteriſiren: zweckmäßige Kenntniſſe, unermüdeter Fleiß und unbeſtechliche Ehrlichkeit.

Anmerkung 3.

Wenn das Revier groß iſt, das einem Förſter anvertraut wird, ſo erhält dieſer noch einen oder mehrere Gehülfen. Der Förſter, dem die Oberaufſicht anvertraut iſt, heißt an einigen Orten ein Förſter zu Pferde, und ſeine Gehülfen werden Förſter zu Fuß oder Fußknechte genannt. An andern Orten kommen die Benennungen Oberforſtmeiſter, Forſtmeiſter, Jäger, Jagdjunker ꝛc. vor, die insgeſammt von einem Oberforſtdepartement abhängen, welches alle Geſchäfte im Großen und die geſammte Forſtpolicey leitet.

§. 3.

Wenn die mit Holz beſtandenen oder Waldflächen gemeſſen, und aus den gemeſſenen Stücken auf das Papier gezeichnet ſind, ſo wird der Inhalt, ohne die Menge oder die Eigenſchaften des darauf ſtehenden Holzes in Betrachtung zu ziehen, berechnet.

Hierzu bedient man ſich, wie ſchon in der Arithmetik und im theoretiſchen Theile der Geometrie erwähnt worden iſt, entweder des angenommenen rheinländiſchen, oder des landesüblichen Maßes. Da bei Beſtimmung großer Flächen die Menge von Quadratruthen zu große Zahlen giebt, ſo verwandelt man die Ruthen in Aecker und ſogenannte Waldmorgen.

Im Preuß. iſt der Magdeburgiſche Morgen zu 180 Quadratruthen rheinl. Duodecimalmaß auch bei Forſtvermeſſungen Regel geworden; zwei Morgen geben einen Acker. In Oberſachſen, beſonders in den Churſächſiſchen Landen, begreift man unter einem Waldmorgen

gen einen Strich Landes von 150 Quadratruthen landesübl. Maß. Eine Hufe enthält nach der Beſchaffenheit des Landes bald mehr, bald weniger Acker oder Morgen, und daher iſt die Größe derſelben bald 12, 15, 18, bald 24 Acker oder Morgen.

Im Weimariſchen und Braunſchweigiſchen iſt die Größe eines Ackers, ſo wie die eines Morgens von der eines Churſächſiſchen abermals verſchieden.

Anmerkung.

Von der Größe der, zu gewiſſen Größenbeſtimmungen gebräuchlichen Maße, muß man ſich, wenn §. 206. der Arithmetik nicht hinlänglich iſt, an Ort und Stelle unterrichten.

§. 4.

Auf den Forſt- oder Waldflächen ſtehen nun die Gehölze, d. i. diejenigen Körper, welche den Gegenſtand der Aufmerkſamkeit eines Förſters ausmachen. Inſofern man das Holz nach ſeiner Stärke und Höhe betrachtet, inſofern gehört es in die forſtwiſſenſchaftliche Mathematik, das Holz mag übrigens Bauholz oder Schwarzholz ſeyn. Noch ſind die verſchiedenen Benennungen des Holzes merkwürdig, welche theils von der Stärke und Höhe, theils von der Beſtimmung deſſelben herrühren, und nicht in allen Provinzen übereinſtimmend ſind.

Die aus dem Saamen, er ſei nun von Fruchtbäumen ausgefallen oder ausgeſäet, aufgegangenen Pflanzen, nennt man von 2 bis 6 Jahren Jungholz oder neuen Anflug. Die Beſtimmung dieſes Anflugs geſchieht nicht durch Berechnung des körperlichen Inhalts, ſondern durch Ausmeſſung der Flächen, an Morgen und Ackern, die mit Jungholz beſtanden. Der Anflug erwächſt nun in 12 bis 20 Jahren, und heißt ein Dickigt. Beim Schwarzholze können, nach Beſchaffenheit des Erdbodens,

dens, zu Bandgerten, Bohnenſtengel, Hopfenſtangen u. dergl. ſolche Stämmchen ausgelichtet werden, die nicht recht fortwachſen wollen. Aber auch dieſe ausgelichteten Stämmchen werden noch nicht nach ihrem körperlichen Inhalt berechnet, ſondern ſchockweiſe verkauft. Nach Verlauf von 20 bis 30 Jahren wird das Holz brauchbarer und giebt Stangen, Reißlatten und Rüſtſtangen ꝛc. Holz dieſer Art, welches ſein gehöriges Alter, etwa 100 Jahre erreicht hat, hat ſeine völlige Nutzbarkeit erhalten, und verdient in der Forſtgeometrie vorzüglich der Größe nach namhaft gemacht zu werden.

Eine Stange im Durchm. iſt	4 Zoll, u. iſt	15 = 20 Ell. lang;
— Reißlatte	— — 5 — —	20 — —
— Rüſtſtange	— — 6 = 7 — —	20 = 25 — —
ein Schaalholz	— — 8 — —	25 = 30 — —
— Röhrholz	— — 10 — —	30 — —
— Strohdachſparren	— 12 — —	30 = 35 — —
— Schindel= und Ziegeldachſparren	— 13. 13½ — —	30 = 35 — —
— Balkenholz	— — 14 = 15 — —	35 = 40 — —
— Säulbaum	— — 16 = 18 — —	35 = 40 — —
— doppelter Säulbaum	19 = 21 — —	40 = 45 — —
— Sägeblock und Krippenholz	— 24 u. drüber — —	40 = 45 — —
— Schaalbaum	— — 30 — —	40 = 45 — —
— Wellbaum	— — 32 = 34 — —	40 = 45 — —

Wellbäume, wenn ſie gerade gewachſen ſind, können ſchon als Maſtbäume gebraucht werden. Ein großer Maſtbaum aber muß an 50 Ellen lang ſeyn, und im obern Durchmeſſer noch 12 Zoll halten.

Noch iſt der Steckbaum zu erwähnen, deſſen Größe aber gewöhnlich unbeſtimmt iſt. An manchen Orten, und vielleicht in manchen Provinzen erhalten die Unterthanen, gewiſſer Urſachen wegen, einen Baum aus

der

der Forſt zur Zeit der Förſterei von der Landesherrſchaft unentgeltlich, und er wird daher auch der Gnadenbaum genannt. Der Oberforſtmeiſter zeichnet dieſe Bäume nach Gutbefinden, oder nach Umſtänden, oder aber nach erhaltenen Vorſchriften aus.

Die vorhin angeführten Benennungen und Abmeſſungen der Holzſtämme, betreffen größtentheils Bauholzſtücke von taugbarem Nadelholze. Der Preis eines Stammes dieſer Art wird nach körperlichem Inhalte beſtimmt, und iſt gewöhnlich noch einmal ſo groß, als der Preis von eben ſo viel Klafter- oder Brennholz. Ganz beſonders ſtarke Sorten, als Wellen und Schiffsbauholz kann man wohl dreimal ſo hoch veranſchlagen, als eine eben ſo große Quantität Brenn- oder Klafterholz.

Nächſt dieſem muß ein Förſter auch den Inhalt des Laubholzes zu beſtimmen wiſſen. Dazu rechnet man die Buchen, Rüſtern, Birken ꝛc. vorzüglich aber die Eichen.

Zu den Laubhölzern, die man nach ihrem körperlichen Inhalt zu beſtimmen wiſſen muß, gehören:

Die Achſen- od. Nebeneichen,	im Durchm.		$11\frac{1}{2}$ Z.	u. in d. Länge	25 Ell.	
Die Pfaleichen	—	—	15	—	25	—
Die Schwelleichen	—	—	18	—	25	—
Die Spitzbalken	—	—	24	—	20	—
Die Schiffsbalken	—	—	$28\frac{2}{3}$	—	30	—
Die Puchten	—	—	30	—	15	—
Die S. Puchten	—	—	40	—	20	—

Schneidzeichen, oder eichene Sägeblöcke, zu Pfoſten, Kummten, Bohlen, Dielen ꝛc. halten im Durchmeſſer 30 bis 66 Zoll, und ſind 30 bis 35 Ellen lang.

Anmerkung.

Dieſe und mehr ähnliche Tabellen, hatte der ſel. Vierenklee dem Herrn Förſter Kröhn zu danken, die alſo ganz nach Sächſiſchen Vorſchriften beſtimmt ſind.

ſind. Beſtimmungen der Holzſtämme zu Bauholz im Preußiſchen, findet man in des Herrn Geheimen Rath v. Burgsdorfs Forſthandbuche, in der zweiten Abhandlung, Abſch. 3. Kap. 1. Verglichen mit §. 207. der gegenwärtigen Arithmetik.

Die Abmeſſungen ſind ſämmtlich nach Werk- oder Duodecimalmaß gegeben, und die Elle wird in jedem Falle zu zwei landesüblichen Fußen berechnet, wenn nicht ausdrücklich ein anderes Maß vorgeſchrieben iſt.

Die Holztabellen ſind und müſſen veränderlich ſeyn, denn ſie hängen vom Zuſtande der Forſten und von dem der ausübenden Baukunſt ab.

Jedes Baudepartement entwirft der Baukunſt gemäß die Stärke und Länge der benöthigten Bauhölzer in Tabellen, und das Forſtdepartement bringt ſie zur Kenntniß der Forſtoffizianten, ſo, daß auch die gegenwärtigen nicht als unwandelbar, ſondern nur als Beiſpiele angeſehen werden dürfen.

§. 5.

Betrachtet man aber einen Baum ſtückweiſe, wenn er zu Brennholz geſchlagen, und in Klaftern, Malter und Haufen oder Sechzigern aufgeſetzt wird; ſo hat man dabei vorläufig folgendes zu merken:

a) Die Klaftern. Eine Klafter Holz iſt nichts anders, als ein eckiger Körper, der 6 Fuß breit und 6 Fuß hoch iſt. Da aber die Scheitlänge nicht in allen Klaftern und an allen Orten gleich iſt, ſo giebt es auch verſchiedene Arten von Klaftern, die mehr und weniger Inhalt haben (denn die Scheitlänge fängt von 2 Fuß an, und wächſt bis zu 6 Fuß). Im allgemeinen wird eine Holzklafter aber als ein ſolcher Körper betrachtet, der nach vorgeſchriebenen Maßen durchaus dicht iſt, und keine Zwiſchenräume hat, die nicht mit Holz erfüllt ſind. In dieſer Vorausſetzung hält

eine Klafter, deren Scheitlänge 2 Fuß iſt, an Inhalt 72 F^3;
— andere — — $2\frac{1}{2}$ — — — — 90 —
— andere — — 3 — — — — 108 —
— andere — — $3\frac{1}{2}$ — — — — 126 —
— andere — — 4 — — — — 144 —
— andere — — $4\frac{1}{2}$ — — — — 162 —
— andere — — 5 — — — — 180 —
— andere — — $5\frac{1}{2}$ — — — — 198 —
— andere — — 6 — — — — 216 —

Dieſe letzte Klafter hat eine vollkommen reguläre Form, und gleicht einem Würfel oder Kubus, alle übrigen aber ſind Parallelepipeda, und müſſen daher auch als ſolche berechnet werden.

Drei Klaftern zuſammen genommen, heißen in Dresden und in der dortigen Gegend: ein Schragen Holz. Im Preußiſchen iſt die Scheitlänge in der Regel 3 Fuß, ſo daß eine Klafter 6 Fuß lang und 6 Fuß hoch, 108 Kubikfuß rheinl. hält.

b) Die Malter. Ein eigentlicher Malter iſt ein von Holzſcheiten aufgeſetzter Würfel, der 4 Fuß hoch, 4 Fuß breit, und 4 Fuß dick iſt; folglich deſſen Scheitlänge ebenfalls 4 Fuß beträgt.

Demnach iſt der Inhalt der Grundfläche 4 . 4 oder 16 Quadratfuß, und der körperliche Inhalt 4 . 16 oder 64 Kubikfuß. Alſo machen 9 dergleichen Malter 4 Holzklaftern, deren Scheitlänge 4 Fuß beträgt; denn $144 . 4 = 9 . 64$ oder 576 Kubikfuß.

Nächſt dieſer Gattung von Maltern, giebt es noch andere, die mit der erwähnten oder mit andern Klaftern in ganz andern Verhältniſſen ſtehen, und wie die Holzklaftern die Geſtalt eines länglich viereckigen Körpers, oder die Form eines Parallelepipedums haben, und folglich auch als ſolche berechnet werden. So iſt z. B.

In Thüringen ein Malter 4 Fuß breit, 3 bis 4 Fuß hoch, und $3\frac{1}{2}$ Fuß in der Scheitlänge.

Im

Im Zerbſter Gebiete hat ein Malter 6 Fuß Breite, 3 Fuß Höhe und 4½ Fuß Scheitlänge.

c) Die Sechsziger. Ein Sechsziger hält 60 Schock (wovon auch der Name entſtanden iſt) oder 3600 Scheitchen, die insgeſammt 2 Fuß lang, 2 bis 2½ Zoll ſtark, und 3 bis 3½ Zoll breit oder dick ſind. Sechsziger kommen aber mehr in hartem, als in weichem Holze vor. Man rechnet ohngefähr, daß drei Wagen, jeder mit 4 Pferden beſpannt, einen dergleichen Sechsziger fahren können.

Berechnet man einen Sechsziger in Klafterform, ſo findet man, daß ein Sechsziger $4\frac{1}{11}$ Klaftern giebt, deren Scheitlänge 4 Fuß beträgt.

Im Magdeburgiſchen giebt es auch eine Art von Sechszigern, welche aus Reißigbunden oder aus ſogenannten Wellen zuſammen geſetzt werden. Ein dergleichen Bund hat 3 Fuß Länge, und 1 Fuß in ſeinem Umfange.

Anmerkung.

Alle, auch nur in den wichtigſten Provinzen und Forſten Deutſchlands anzugeben, iſt nicht nur hier unmöglich, ſondern auch überflüſſig, weil jeder Förſter die Holzform und Größe nach gegebenen Vorſchriften berechnen muß.

Eine Berechnung der Holzklaftern mit Hülfe der Logarithmen zur Abkürzung der Rechnung, ſo wie nützliche Vergleichungen derſelben nach verſchiedenen Maßen, findet man in Kästners Anfangsgründen der Geometrie. S. 369 — 372, wo auch ein Beiſpiel aus dem allgemeinen Forſtmagazine 12 B. 161. S. angeführt, und nach Gründen der Arithmetik entwickelt wird.

Wenn man die in der Arithmetik aus einander geſetzte Lehre von den Verhältniſſen verſtanden, ſo wird man dergleichen Aufgaben, ohne Logarithmen freilich etwas mühſamer, aber doch richtig und nach Gründen aufzulöſen im Stande ſeyn.

Erſte Abtheilung.

Die angewandte Längenmeſſung

oder die

Euthymetrie im Forſtweſen.

§. 6.

Was Längenmeſſung überhaupt ſei, und wie man Linien oder Längen unmittelbar zu meſſen im Stande, lehrt der theoretiſche Theil der Geometrie (§. 41. Fig. 42. des theoret. Theils); hier alſo werden vorzüglich die praktiſchen Vortheile gezeigt, die man anwenden muß, Längen oder Linien mittelbar zu beſtimmen, da der Fall ſehr häufig eintritt, daß bei Längenmeſſungen forſtwirthſchaftlicher Gegenſtände, jede unmittelbare Meſſung entweder unmöglich, oder zu zeitſpielig, oder dem Forſte ſelbſt nachtheilig ſeyn würde.

I.

Von der Meſſung der Weiten oder Entfernungen gegebener Gegenſtände.

§. 7.

Bei der Meſſung der Entfernungen verſchiedener Gegenſtände, als Büſche, Gehölze ꝛc. kommen drei Fälle vor: Man kann nämlich entweder ungehindert von einem zum andern kommen; oder nur aus einem angenom-

nommenen Standpunkte entweder zu beiden, oder nur zu einem; oder man kann aus einem gegebenen Standpunkte zu keinem von beiden Gegenſtänden meſſen. Hieraus ergiebt ſich alſo von ſelbſt die Nothwendigkeit dreier Aufgaben, in welchen die Mittel gezeigt werden, wie man das Verlangte durch Hülfe theoretiſch-geometriſcher Kenntniſſe zu Stande bringt.

§. 8.

Aufgabe.

Die Weite oder Entfernung zweier Gehölze zu meſſen und auf das Papier zu tragen, zu welchen man unmittelbar kommen kann. Fig. 1 und 2.

Auflöſung.

Man ſoll die Entfernung ab meſſen, Fig. 1.

1) Liegen a und b ſo, daß man von a nach b, oder von b nach a ohne irgend eine Hinderniß meſſen kann, ſo meſſe man die Weite ab vermittelſt der Meßkette unmittelbar, die Gegend mag eben oder uneben, oder gebirgig ſeyn, nach §. 47. (des theor. Theils) und zeichne die gerade Linie ab nach einem willkürlich gewählten, oder vorgeſchriebenen verjüngten Maßſtabe an die Gehölze an, wie Fig. 1. (auf der erſten Kupfertafel des praktiſchen Theils der Geom.) zeiget.

2) Liegt zwiſchen a und b (Fig. 2.) aber ein Teich, eine Lache, oder ein ungangbarer Grund, ſo daß eine unmittelbare Meſſung der Linie ab unmöglich iſt; ſo wähle man einen ſolchen Standpunkt wie c, von welchem man ſo wohl nach a, als auch nach b unmittelbar hinmeſſen kann. In c ſetze man den Winkelmeſſer (nach der Vorſchrift §. 50.) und richte das unbewegliche Diopternlineal nach a, die Alhidade oder das bewegliche Lineal aber nach b und zähle die Anzahl der Grade ꝛc. die der

 Winkel

Winkel acb faſſet. Mißt man hierauf ca und cb mit der Meßkette horizontal, und zeichnet ſo wohl den gefundenen Winkel acb, als auch die gemeſſenen Linien, auf deſſen Schenkel von c nach a, und von c nach b und vollendet die Linie ab; ſo hat man die Weite ab auf dem verjüngten Maßſtabe. Die wirkliche Entfernung auf der Erde hat eben ſo viel Ruthen, Fuße rc. im natürlichen Maße, als ab im verjüngten (§. 70. n. 1. des theor. Theils).

§. 9.

Verlangte man die Weite ab auf der Stelle, ohne Zeichnung zu wiſſen, ſo dürfte man nur das Dreieck bca rückwärts c ſo auftragen, daß die Verlängerung bc rückwärts = bc, und die Verlängerung ac rückwärts c = ac würde; ſo hätte man ab in dem zurückgetragenen kongruenten Dreiecke, und man könnte das Maß von ab durch unmittelbare Meſſung beſtimmen.

Wäre rückwärts c nicht Platz genug vorhanden, ſo dürfte man nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ rc. von bc und ac auf die denſelben zugehörige Verlängerungen auftragen, und die dadurch erhaltene Weite ab wäre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von der wirklichen Weite ab.

Auch könnte man, im Falle hinter c gar kein Platz vorhanden wäre, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von bc und ac, von c nach b ſowohl, als von c nach a tragen, und die ſo gefundene Weite ab wäre ebenfalls $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von der wirklichen Entfernung ab.

Anmerkung.

Hierbei wird vorausgeſetzt, daß man bei dem Zurücktragen der cb, ca ſo wohl, als beim Vorwärtstragen dieſer Linien, die Richtungen bc und ac genau beobachte, und die nöthigen Abſteckeſtäbe mit c, b und c, a ſo vollkommen in eine Vertikalebene zu bringen ſuche, als

es

es nur immer möglich iſt. Die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke, worauf ſich auch die Aehnlichkeit derſelben ſtützt, giebt in allen Fällen eine Menge Hüfsmittel an, die der entbehren muß, der keine gründlichen Kenntniſſe der Geometrie weiß.

§. 10.

Aufgabe.

Die Entfernung zweier Gebüſche ꝛc. zu meſſen und aufzutragen, wenn man nur zu einem unmittelbar hinmeſſen kann, Fig. 2.

Auflöſung.

Zwiſchen beiden Gehölzen a und b liege ein Fluß; beide Gehölze aber gehören zu einerlei Revier, welches in Grund gelegt werden ſoll.

Um ab zu finden, verfahre man auf folgende Art:

1) Man wähle den Standpunkt, oder Standort c ſo, daß man von c nach a ſehen und unmittelbar hinmeſſen, nach b aber nur hinſehen oder viſiren kann, und meſſe den Winkel acb durch Hülfe irgend eines Winkelmeſſers ſo wohl, als den Winkel bac, indem man in c, wo der Winkelmeſſer geſtanden, einen Abſteckeſtab oder eine Fahne einſetzt.

2) Man meſſe auch die Linie ac, ſo hat man im Dreiecke acb, eine Seite und zwei Winkel, woraus man nach §. 77. unter den vorgefundenen Bedingungen ein dem Dreieck abc ähnliches Dreieck zu zeichnen im Stande iſt.

Das zur rechten Seite des Gehölzes b, auf der Kupfertafel befindliche Dreieck acb, enthält die Winkel c und a, ſo wie die gemeſſene Seite ac, und es iſt ab nach dem verjüngten Maßſtabe ſo groß, als die Entfernung der Gebüſche ab im natürlichen Maße.

§. 11.

Aufgabe.

Die Entfernung zweier Oerter a und b zu meſſen, und aufzutragen, wenn man zu keinem von beiden, aus einer gegebenen Standlinie kommen kann, Fig. 4.

Auflöſung.

Jenſeits eines Fluſſes (Fig. 4.) liegt ein Buſch a und das Förſterhaus b; beide Gegenſtände ſollen auf die Reviercharte aufgetragen werden, und das Revier liegt dieſſeits des Fluſſes.

1) Man wähle dieſſeits des Fluſſes ein Paar ſolche Standpunkte c und d, die man mit einer Standlinie verbindet, aus welchen man von c ſowohl, als von d, nach a und b ungehindert viſiren kann. Fängt man in c an, ſo ſetzt man den Winkelmeſſer in c und einen Abſteckeſtab mit einer Fahne in d, und richtet das unbewegliche Diopternlineal nach d, das bewegliche aber nach a, ſo erhält man den Winkel acd; viſirt man nun durch Hülfe des beweglichen Lineals auch nach b, ſo hat man auch den Winkel bcd. Mißt man hierauf die Standlinie cd mit der Meßkette, und zeichnet die drei unmittelbar gemeſſenen Stücke, die Winkel acd, bcd und die Standlinie cd, ins Manual, oder entwirft davon ein Brouillon, ſo hat man einen Theil der Figur (rechter Hand Fig. 4).

2) Nun bringe man den Winkelmeſſer aus c nach d, ſetze die Fahne in c, und richte das unbewegliche Lineal nach c ein. Viſirt man nun mit dem beweglichen Diopternlineal nach b und ſo auch nach a, ſo erhält man die Winkel bdc und adc, die man abermals ins Manual notirt, oder ins Brouillon (Fig. 4.) einzeichnet.

3) End-

3) Endlich zeichnet man die Figur aus dem Manuale oder aus dem Brouillon, auf folgende Art:

Auf cd (Fig. 4. rechter Hand) trägt man das gefundene Maß der Standlinie cd nach irgend einem verjüngten Maßſtabe; zeichnet mit dem Transporteur in c die Winkel acd und bcd, ſo wie in d, die Winkel bdc und adc, ſo ſchneiden ſich ca und da in a, ſo wie cb und db in b. Zieht man nun ab, ſo giebt ab auf dem gebrauchten verjüngten Maßſtabe eben ſo viel Ruthen, Fuße ꝛc. als ab auf dem Felde mißt, und dieſe Linie iſt die Entfernung des Buſches a vom Jäger- oder Förſterhauſe b.

Anmerkung 1.

Unter Manual verſteht man eine Art von Regiſter, worein man Größe der Linien und Winkel einträgt, und überhaupt alles notirt, was bei einer Vermeſſung Merkwürdiges vorkommen kann; unter Brouillon hingegen begreift man einen ungefähren Entwurf der Zeichnung auf Papier ſo, daß die entworfene Figur ſo viel Seiten und Winkel erhalte als die zu meſſende, mit Einſchreibung aller Größen an ihren Ort nach Maß und Zahlen, wie man ſie durch das unmittelbare Meſſen findet. Nach dem Brouillon läßt ſich die Zeichnung deſto ſchneller entwerfen, weil man ſchon einen Entwurf vor Augen hat, wenn dieſer auch der zu erhaltenen Figur nicht vollkommen gleicht.

Anmerkung 2.

Eine Auflöſung dieſer Aufgabe, durch Hülfe des Pythagoriſchen Zahlendreiecks, mit Kette und Stäben, durch Hülfe des Aſtrolabiums, vermittelſt des Meßtiſches, aus einer Station durch den Gebrauch des Meßtiſches, und durch Hülfe trigonometriſcher Rechnungen, findet man in Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt, Kap. 5. §. 97.

Dieſe Aufgabe gehört zu den vorzüglichſten, und dient auch darzu, aus einer Standlinie einen ganzen Plan, oder ein ganzes Feld dann aufzunehmen, wenn man von den Endpunkten der Standlinie aus, die ganze Figur überſehen, alſo nach allen Winkelſpitzen frei viſiren kann.

Was die Wahl der Standlinie betrifft, ſo iſt dabei folgendes zu merken: Die Standlinie muß gegen die zu meſſende Linie nicht zu kurz ſeyn, und eine ſolche Lage gegen die in Grund zu legende Punkte haben, daß die Viſirlinien nach dieſen Punkten die Standlinie nicht unter zu ſtumpfen, aber auch nicht unter zu ſpitzen Winkeln ſchneiden. Dieſe Vorſichtsregel bezieht ſich auf die vollkommenſte Standlinie, aus welcher man mit der möglichſt größten Zuverläßigkeit einen Punkt in Grund legen kann, und dieſe iſt die Seite eines gleichſeitigen Dreiecks, ſo daß der in Grund zu legende Punkt des Dreiecks Spitze iſt. Da es aber nicht in allen Fällen, wie auch hier Fig. 4. möglich iſt, eine Standlinie ſo zu wählen, welche mit beiden in Grund zu legenden Punkten a und b dieſe Eigenſchaft haben kann, ſo muß man ihr wenigſtens ſo nahe zu kommen ſuchen, als möglich.

I.

Vom Höhenmeſſen.

§. 12.

Da man zur Berechnung des körperlichen Inhalts eines Baumes, ſeine Höhe zu wiſſen nöthig hat, ſo gehört das Höhenmeſſen unſtreitig in die Forſtgeometrie. Höhen und Tiefen ſind bloß der Lage nach einander entgegengeſetzt; was hoch iſt, ſteht über, und was tief iſt, liegt unter dem angenommenen Horizonte. Wer daher nach geometriſchen Gründen eine Höhe zu meſſen im Stande iſt, der kann auch Tiefen beſtimmen.

Nun kann man entweder unmittelbar an, oder nahe an den Fuß des Gegenſtandes, deſſen Höhe gemeſſen werden

den ſoll, kommen oder nicht, woraus ſich alſo mehrere Fälle für das Höhenmeſſen herleiten laſſen, wovon die unentbehrlichſten hier folgen.

§. 13.

Aufgabe.

Die Höhe eines Baums zu meſſen, zu dem man unmittelbar kommen kann, Fig. 6.

Auflöſung.

Der Baum, deſſen Höhe gemeſſen werden ſoll, ſei ab. (Fig. 6.)

1) Man wähle ſich einen Standpunkt, wie hier c, von welchem aus man an den Baum kommen, und nach der Spitze a frei viſiren kann; ſetze in c den Winkelmeſſer ſo auf, daß deſſen Mittelpunkt ſenkrecht über c liegt, und ſtelle den Ring des Inſtruments mit Hülfe der Nuß vertikal ſo, daß das unbewegliche Dioptern-lineal horizontal in cb, das bewegliche aber in ca trifft. Zählt man nun die Anzahl der Grade, die auf dem Ringe zwiſchen cb und ca liegen, ſo hat man den Winkel acb, den man den Elevationswinkel der Spitze des Baums über cb nennt. Wird hierauf die Linie cb gemeſſen, ſo kann man aus bc, dem Winkel acb und dem rechten Winkel abc ein Dreieck zeichnen, worin die Hypotenuſe der Linie ab gleich wird. Addirt man zu ab die Entfernung des Punkts b vom Boden, ſo hat man in der Summe die geſuchte Höhe des Baums.

Anmerkung.

Da es bei der Meſſung der Höhe eines Baumes oder auch der Höhe eines jeden andern Gegenſtandes, darauf ankömmt, die Spitze des Baums durch den Faden in der Objektivdiopter zu treffen, und ſolches bei der ge-

meinen Einrichtung nicht angeht, ſo verſehe man zu dieſem Zwecke die Dioptern zwar mit Faden, welche vertikal auf dem Horizonte ſtehen (wie bei dem Aſtrolabio), ſchneide dieſen Faden aber in jeder Diopter mit noch einem andern rechtwinkelig, damit ein Kreutz entſtehe; der Durchſchnittspunkt dieſer Faden, oder der Kreutzpunkt dient nun dazu, jeden Punkt in die Diopter zu faſſen; folglich kann man auch die åußerſte Spitze eines Baums in dieſen Durchſchnitt bringen.

2) Auch kann man ſich folgender Methode bedienen.

Man ſtellt den Winkelmeſſer gleich ſo, daß wenn der Ring oder die Platte vertikal hångt, und das unbewegliche Diopternlineal auf cb (Fig. 6.) gerichtet iſt, das bewegliche Diopternlineal einen Winkel von 45 Grad vom Ringe faſſet. Mit dieſer Stellung des Inſtruments gehe man in der Richtung bc ſo lange rückwårts oder vorwårts, bis man in einen Stand kommt, worin man durch das bewegliche Lineal im Durchſchnitte der Diopter die Spitze des Baums erblickt, ſo hat man oben an des Baums Spitze ebenfalls einen Winkel von 45 Grad, weil in jedem Falle abc ein rechter Winkel iſt; mithin iſt das △ acb gleichſchenkelig, und es iſt ab = bc oder der Entfernung des Standpunktes vom Baume gleich; wird nun von b bis an den Fuß des Baums gemeſſen, und zu ab addirt, ſo giebt die Summe ebenfalls die Hóhe des Baums.

Anmerkung.

Steht der Fuß des Baums mit dem Fuße des Stativs auf einerlei Horizontalflåche, ſo iſt die Hóhe des Stativs vom Boden an, bis zum Mittelpunkte des Winkelmeſſers gerechnet, der Entfernung b vom Boden, gleich, und es iſt in dieſem Falle die Hóhe des Baums, die Hóhe ab + der Hóhe des Stativs.

Allgemeine Anmerkung
über den
Gebrauch des Aſtrolabiums zum Höhenmeſſen.

Jedes Aſtrolabium kann als Höhenmeſſer gebraucht werden, es ſei ein halbes oder ganzes Aſtrolabium.

Die Stellung des unbeweglichen Diopternlineals in den Horizont, oder kürzer die horizontale Stellung bewirkt man durch ein in den Mittelpunkt des Ringes angehängtes Senkloth, welches genau den Faden auf 90 Grad in der Eintheilung zeigen muß.

§. 14.

Beſchreibung eines für Forſtbediente bequemen Höhenmeſſers, Fig. 5.

Man vereiniget zwei Maßſtäbe durch ein Gewinde (Fig. 5.) ſo, daß man ſie übereinander legen, und das Ganze als einen Zollſtab brauchen kann. Die Länge betrage 1 Fuß oder 10 Decimalzolle. In deſſen Mitte bringe man das Band (aus Meſſing) ab ſo an, daß der Winkel im Gewinde oder zwiſchen den beiden Linealen, genau einen halben rechten Winkel, oder 45 Grad mache. In d und e bringe man ein Paar ganz einfache Dioptern an, ſo daß die Okulardiopter bei e eine kleine Oeffnung, die Objektivdiopter bei d aber eine größere erhalte, in welche man zwei Faden kreuzweis ſo einſpannen kann, daß ihr Durchſchnitt mit der Oeffnung e nicht nur in eine gerade Linie, ſondern in eine ſolche treffe, die mit der Kante des obern Lineals parallel läuft.

Dieſes einfache Inſtrument dient, die Höhe eines Baums nach der Auflöſung n. 2. §. 13. dann aufzulöſen, wenn man es auf einen Stab vermittelſt einer Schraube am Gewinde bringt, und das untere Lineal horizontal ſtellt. Der Stab als Stativ betrachtet, kann kegel-

kegelförmig ſeyn, oben dick und unten ſpitz. Bringt man an die Spitze einen eiſernen Schuh, oder eine Art von Schraube, ſo läßt er ſich ſo feſt in den Boden drehen, als es bei dieſer Meſſung nöthig iſt.

Ohne Stativ läßt ſich dieſer Höhenmeſſer auch auf den Meßtiſch ſtellen, und auf die vorhin beſchriebene Art gebrauchen.

Allgemeiner wird der Gebrauch dieſes Höhenmeſſers, wenn man ihm folgende Einrichtung giebt:

Man trage auf das horizontale Lineal ab (Fig. 17. Tab. II* von a nach b, eine gewiſſe Menge Fuße nach irgend einem verjüngten Maßſtabe, (d. i. ſo viel als man glaubt, für jede Entfernung von dem zu meſſenden Gegenſtande nöthig zu haben), etwa 100 oder 150, höchſtens 200. Auf der obern Fläche von ab laſſe man eine Nuth ziehen, und bringe in dieſe das ſenkrechte Lineal dc, vermittelſt eines Grades, der dicht aber auch leichte in der Nuthe hin und her geſchoben werden kann, und verſehe de von d nach e ebenfalls mit ſolchen Theilen, als ab hat. Die Zahl der Theile iſt auch hier unbeſtimmt, etwa 100 oder bis 160 höchſtens. Das übrige, Gewinde, Dioptern, Stativ ꝛc. iſt wie am vorigen Höhenmeſſer, und der Gebrauch iſt folgender:

Man meſſe die Entfernung des Baums vom Standpunkte a, und ſchiebe das Lineal von a nach b in die Zahl der Fuße, die gefunden worden iſt. Erhebt man nun ca um a ſo lange, bis man im Durchſchnitte der Faden die Spitze des Baums erblickt, ſo zählt man auf de, von d bis zum Durchſchnittspunkte c die Anzahl der Theile. So viel als man Theile findet, ſo viel Fuß iſt der Baum von der Stelle angerechnet hoch, wo das Horizontallineal ab den Baum trifft. Dieſe Höhe mit der Höhe des Inſtrumentes vom Boden vermehrt, giebt die geſammte

ſammte Höhe des Baums. Wäre z. B. die Entfernung des Baums vom Standpunkte 4, ſo ſchiebt man d e auf 4, und viſirt, und es ſchneidet a c von d e, 3, welches die Höhe des Baums, die Erhöhung des Inſtruments ungerechnet, iſt. Die Richtigkeit ergiebt ſich aus dem pythagoriſchen Zahlendreiecke (§. 87.).

Anmerkung.

Mit dieſem, ſo wie mit jedem Höhenmeſſer, kann man auch jedes Stück des Baums meſſen, welcher Fall dann eintritt, wenn man nur den zu einem gewiſſen Zwecke brauchbaren Theil des Stamms ſucht, wenn der Schopf zu ſpitz zuläuft.

Anmerkung über die Höhenmeſſer.

Der Höhenmeſſer zum forſtwirthſchaftlichen Gebrauche giebt es zweierlei Arten: Solche, durch deren Höhe man bloß die Höhe eines Baums zu meſſen im Stande iſt; dann ſolche, welche außer der Vorrichtung zur Meſſung der ſenkrechten Höhe des Baums, vermittelſt einer eigen dazu beſtimmten Einrichtung die Verhältniſſe der Durchmeſſer des Baums in verſchiedenen Höhen, alſo eigentlich die Abnahme der Durchmeſſer auf den Schopf zu, angeben. Oder man erhält durch ihren Gebrauch die Breitenſchnitte (Durchſchnitte) des Baums ſelbſt, oder wenigſtens das Verhältniß der Breitenſchnitte für gegebene Höhen. So eingerichtete Höhenmeſſer kann man mit Recht Baummeſſer (Dendrometer) nennen.

Von der erſtern Art ſind die zu Höhenmeſſern angewandten Aſtrolabia, und die hier §. 14. beſchriebenen beſondern Höhenmeſſer. Zu dieſer Art gehört aus der in F. G. Leonhardi's Forſt- und Jagd-Taſchenbuche, für das Jahr 1796 in XVI. beſchriebene: Von einem Höhenmeßinſtrumente, welches zugleich die Stelle einer Waſſerwaage vertritt, für Forſtoffizianten; von Fr. Meinert.

Von

Von der letztern Art ſind folgende: C. L. Reinhold's Beſchreibung eines Erdmikrometers für Mathematiker und Forſtbediente. Osnabrück, 1780. Der Breitenſchnitt des Baums wird vermittelſt einer Schraube angegeben. A. J. von Kregting's mathematiſche Beiträge zur Forſtwiſſenſchaft. Gieſſen, 1788. bezwecken eigentlich die Bekanntmachung eines vom Verfaſſer erfundenen Dendrometers oder Baummeſſers, womit zugleich die Anwendung auf Forſtvermeſſungen gezeigt wird.

Außer dieſen ſind die Höſchelſchen Baummeſſer bekannt, bei welchen die Baumdicke durch ein feines Glasmikrometer gemeſſen wird. Man findet die Beſchreibung eines Höſchelſchen Baummeſſers in Ignatz Pickels prakt. Unterrichte, wie man ſich bei der Ausmeſſung, Aufzeichnung und Berechnung großer Wälder zu verhalten habe ꝛc. Augsburg, 1785.

Der Herr Prof. Späth in Altorf läßt ebenfalls Baummeſſer verfertigen (Man ſehe deſſen Anleitung, die Mathematik u. phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen und forſtl. Camerale nützlich anzuwenden S. 542 f.), die eine Scale auf dünnes Horn oder Perlmutter eingeſchnitten, und ſchwarz eingelaſſen enthalten, weil in dem Walde bei Ermangelung des Lichts ſolche feine Striche auf Glas unſichtbar werden. Dieſe Scale wird nach ihrer Breite zerſchnitten und die eine Hälfte in einen Ring gefaßt, der auf der Alhidade des Quadranten ſenkrecht ſteht. Während alſo der untere Theil des Ringes frei iſt, und nichts die Ausſicht nach dem Baume verdunkelt, ſieht man an dieſem Hornmikrometer, wie nach und nach die Dicke des Baums abnimmt, indem man die Alhidade aus der waagerechten Richtung nach und nach elevirt, während der Baum beſtändig auf dem Mikrometer

bleibt.

bleibt. Die Anzahl der Striche, welche der Querſchnitt des Baums unter einer gegebenen Elevation an dem Mikrometer abſchneidet, zeigt übrigens das Verhältniß ſeiner Durchmeſſer für beide Elevationen, in Bezug auf die gegebenen Entfernungen vom Inſtrumente.

In der angeführten Anleitung ꝛc. S. 543 f. hat Herr Prof. Späth durch Beiſpiele den Gebrauch ſeines mit einem Hornmikrometer verſehenen Baummeſſers gezeigt, uud auf die Fälle aufmerkſam gemacht, die gewöhnlich überſehn werden. Die Berechnungen aber beziehen ſich auf trigonometriſche Formeln, und dürften daher nicht von jedem Forſtoffizianten verſtanden werden.

Soll ein ſtehender Baum kubirt werden, d. i. ſoll man ſeinen körperlichen Inhalt angeben, ſo iſt der Breitenſchnitt am Fuß, und unter ſeinem unterſten Aſte, und der Breitenſchnitt am Gipfel nöthig: will man außerdem auch noch ſeine Aeſte (ſein Aeſtig) berechnen, ſo müßten auch die Querſchnitte der Aeſte nahe bei dem Stamme, und überdies ihre Längen gemeſſen werden. Hieraus ſieht man, daß ein Baummeſſer mit einem Mikrometer ein Werkzeug iſt, welches in der Forſtwirthſchaft nicht entbehrt werden kann, wenn es auch nicht jeder Forſtoffiziant beſitzt. Joh. Heinrich Carl Meyer, Churfürſtl. Sächſiſcher Oberförſter der Aemter Belzig und Rabenſtein zu Dippmannsdorf im Amte Belzig, hat ſchon vor 20 Jahren einen künſtlichen Stab für Forſtbediente erfunden, mittelſt deſſen man nicht nur Perpendikularhöhen z. B. Bäume meſſen, ſondern auch den Diameter des gemeſſenen Baums genau finden kann. Dieſe Meßſtäbe verfertiget der Tiſchlermeiſter Michael Kretſchmar zu Gnadau in der Grafſchaft Barby, zu 6 rthlr., wobei man einen gedruckten Gebrauchszettel erhält.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe.

Die Hőhe, ſo wie die Stårke oder den Durchmeſſer eines Breiten- oder Querſchnitts an jeder Stelle eines Baums vermittelſt des Sonnenſchattens zu meſſen.

Aufloͤſung.

Zu einer Meſſung dieſer Art wird außer dem Sonnenſcheine ein gerader Stab erfordert, deſſen Långe oder Hőhe und Dicke oder Stårke bekannt iſt. Man wåhle dazu einen 6 Fuß hohen und 2 Zoll im Durchmeſſer ſtarken Stab, der außer dieſer Hőhe noch um einige Zolle tief in die Erde geſteckt werden kann.

Am Orte des zu meſſenden Baums ſtecke man dieſen Stab ein, merke außer ſeinen wahren Abmeſſungen an Hőhe und Dicke noch die Ausdehnung ſeines Schattens entweder ganz, oder bis zu der Långe, wie weit man ſie nåmlich mit der obern Stårke zu wiſſen verlangt, ſammt der Breite des Schattens. Zu eben der Zeit meſſe man den Schatten des Baums an Hőhe und Breite, wie am Stabe. Nachdem man damit fertig iſt, ſchließe man: Wie ſich verhålt die bekannte Hőhe und Stårke des Stabes zu der Hőhe und Stårke des Schattens; ſo verhålt ſich auch die Hőhe und Stårke des Schattens vom Baume zu der Hőhe und Stårke des Baums.

Beiſpiel:

Es ſei die Hőhe des Stabes über dem Boden 6 Fuß, und der daran geworfene Schatten 10 Fuß. Die Stårke des Stabes ſei 2 Zoll im Durchmeſſer, und die Breite des Schattens $2\frac{1}{2}$ Zoll oder 25 Linien. Der gefundene Schatten des Baums bis an den Ort, deſſen Hőhe man meſſen

meſſen will, ſei 72 Fuß, und die obere Breite 6 Zoll, ſo iſt

10′ Schatten : 6′ Höhe = 72′ Schatten : x Höhe

```
          6 |
    ─────── |
10)     432 | 43 Fuß 2 Zoll = x
```

25″ Schatten : 20‴ Stärke = 60‴ Schatten : x Stärke

```
       2 0  |
    ─────── |
25)   1200  | 48‴ oder 4 Zoll
      100   |   8 Linien Stärke
    ─────
      200
      200
    ─────
```

Der Baum iſt demnach 43 Fuß 2 Zoll hoch und oben 4 Zoll 8 Linien ſtark im Durchmeſſer des Quer- oder Breitenſchnitts.

Anmerkung.

Sollte man ja dieſe Aufgabe von einigem Gebrauche finden, ſo müßte man die Meſſung des Schattens Vormittags von 9 Uhr an, bis Nachmittags um 3 Uhr vornehmen, weil Morgens und Abends der Schatten theils zu lang, theils aber auch zu unbeſtimmt iſt. Allgemein iſt vom Gebrauche dieſer Aufgabe wenig zu halten; einmal iſt die Meſſung des Schattens ſelbſt zu unſicher, und die Unſicherheit wird noch durch das ſcheinbare Vorrücken der Sonne vermehrt; dann kann man auch nicht den Schatten jedes Baums ohne große Unbequemlichkeit meſſen.

Wäre die Aufgabe aber für die genannten Zwecke brauchbar, ſo könnte man auch für jede Höhe eines Baums den Durchmeſſer des Breitenſchnitts finden; das nämliche müßte dann auch für die Quer- oder Breitenſchnitte der Aeſte gelten, folglich würde ihr Gebrauch die Baummeſſer unnütz machen. Vielleicht dient ſie ihrer Unvollkommenheit ungeachtet dazu, Höhe und Stärke der Bäume ohngefähr zu beſtimmen, wenn es auf völlige Genauigkeit nicht abgeſehen iſt.

§. 16.

Aufgabe.

Die Hőhe eines Baums zu meſſen, zu deſſen Fuß man nicht kommen kann, Fig. 7.

Auflőſung.

Der Baum ſei ab, und ſtehe jenſeits eines Baches, über welchen man ohne viele Umſtånde nicht kommen kann.

In dieſem Falle verfahre man alſo:

Man wåhle dieſſeits des Baches zwei Standpunkte d und e, oder eine Standlinie dc, die mit des Baums Spitze nicht zu ſtumpfe und nicht zu ſpitze Winkel macht. In d meſſe man mit dem Winkelmeſſer den Winkel adc, und in e, den Winkel aec und die Standlinie de mit der Meßkette. Trågt man hierauf durch Hülfe eines verjüngten Maßſtabes, de auf eine gerade Linie, mit dem Transporteur an d den Winkel adc, und an e den Winkel aec, ſo erhålt man das Dreieck ade; fållt man nun aus a auf die verlångerte Standlinie dc den Perpendickel ac, ſo iſt ac der Hőhe des Baums von a bis dahin gemåß, wo die verlångerte Standlinie ſeinen Stamm beim Meſſen traf. Mißt man cb unmittelbar oder rechnet man dafür die Hőhe des Stativs, wenn der Boden, worauf der Baum und das Stativ ſtehen, in einerlei waagerechter Ebene liegen, ſo hat man in ab die Hőhe des Baums.

Anmerkung.

Soll die Hőhe des Baums nur einigermaßen richtig ausfallen, ſo darf ec nicht viel grőßer ſeyn, als die Hőhe des Baums; de aber muß, wo mőglich, noch kleiner ausfallen, damit aed nicht zu ſtumpf und ade nicht zu ſpitz werde, weil ſonſt in der Zeichnung der Durchſchnittspunkt a zu unbeſtimmt ausfållt.

§. 17.

Aufgabe.

Die Höhe eines Baums zu meſſen, wenn ſein Fuß tiefer ſteht, als der Boden liegt, worauf der Winkelmeſſer geſtellt wird, Fig. 8.

Aufloͤſung.

Es ſei a b der Baum, d der Ort, worauf man den Winkelmeſſer ſetzen muß mit der Vorausſetzung, daß d hoͤher liege, als eine durch den Fuß des Baums, oder durch b gelegte Horizontalebene.

Man ſetze das Inſtrument in d, und richte das unbewegliche Diopternlineal (oder den Durchmeſſer des Theilringes) waagerecht und viſire nach c. Die beweglichen Dioptern richte man auf den Fuß des Baumes b, und meſſe den Winkel c d b, welchen man den Depreſſionswinkel nennt; auf eine gleiche Art meſſe man auch a d c oder den Elevationswinkel; desgleichen mit der Meßkette die Linie d c.

Traͤgt man nun nach einem verjuͤngten Maßſtabe d c auf eine gerade Linie, zeichnet in d den Depreſſionswinkel c d b und den Elevationswinkel a d c und errichtet in c auf c d eine Perpendikularlinie, welche d a in a, und d b in b ſchneidet; ſo giebt a b auf dem gebrauchten verjuͤngten Maßſtabe die Hoͤhe des Baums.

Anmerkung.

Auf dieſe Art laͤßt ſich die Hoͤhe der Berge, Felſen, Thuͤrme, Haͤuſer ꝛc. meſſen. Welche Aufgabe ein gegebener Fall betrifft, laͤßt ſich jederzeit aus den Umſtaͤnden herleiten.

III.

Von den Durchſchlägen durch Gehölze, als Wege, Alleen und dergleichen.

§. 18.

Wege und Straßen, die in geraden Linien fortlaufen, haben für ein Land mancherlei Vortheile, beſonders wenn ſie an beiden Seiten mit Bäumen beſetzt ſind. Dieſe Bäume, ſie mögen nun unter die Obſtbäume oder unter Nutzholzbäume gehören, ſind im Ganzen ein Gegenſtand der Forſtwirthſchaft und ihre Anpflanzung und Erhaltung ein Gegenſtand des Förſters.

Da die Durchführung oder das Durchſchlagen eines Weges oder einer Straße, Allee und dergl. durch einen Wald oder ein Holz zu den Geſchäften eines Förſters gehört, ſo werden einige hierher gehörige Lehren nicht ohne Nutzen ſeyn.

§. 19.

Aufgabe.

Einen Weg, oder eine Allee geradelinig durch einen Wald oder durch ein anderes Holz zu ſchlagen, Fig. 9.

Auflöſung.

Hierbei kommen verſchiedene Fälle vor:

1) Wenn das Waldrevier, durch welches der Weg oder die Allee geſchlagen werden ſoll, gehörig vermeſſen und zu Papier gebracht iſt, und auf der Forſtcharte die Oerter angezeigt ſind, auf welche die Richtung des Weges am Aus- und Eingange des Holzes trifft.

In dieſem Falle zieht man auf der Forſtcharte (Fig. 9.) von dem Orte A nach B eine gerade Linie (wenn nämlich der Weg in dieſe Richtung treffen ſoll) durch den Wald.

Mißt

Mißt man nun den Winkel, den dieſe gerade Linie mit der daran ſtoßenden Seitenlinie des Waldes macht, mit dem Transporteur, wie hier $\alpha\beta a = 94\frac{1}{2}$ Grad, und trägt dieſen gefundenen Winkel durch Hülfe eines Winkelmeſſers in den gegebenen Punkt an das Gehölze, und verlängert den in den Wald treffenden Schenkel nach §. 47. und mit ihm eine Parallellinie nach §. 48. in der vorgeſchriebenen oder nöthigen Weite, ſo hat man eine Straße, Allee ꝛc. durch den Wald geſchlagen.

Statt des Aſtrolabiums kann man auch den Meßtiſch oder die Bouſſole wählen.

Mit dem Meßtiſche verfahre man auf folgende Art. Man zeichne nämlich einen Theil der Forſtcharte auf den Meßtiſch, der rechts oder links der Durchſchlagslinie AB liegt und notire beſonders den Winkel $\alpha\beta a$, wenn β und α; oder man meſſe den Winkel BAmm, wenn A als der Anfangs- und B als der Endpunkt am Walde gegeben ſind. Bringt man nun den Meßtiſch in die Station B, den Punkt β auf dem Meßtiſche durch Hülfe eines Senkloths an einer Gabel über β, die Linie Ba über βa, ſo giebt ein an $\beta\alpha$ gelegtes Diopternlineal die Richtung $\beta\alpha$ durch den Wald. Da man nun in dieſer Richtung außer β wenigſtens einen Stab einviſiren kann, ſo trifft man durch allmähliche Verlängerung endlich, am entgegengeſetzten Ende des Waldes, den Punkt α.

Auf eine ähnliche Art hätte man verfahren müſſen, wenn auf der andern Seite der Allee A und B, und der Theil der Forſtcharte gegeben worden wäre, der links A und B liegt. Auch kann man die Weite der beiden Parallellinien ſogleich beim Durchſchlagen beſtimmen, und eine ſowohl als die andere verlängern.

Die Bouſſole gebraucht man zu dieſem Geſchäfte alſo: Man nimmt die Bouſſole Fig. 12. vom Aſtrolabio ab, welches durch Schrauben möglich iſt, ſetzt ſie auf die Forſtcharte ſo, daß die auf ihr gezeichnete Mittagslinie auf die Richtung der Allee $\alpha\beta$ trift, und bemerkt den Abweichungswinkel der Magnetnadel von dieſer Mittagslinie; trägt man nun mit der auf das Aſtrolabium wieder aufgeſetzten Bouſſole, den gefundenen Abweichungswinkel an den Punkt β im Holze, viſirt durch die Dioptern, welche einerlei Richtung mit der Bouſſole haben, und ſteckt den Anfang dieſer Linie durch einige Stäbe ab, ſo kann man dieſe Richtung nach und nach verlängern, das Holz wegſchaffen, und man triſt am andern Ende des Holzes auf α, welches mit β in einerlei gerader Linie lieget und $\alpha\beta$ iſt die Richtung des Weges oder der Allee durch den Wald.

2) Wenn von dem Waldrevier keine Zeichnung vorhanden iſt, wenigſtens keine ſolche, auf die man ſich ſicher verlaſſen kann.

In dieſem Falle, wenn a und b (Fig. 18. Tab. II.*) die gegebenen Punkte an der Waldgränze ſind, könnte man folgenden Vorſchlag befolgen.

Man laſſe in a bei Abendzeit eine oder mehrere Raketen ſteigen oder bringe in a auf einen hohen, aber von andern Bäumen iſolirten Baum, einen Pechkranz an, nehme ſodann nach demſelben die ohngefähre Richtung bc, und ſtecke die Linie cd durch den Wald ab, wobei man ſich der Vortheile bedienen kann, welche Fig. 15 enthält. Da dieſe Linie nun, wie man voraus ſehen kann, nicht den gegebenen Punkt a genau, ſondern den Punkt d treffen wird, doch ſo, daß d von a nicht zu weit entfernt ſeyn wird; ſo kann die Linie ab durch cd nach folgendem Verfahren genau beſtimmt und als Richtungslinie einer Straße, Allee ꝛc. benutzt werden.

Man

Man meſſe b d beim Durchſchlagen genau, und merke in ihr einige Punkte, z. B. etwa, e, f, g und notire die Maße von b e, b f, b g. Nun errichte man aus d die Linie a d ſenkrecht auf d b, meſſe a d und zeichne nach einem verjüngten Maßſtabe aus d b, den rechten Winkel a d b und aus d a, das rechtwinkelige Dreieck a d b, und ziehe aus g, f und e die Linien g k, f i und e h parallel mit d a; meſſe dieſe Perpendikel g k, f i und e h, und trage ſie im Walde auf d b in g, f und e, ſo beſtimmen die Punkte a, k, i, h ꝛc. und b, die Lage der verlangten Straße oder Allee durch den Wald.

Kann man nur zwei dieſer Punkte, z. B. a und k oder k und i wechſelſeitig ſehen, ſo läßt ſich die Verlängerung ſehr leicht vornehmen, zumal die Richtung a b durchgeſchlagen werden ſoll.

Anmerkung.

Nach irgend einer dieſer Methoden kann man auch Hauptflügel von Luſtgebäuden an durch Wälder führen, die Durchſichten abholzen oder durchſchlagen. Noch iſt zu merken, daß Fig. 18. Tab. II.* die Buchſtaben aus dem großen Alphabeth gewählt, da ſie hier nur aus dem kleinen genommen ſind.

IV.

Von der Vermeſſung der Gränzen eines Reviers.

§. 20.

Das Aeußerſte eines Waldes oder eines Forſtreviers heißt die Gränze. Dieſe Gränze iſt entweder ſelbſt eine gebrochene Linie, die aus geraden Stücken beſteht, die Theile der Gränze oder Gränzlinien heißen, oder ſie muß bei der Vermeſſung des Reviers in eine ſolche Linie verwandelt werden. Die Gränzzeichen in den Endpunkten der Gränzlinien ſind entweder Maal- oder Gränz-

hügel, Gränzſteine, Gränzbäume, oder es ſind Wege, Flüſſe, Lachen ꝛc. Die Entfernung eines Gränzzeichens von dem andern iſt die gerade Linie, die zwiſchen beiden, als zwiſchen zwei Punkten liegt. Sind Wege, Flüſſe, Lachen ꝛc. Gränzmerkmale, ſo geben dieſe gewöhnlich krumme Gränzlinien. Ein Revier liegt entweder ununterbrochen in einem Bezirke beiſammen, oder es liegt durch Wieſen, Felder, Unterthanengehölze ꝛc. unterbrochen oder zerſtreut. Im erſten Falle wird das Revier durch Meſſung der Gränzlinien und der Winkel, welche dieſe machen, indem ſie ſich ſchneiden, in Grund gelegt, oder aufgenommen und aus den gemeſſenen Stücken, welche die Figur beſtimmen, gezeichnet; im andern Falle aber müſſen die zerſtreut liegenden Holzungen jede für ſich vermeſſen, und alle durch Linien mit einander verbunden werden, welche man nach der Mittagslinie oder überhaupt nach den Himmelsgegenden beſtimmt. Alle zwiſchen unzuſammenhängenden Theilen eines Forſtreviers liegenden Felder, Wieſen und Hölzer, die andern Beſitzern gehören, wie auch die im Reviere vorhandenen Blößen und Wieſen, die dazu gehören, ſo wie Holzwege, Lachen, Seen, Brüche, Teiche, Flüſſe, Straßen, Dörfer ꝛc. werden ſämmtlich der Größe nach mit vermeſſen, und in die Forſtcharte eingetragen. Beiſpiele können dieſe Vermeſſungsarten am zweckmäßigſten begreiflich machen und das Geſchäft verſinnlichen.

§. 21.

Aufgabe.

Die Gränzen eines Forſtreviers zu vermeſſen und aus dem Umfange des Reviers die Reviercharte zu entwerfen, Fig. 9.

Auflöſung.

Wenn das Revier zuſammenhängend in einem Bezirke liegt, ſo kann man auf folgende Art ver-

verfahren. Man meſſe alle Seiten des Reviers vermittelſt einer, nach dem angenommenen Längenmaße eingetheilten Meßkette, und drei Winkel weniger, als das Revier Seiten hat, mit irgend einem Winkelmeſſer. Aus dieſen gemeſſenen Stücken aber bringe man nach §. 124. (des theor. Theils) den Umfang des Reviers zu Papiere und man hat den Grundriß.

Beiſpiel.

Es ſei das Revier Freudenberg nebſt dem dazu gehörigen Horſte Fig. 9. in Grund zu legen und in Riß zu bringen.

Man bringe den Mittelpunkt des Winkelmeſſers über a und bezeichne b und m m mit Abſteckeſtäben, richte die unbeweglichen Dioptern aus a in b, und die beweglichen aus a in m m, und zähle die Anzahl der Grade des zwiſchen a b und a m m liegenden Bogens, ſo hat man die Größe des Winkels m m a b.

Ferner meſſe man a b mit der Meßkette, und ſchreibe die Maße des Winkels und der Gränzlinie in das Manual oder notire ſie in ein Brouillon.

Nun bringe man den Winkelmeſſer über den Punkt b, richte die unbeweglichen Dioptern in die Linie b a, die beweglichen aber aus b nach c, wo ebenfalls ein Abſteckeſtab ſteht, und zähle die Grade ꝛc. des Winkels a b c. Nachdem auch die Gränzlinie b c gemeſſen worden, wird auch hier alles ins Manual oder ins Brouillon notirt.

Ferner bringe man das Inſtrument über c, und richte die unbeweglichen Dioptern in c b, die beweglichen aber aus c nach d, und merke den Winkel b c d; nachdem man auch c d gemeſſen hat, trägt man die Maße des Winkels und der Linie abermals ins Manual.

Umgeht man auf dieſe Art das ganze Revier, ſo hat man, wenn der Winkel h h i i k k gemeſſen worden iſt, noch die Linien k k l l, l l m m, m m a zu meſſen, ohne daß man die davon eingeſchloſſenen Winkel zu meſſen nöthig hat. Aus dieſem gemeſſenen Stücke entwirſt man

kegelförmig ſeyn, oben dick und unten ſpitz. Bringt man an die Spitze einen eiſernen Schuh, oder eine Art von Schraube, ſo läßt er ſich ſo feſt in den Boden drehen, als es bei dieſer Meſſung nöthig iſt.

Ohne Stativ läßt ſich dieſer Höhenmeſſer auch auf den Meßtiſch ſtellen, und auf die vorhin beſchriebene Art gebrauchen.

Allgemeiner wird der Gebrauch dieſes Höhenmeſſers, wenn man ihm folgende Einrichtung giebt:

Man trage auf das horizontale Lineal ab (Fig. 17. Tab. II* von a nach b, eine gewiſſe Menge Fuße nach irgend einem verjüngten Maßſtabe, (d. i. ſo viel als man glaubt, für jede Entfernung von dem zu meſſenden Gegenſtande nöthig zu haben), etwa 100 oder 150, höchſtens 200. Auf der obern Fläche von ab laſſe man eine Nuth ziehen, und bringe in dieſe das ſenkrechte Lineal dc, vermittelſt eines Grades, der dicht aber auch leichte in der Nuthe hin und her geſchoben werden kann, und verſehe de von d nach e ebenfalls mit ſolchen Theilen, als ab hat. Die Zahl der Theile iſt auch hier unbeſtimmt, etwa 100 oder bis 160 höchſtens. Das übrige, Gewinde, Diopteru, Stativ ꝛc. iſt wie am vorigen Höhenmeſſer, und der Gebrauch iſt folgender:

Man meſſe die Entfernung des Baums vom Standpunkte a, und ſchiebe das Lineal von a nach b in die Zahl der Fuße, die geſunden worden iſt. Erhebt man nun ca um a ſo lange, bis man im Durchſchnitte der Faden die Spitze des Baums erblickt, ſo zählt man auf de, von d bis zum Durchſchnittspunkte c die Anzahl der Theile. So viel als man Theile findet, ſo viel Fuß iſt der Baum von der Stelle angerechnet hoch, wo das Horizontallineal ab den Baum trifft. Dieſe Höhe mit der Höhe des Inſtrumentes vom Boden vermehrt, giebt die geſammte

ſammte Höhe des Baums. Wäre z. B. die Entfernung des Baums vom Standpunkte 4, ſo ſchiebt man d e auf 4, und viſirt, und es ſchneidet a c von d e, 3, welches die Höhe des Baums, die Erhöhung des Inſtruments ungerechnet, iſt. Die Richtigkeit ergiebt ſich aus dem pythagoriſchen Zahlendreiecke (§. 87.).

Anmerkung.

Mit dieſem, ſo wie mit jedem Höhenmeſſer, kann man auch jedes Stück des Baums meſſen, welcher Fall dann eintritt, wenn man nur den zu einem gewiſſen Zwecke brauchbaren Theil des Stamms ſucht, wenn der Schopf zu ſpitz zuläuft.

Anmerkung über die Höhenmeſſer.

Der Höhenmeſſer zum forſtwirthſchaftlichen Gebrauche giebt es zweierlei Arten: Solche, durch deren Höhe man bloß die Höhe eines Baums zu meſſen im Stande iſt; dann ſolche, welche außer der Vorrichtung zur Meſſung der ſenkrechten Höhe des Baums, vermittelſt einer eigen dazu beſtimmten Einrichtung die Verhältniſſe der Durchmeſſer des Baums in verſchiedenen Höhen, alſo eigentlich die Abnahme der Durchmeſſer auf den Schopf zu, angeben. Oder man erhält durch ihren Gebrauch die Breitenſchnitte (Durchſchnitte) des Baums ſelbſt, oder wenigſtens das Verhältniß der Breitenſchnitte für gegebene Höhen. So eingerichtete Höhenmeſſer kann man mit Recht Baummeſſer (Dendrometer) nennen.

Von der erſtern Art ſind die zu Höhenmeſſern angewandten Aſtrolabia, und die hier §. 14. beſchriebenen beſondern Höhenmeſſer. Zu dieſer Art gehört aus der in F. G. Leonhardi's Forſt- und Jagd-Taſchenbuche, für das Jahr 1796 in XVI. beſchriebene: Von einem Höhenmeßinſtrumente, welches zugleich die Stelle einer Waſſerwaage vertritt, für Forſtoffizianten; von Fr. Meinert.

Von

eine Klafter, deren Scheitlänge 2 Fuß iſt, an Inhalt 72 F^3;
— andere — — $2\frac{1}{2}$ — — — — 90 —
— andere — — 3 — — — — 108 —
— andere — — $3\frac{1}{2}$ — — — — 126 —
— andere — — 4 — — — — 144 —
— andere — — $4\frac{1}{2}$ — — — — 162 —
— andere — — 5 — — — — 180 —
— andere — — $5\frac{1}{2}$ — — — — 198 —
— andere — — 6 — — — — 216 —

Dieſe letzte Klafter hat eine vollkommen reguläre Form, und gleicht einem Würfel oder Kubus, alle übrigen aber ſind Parallelepipeda, und müſſen daher auch als ſolche berechnet werden.

Drei Klaftern zuſammen genommen, heißen in Dresden und in der dortigen Gegend: ein Schragen Holz. Im Preußiſchen iſt die Scheitlänge in der Regel 3 Fuß, ſo daß eine Klafter 6 Fuß lang und 6 Fuß hoch, 108 Kubikfuß rheinl. hält.

b) Die Malter. Ein eigentlicher Malter iſt ein von Holzſcheiten aufgeſetzter Würfel, der 4 Fuß hoch, 4 Fuß breit, und 4 Fuß dick iſt; folglich deſſen Scheitlänge ebenfalls 4 Fuß beträgt.

Demnach iſt der Inhalt der Grundfläche 4.4 oder 16 Quadratfuß, und der körperliche Inhalt 4.16 oder 64 Kubikfuß. Alſo machen 9 dergleichen Malter 4 Holzklaftern, deren Scheitlänge 4 Fuß beträgt; denn 144.4=9.64 oder 576 Kubikfuß.

Nächſt dieſer Gattung von Maltern, giebt es noch andere, die mit der erwähnten oder mit andern Klaftern in ganz andern Verhältniſſen ſtehen, und wie die Holzklaftern die Geſtalt eines länglich viereckigen Körpers, oder die Form eines Parallelepipedums haben, und folglich auch als ſolche berechnet werden. So iſt z. B.

In Thüringen ein Malter 4 Fuß breit, 3 bis 4 Fuß hoch, und $3\frac{1}{2}$ Fuß in der Scheitlänge.

Im

Im Zerbſter Gebiete hat ein Malter 6 Fuß Breite, 3 Fuß Höhe und 4½ Fuß Scheitlänge.

c) Die Sechsziger. Ein Sechsziger hält 60 Schock (wovon auch der Name entſtanden iſt) oder 3600 Scheitchen, die insgeſammt 2 Fuß lang, 2 bis 2½ Zoll ſtark, und 3 bis 3½ Zoll breit oder dick ſind. Sechsziger kommen aber mehr in hartem, als in weichem Holze vor. Man rechnet ohngefähr, daß drei Wagen, jeder mit 4 Pferden beſpannt, einen dergleichen Sechsziger fahren können.

Berechnet man einen Sechsziger in Klafterform, ſo findet man, daß ein Sechsziger $4\frac{1}{11}$ Klaftern giebt, deren Scheitlänge 4 Fuß beträgt.

Im Magdeburgiſchen giebt es auch eine Art von Sechszigern, welche aus Reißigbunden oder aus ſogenannten Wellen zuſammen geſetzt werden. Ein dergleichen Bund hat 3 Fuß Länge, und 1 Fuß in ſeinem Umfange.

Anmerkung.

Alle, auch nur in den wichtigſten Provinzen und Forſten Deutſchlands anzugeben, iſt nicht nur hier unmöglich, ſondern auch überflüſſig, weil jeder Förſter die Holzform und Größe nach gegebenen Vorſchriften berechnen muß.

Eine Berechnung der Holzklaftern mit Hülfe der Logarithmen zur Abkürzung der Rechnung, ſo wie nützliche Vergleichungen derſelben nach verſchiedenen Maßen, findet man in Käſtners Anfangsgründen der Geometrie. S. 369—372, wo auch ein Beiſpiel aus dem allgemeinen Forſtmagazine 12 B. 161. S. angeführt, und nach Gründen der Arithmetik entwickelt wird.

Wenn man die in der Arithmetik aus einander geſetzte Lehre von den Verhältniſſen verſtanden, ſo wird man dergleichen Aufgaben, ohne Logarithmen freilich etwas mühſamer, aber doch richtig und nach Gründen aufzulöſen im Stande ſeyn.

Erſte Abtheilung.

Die angewandte Längenmeſſung
oder die
Euthymetrie im Forſtweſen.

§. 6.

Was Längenmeſſung überhaupt ſei, und wie man Linien oder Längen unmittelbar zu meſſen im Stande, lehrt der theoretiſche Theil der Geometrie (§. 41. Fig. 42. des theoret. Theils); hier alſo werden vorzüglich die praktiſchen Vortheile gezeigt, die man anwenden muß, Längen oder Linien mittelbar zu beſtimmen, da der Fall ſehr häufig eintritt, daß bei Längenmeſſungen forſtwirthſchaftlicher Gegenſtände, jede unmittelbare Meſſung entweder unmöglich, oder zu zeitſpielig, oder dem Forſte ſelbſt nachtheilig ſeyn würde.

I.

Von der Meſſung der Weiten oder Entfernungen gegebener Gegenſtände.

§. 7.

Bei der Meſſung der Entfernungen verſchiedener Gegenſtände, als Büſche, Gehölze ꝛc. kommen drei Fälle vor: Man kann nämlich entweder ungehindert von einem zum andern kommen; oder nur aus einem angenom-

nommenen Standpunkte entweder zu beiden, oder nur zu einem; oder man kann aus einem gegebenen Standpunkte zu keinem von beiden Gegenſtänden meſſen. Hieraus ergiebt ſich alſo von ſelbſt die Nothwendigkeit dreier Aufgaben, in welchen die Mittel gezeigt werden, wie man das Verlangte durch Hülfe theoretiſch-geometriſcher Kenntniſſe zu Stande bringt.

§. 8.

Aufgabe.

Die Weite oder Entfernung zweier Gehölze zu meſſen und auf das Papier zu tragen, zu welchen man unmittelbar kommen kann. Fig. 1 und 2.

Auflöſung.

Man ſoll die Entfernung a b meſſen, Fig. 1.

1) Liegen a und b ſo, daß man von a nach b, oder von b nach a ohne irgend eine Hinderniß meſſen kann, ſo meſſe man die Weite a b vermittelſt der Meßkette unmittelbar, die Gegend mag eben oder uneben, oder gebirgig ſeyn, nach §. 47. (des theor. Theils) und zeichne die gerade Linie a b nach einem willkürlich gewählten, oder vorgeſchriebenen verjüngten Maßſtabe an die Gehölze an, wie Fig. 1. (auf der erſten Kupfertafel des praktiſchen Theils der Geom.) zeiget.

2) Liegt zwiſchen a und b (Fig. 2.) aber ein Teich, eine Lache, oder ein ungangbarer Grund, ſo daß eine unmittelbare Meſſung der Linie a b unmöglich iſt; ſo wähle man einen ſolchen Standpunkt wie c, von welchem man ſo wohl nach a, als auch nach b unmittelbar hinmeſſen kann. In c ſetze man den Winkelmeſſer (nach der Vorſchrift §. 50.) und richte das unbewegliche Diopternlineal nach a, die Alhidade oder das bewegliche Lineal aber nach b und zähle die Anzahl der Grade ꝛc. die der

Winkel acb faſſet. Mißt man hierauf ca und cb mit der Meßkette horizontal, und zeichnet ſo wohl den gefundenen Winkel acb, als auch die gemeſſenen Linien, auf deſſen Schenkel von c nach a, und von c nach b und vollendet die Linie ab; ſo hat man die Weite ab auf dem verjüngten Maßſtabe. Die wirkliche Entfernung auf der Erde hat eben ſo viel Ruthen, Fuße ꝛc. im natürlichen Maße, als ab im verjüngten (§. 70. n. 1. des theor. Theils).

§. 9.

Verlangte man die Weite ab auf der Stelle, ohne Zeichnung zu wiſſen, ſo dürfte man nur das Dreieck bca rückwärts c ſo auftragen, daß die Verlängerung bc rückwärts = bc, und die Verlängerung ac rückwärts c = ac würde; ſo hätte man ab in dem zurückgetragenen kongruenten Dreiecke, und man könnte das Maß von ab durch unmittelbare Meſſung beſtimmen.

Wäre rückwärts c nicht Platz genug vorhanden, ſo dürfte man nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ꝛc. von bc und ac auf die denſelben zugehörige Verlängerungen auftragen, und die dadurch erhaltene Weite ab wäre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von der wirklichen Weite ab.

Auch könnte man, im Falle hinter c gar kein Platz vorhanden wäre, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von bc und ac, von c nach b ſowohl, als von c nach a tragen, und die ſo gefundene Weite ab wäre ebenfalls $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von der wirklichen Entfernung ab.

Anmerkung.

Hierbei wird vorausgeſetzt, daß man bei dem Zurücktragen der cb, ca ſo wohl, als beim Vorwärtstragen dieſer Linien, die Richtungen bc und ac genau beobachte, und die nöthigen Abſteckeſtäbe mit c, b und c, a ſo vollkommen in eine Vertikalebene zu bringen ſuche, als

es

es nur immer möglich iſt. Die Lehre von der Kongruenz der Dreiecke, worauf ſich auch die Aehnlichkeit derſelben ſtützt, giebt in allen Fällen eine Menge Hülfsmittel an, die der entbehren muß, der keine gründlichen Kenntniſſe der Geometrie weiß.

§. 10.

Aufgabe.

Die Entfernung zweier Gebüſche ꝛc. zu meſſen und aufzutragen, wenn man nur zu einem unmittelbar hinmeſſen kann, Fig. 2.

Auflöſung.

Zwiſchen beiden Gehölzen a und b liege ein Fluß; beide Gehölze aber gehören zu einerlei Revier, welches in Grund gelegt werden ſoll.

Um ab zu finden, verfahre man auf folgende Art:

1) Man wähle den Standpunkt, oder Standort c ſo, daß man von c nach a ſehen und unmittelbar hinmeſſen, nach b aber nur hinſehen oder viſiren kann, und meſſe den Winkel acb durch Hülfe irgend eines Winkelmeſſers ſo wohl, als den Winkel bac, indem man in c, wo der Winkelmeſſer geſtanden, einen Abſteckeſtab oder eine Fahne einſetzt.

2) Man meſſe auch die Linie ac, ſo hat man im Dreiecke acb, eine Seite und zwei Winkel, woraus man nach §. 77. unter den vorgefundenen Bedingungen ein dem Dreieck abc ähnliches Dreieck zu zeichnen im Stande iſt.

Das zur rechten Seite des Gehölzes b, auf der Kupfertafel befindliche Dreieck acb, enthält die Winkel c und a, ſo wie die gemeſſene Seite ac, und es iſt ab nach dem verjüngten Maßſtabe ſo groß, als die Entfernung der Gebüſche ab im natürlichen Maße.

§. 11.

Aufgabe.

Die Entfernung zweier Oerter a und b zu meſſen, und aufzutragen, wenn man zu keinem von beiden, aus einer gegebenen Standlinie kommen kann, Fig. 4.

Auflöſung.

Jenſeits eines Fluſſes (Fig. 4.) liegt ein Buſch a und das Förſterhaus b; beide Gegenſtände ſollen auf die Reviercharte aufgetragen werden, und das Revier liegt dieſſeits des Fluſſes.

1) Man wähle dieſſeits des Fluſſes ein Paar ſolche Standpunkte c und d, die man mit einer Standlinie verbindet, aus welchen man von c ſowohl, als von d, nach a und b ungehindert viſiren kann. Fängt man in c an, ſo ſetzt man den Winkelmeſſer in c und einen Abſteckeſtab mit einer Fahne in d, und richtet das unbewegliche Diopternlineal nach d, das bewegliche aber nach a, ſo erhält man den Winkel acd; viſirt man nun durch Hülfe des beweglichen Lineals auch nach b, ſo hat man auch den Winkel bcd. Mißt man hierauf die Standlinie cd mit der Meßkette, und zeichnet die drei unmittelbar gemeſſenen Stücke, die Winkel acd, bcd und die Standlinie cd, ins Manual, oder entwirft davon ein Brouillon, ſo hat man einen Theil der Figur (rechter Hand Fig. 4).

2) Nun bringe man den Winkelmeſſer aus c nach d, ſetze die Fahne in c, und richte das unbewegliche Lineal nach c ein. Viſirt man nun mit dem beweglichen Diopternlineal nach b und ſo auch nach a, ſo erhält man die Winkel bdc und adc, die man abermals ins Manual notirt, oder ins Brouillon (Fig. 4.) einzeichnet.

3) End-

3) Endlich zeichnet man die Figur aus dem Manuale oder aus dem Brouillon, auf folgende Art:

Auf cd (Fig. 4. rechter Hand) trägt man das gefundene Maß der Standlinie cd nach irgend einem verjüngten Maßſtabe; zeichnet mit dem Transporteur in c die Winkel acd und bcd, ſo wie in d, die Winkel bdc und adc, ſo ſchneiden ſich ca und da in a, ſo wie cb und db in b. Zieht man nun ab, ſo giebt ab auf dem gebrauchten verjüngten Maßſtabe eben ſo viel Ruthen, Fuße ꝛc. als ab auf dem Felde mißt, und dieſe Linie iſt die Entfernung des Buſches a vom Jäger- oder Förſterhauſe b.

Anmerkung 1.

Unter **Manual** verſteht man eine Art von Regiſter, worein man Größe der Linien und Winkel einträgt, und überhaupt alles notirt, was bei einer Vermeſſung Merkwürdiges vorkommen kann; unter **Brouillon** hingegen begreift man einen ungefähren Entwurf der Zeichnung auf Papier ſo, daß die entworfene Figur ſo viel Seiten und Winkel erhalte als die zu meſſende, mit Einſchreibung aller Größen an ihren Ort nach Maß und Zahlen, wie man ſie durch das unmittelbare Meſſen findet. Nach dem Brouillon läßt ſich die Zeichnung deſto ſchneller entwerfen, weil man ſchon einen Entwurf vor Augen hat, wenn dieſer auch der zu erhaltenen Figur nicht vollkommen gleicht.

Anmerkung 2.

Eine Auflöſung dieſer Aufgabe, durch Hülfe des **Pythagoriſchen Zahlendreiecks**, mit **Kette und Stäben**, durch **Hülfe des Aſtrolabiums**, **vermittelſt des Meßtiſches**, **aus einer Station durch den Gebrauch des Meßtiſches**, und **durch Hülfe trigonometriſcher Rechnungen**, findet man in **Meinerts Anfangsgründen der Feldmeßkunſt**, Kap. 5. §. 97.

Dieſe Aufgabe gehört zu den vorzüglichſten, und dient auch darzu, aus einer Standlinie einen ganzen Plan, oder ein ganzes Feld dann aufzunehmen, wenn man von den Endpunkten der Standlinie aus, die ganze Figur überſehen, alſo nach allen Winkelſpitzen frei viſiren kann.

Was die Wahl der Standlinie betrifft, ſo iſt dabei folgendes zu merken: Die Standlinie muß gegen die zu meſſende Linie nicht zu kurz ſeyn, und eine ſolche Lage gegen die in Grund zu legende Punkte haben, daß die Viſirlinien nach dieſen Punkten die Standlinie nicht unter zu ſtumpfen, aber auch nicht unter zu ſpitzen Winkeln ſchneiden. Dieſe Vorſichtsregel bezieht ſich auf die vollkommenſte Standlinie, aus welcher man mit der möglichſt größten Zuverläßigkeit einen Punkt in Grund legen kann, und dieſe iſt die Seite eines gleichſeitigen Dreiecks, ſo daß der in Grund zu legende Punkt des Dreiecks Spitze iſt. Da es aber nicht in allen Fällen, wie auch hier Fig. 4. möglich iſt, eine Standlinie ſo zu wählen, welche mit beiden in Grund zu legenden Punkten a und b dieſe Eigenſchaft haben kann, ſo muß man ihr wenigſtens ſo nahe zu kommen ſuchen, als möglich.

I.

Vom Höhenmeſſen.

§. 12.

Da man zur Berechnung des körperlichen Inhalts eines Baumes, ſeine Höhe zu wiſſen nöthig hat, ſo gehört das Höhenmeſſen unſtreitig in die Forſtgeometrie. Höhen und Tiefen ſind bloß der Lage nach einander entgegengeſetzt; was hoch iſt, ſteht über, und was tief iſt, liegt unter dem angenommenen Horizonte. Wer daher nach geometriſchen Gründen eine Höhe zu meſſen im Stande iſt, der kann auch Tiefen beſtimmen.

Nun kann man entweder unmittelbar an, oder nahe an den Fuß des Gegenſtandes, deſſen Höhe gemeſſen wer-

den

den ſoll, kommen oder nicht, woraus ſich alſo mehrere Fälle für das Höhenmeſſen herleiten laſſen, wovon die unentbehrlichſten hier folgen.

§. 13.

Aufgabe.

Die Höhe eines Baums zu meſſen, zu dem man unmittelbar kommen kann, Fig. 6.

Auflöſung.

Der Baum, deſſen Höhe gemeſſen werden ſoll, ſei a b. (Fig. 6.)

1) Man wähle ſich einen Standpunkt, wie hier c, von welchem aus man an den Baum kommen, und nach der Spitze a frei viſiren kann; ſetze in c den Winkelmeſſer ſo auf, daß deſſen Mittelpunkt ſenkrecht über c liegt, und ſtelle den Ring des Inſtruments mit Hülfe der Nuß vertikal ſo, daß das unbewegliche Diopternlineal horizontal in c b, das bewegliche aber in c a trifft. Zählt man nun die Anzahl der Grade, die auf dem Ringe zwiſchen c b und c a liegen, ſo hat man den Winkel a c b, den man den Elevationswinkel der Spitze des Baums über c b nennt. Wird hierauf die Linie c b gemeſſen, ſo kann man aus b c, dem Winkel a c b und dem rechten Winkel a b c ein Dreieck zeichnen, worin die Hypotenuſe der Linie a b gleich wird. Addirt man zu a b die Entfernung des Punkts b vom Boden, ſo hat man in der Summe die geſuchte Höhe des Baums.

Anmerkung.

Da es bei der Meſſung der Höhe eines Baumes oder auch der Höhe eines jeden andern Gegenſtandes, darauf ankömmt, die Spitze des Baums durch den Faden in der Objektivdiopter zu treffen, und ſolches bei der ge-

meinen Einrichtung nicht angeht, ſo verſehe man zu dieſem Zwecke die Dioptern zwar mit Faden, welche vertikal auf dem Horizonte ſtehen (wie bei dem Aſtrolabio), ſchneide dieſen Faden aber in jeder Diopter mit noch einem andern rechtwinkelig, damit ein Kreutz entſtehe; der Durchſchnittspunkt dieſer Faden, oder der Kreutzpunkt dient nun dazu, jeden Punkt in die Diopter zu faſſen; folglich kann man auch die äußerſte Spitze eines Baums in dieſen Durchſchnitt bringen.

2) Auch kann man ſich folgender Methode bedienen.

Man ſtellt den Winkelmeſſer gleich ſo, daß wenn der Ring oder die Platte vertikal hängt, und das unbewegliche Diopternlineal auf c b (Fig. 6.) gerichtet iſt, das bewegliche Diopternlineal einen Winkel von 45 Grad vom Ringe faſſet. Mit dieſer Stellung des Inſtruments gehe man in der Richtung b c ſo lange rückwärts oder vorwärts, bis man in einen Stand kommt, worin man durch das bewegliche Lineal im Durchſchnitte der Diopter die Spitze des Baums erblickt, ſo hat man oben an des Baums Spitze ebenfalls einen Winkel von 45 Grad, weil in jedem Falle a b c ein rechter Winkel iſt; mithin iſt das △ a c b gleichſchenkelig, und es iſt a b = b c oder der Entfernung des Standpunktes vom Baume gleich; wird nun von b bis an den Fuß des Baums gemeſſen, und zu a b addirt, ſo giebt die Summe ebenfalls die Höhe des Baums.

Anmerkung.

Steht der Fuß des Baums mit dem Fuße des Stativs auf einerlei Horizontalfläche, ſo iſt die Höhe des Stativs vom Boden an, bis zum Mittelpunkte des Winkelmeſſers gerechnet, der Entfernung b vom Boden, gleich, und es iſt in dieſem Falle die Höhe des Baums, die Höhe a b + der Höhe des Stativs.

All-

Allgemeine Anmerkung über den Gebrauch des Aſtrolabiums zum Höhenmeſſen.

Jedes Aſtrolabium kann als Höhenmeſſer gebraucht werden, es ſei ein halbes oder ganzes Aſtrolabium. Die Stellung des unbeweglichen Diopternlineals in den Horizont, oder kürzer die horizontale Stellung bewirkt man durch ein in den Mittelpunkt des Ringes angehängtes Senkloth, welches genau den Faden auf 90 Grad in der Eintheilung zeigen muß.

§. 14.

Beſchreibung eines für Forſtbediente bequemen Höhenmeſſers, Fig. 5.

Man vereiniget zwei Maßſtäbe durch ein Gewinde (Fig. 5.) ſo, daß man ſie übereinander legen, und das Ganze als einen Zollſtab brauchen kann. Die Länge betrage 1 Fuß oder 10 Decimalzolle. In deſſen Mitte bringe man das Band (aus Meſſing) a b ſo an, daß der Winkel im Gewinde oder zwiſchen den beiden Linealen, genau einen halben rechten Winkel, oder 45 Grad mache. In d und e bringe man ein Paar ganz einfache Dioptern an, ſo daß die Okulardiopter bei e eine kleine Oeffnung, die Objektivdiopter bei d aber eine größere erhalte, in welche man zwei Faden kreuzweis ſo einſpannen kann, daß ihr Durchſchnitt mit der Oeffnung e nicht nur in eine gerade Linie, ſondern in eine ſolche treffe, die mit der Kante des obern Lineals parallel läuft.

Dieſes einfache Inſtrument dient, die Höhe eines Baums nach der Auflöſung n. 2. §. 13. dann aufzulöſen, wenn man es auf einen Stab vermittelſt einer Schraube am Gewinde bringt, und das untere Lineal horizontal ſtellt. Der Stab als Stativ betrachtet, kann kegel-

kegelförmig ſeyn, oben dick und unten ſpitz. Bringt man an die Spitze einen eiſernen Schuh, oder eine Art von Schraube, ſo läßt er ſich ſo feſt in den Boden drehen, als es bei dieſer Meſſung nöthig iſt.

Ohne Stativ läßt ſich dieſer Höhenmeſſer auch auf den Meßtiſch ſtellen, und auf die vorhin beſchriebene Art gebrauchen.

Allgemeiner wird der Gebrauch dieſes Höhenmeſſers, wenn man ihm folgende Einrichtung giebt:

Man trage auf das horizontale Lineal ab (Fig. 17. Tab. II* von a nach b, eine gewiſſe Menge Fuße nach irgend einem verjüngten Maßſtabe, (d. i. ſo viel als man glaubt, für jede Entfernung von dem zu meſſenden Gegenſtande nöthig zu haben), etwa 100 oder 150, höchſtens 200. Auf der obern Fläche von ab laſſe man eine Nuth ziehen, und bringe in dieſe das ſenkrechte Lineal dc, vermittelſt eines Grades, der dicht aber auch leichte in der Nuthe hin und her geſchoben werden kann, und verſehe de von d nach e ebenfalls mit ſolchen Theilen, als ab hat. Die Zahl der Theile iſt auch hier unbeſtimmt, etwa 100 oder bis 160 höchſtens. Das übrige, Gewinde, Diopteru, Stativ ꝛc. iſt wie am vorigen Höhenmeſſer, und der Gebrauch iſt folgender:

Man meſſe die Entfernung des Baums vom Standpunkte a, und ſchiebe das Lineal von a nach b in die Zahl der Fuße, die gefunden worden iſt. Erhebt man nun ca um a ſo lange, bis man im Durchſchnitte der Faden die Spitze des Baums erblickt, ſo zählt man auf de, von d bis zum Durchſchnittspunkte c die Anzahl der Theile. So viel als man Theile findet, ſo viel Fuß iſt der Baum von der Stelle angerechnet hoch, wo das Horizontallineal ab den Baum trifft. Dieſe Höhe mit der Höhe des Inſtrumentes vom Boden vermehrt, giebt die geſammte

ſammte Höhe des Baums. Wäre z. B. die Entfernung des Baums vom Standpunkte 4, ſo ſchiebt man d e auf 4, und viſirt, und es ſchneidet a c von d e, 3, welches die Höhe des Baums, die Erhöhung des Inſtruments ungerechnet, iſt. Die Richtigkeit ergiebt ſich aus dem pythagoriſchen Zahlendreiecke (§. 87.).

Anmerkung.

Mit dieſem, ſo wie mit jedem Höhenmeſſer, kann man auch jedes Stück des Baums meſſen, welcher Fall dann eintritt, wenn man nur den zu einem gewiſſen Zwecke brauchbaren Theil des Stamms ſucht, wenn der Schopf zu ſpitz zuläuft.

Anmerkung über die Höhenmeſſer.

Der Höhenmeſſer zum forſtwirthſchaftlichen Gebrauche giebt es zweierlei Arten: Solche, durch deren Höhe man bloß die Höhe eines Baums zu meſſen im Stande iſt; dann ſolche, welche außer der Vorrichtung zur Meſſung der ſenkrechten Höhe des Baums, vermittelſt einer eigen dazu beſtimmten Einrichtung die Verhältniſſe der Durchmeſſer des Baums in verſchiedenen Höhen, alſo eigentlich die Abnahme der Durchmeſſer auf den Schopf zu, angeben. Oder man erhält durch ihren Gebrauch die Breitenſchnitte (Durchſchnitte) des Baums ſelbſt, oder wenigſtens das Verhältniß der Breitenſchnitte für gegebene Höhen. So eingerichtete Höhenmeſſer kann man mit Recht Baummeſſer (Dendrometer) nennen.

Von der erſtern Art ſind die zu Höhenmeſſern angewandten Aſtrolabia, und die hier §. 14. beſchriebenen beſondern Höhenmeſſer. Zu dieſer Art gehört aus der in F. G. Leonhardi's Forſt- und Jagd-Taſchenbuche, für das Jahr 1796 in XVI. beſchriebene: Von einem Höhenmeßinſtrumente, welches zugleich die Stelle einer Waſſerwaage vertritt, für Forſtoffizianten; von Fr. Meinert.

Von

Von der letztern Art ſind folgende: C. L. Reinhold's Beſchreibung eines Erdmikrometers für Mathematiker und Forſtbediente. Osnabrück, 1780. Der Breitenſchnitt des Baums wird vermittelſt einer Schraube angegeben. A. J. von Kregting's mathematiſche Beiträge zur Forſtwiſſenſchaft. Gieſſen, 1788. bezwecken eigentlich die Bekanntmachung eines vom Verfaſſer erfundenen Dendrometers oder Baummeſſers, womit zugleich die Anwendung auf Forſtvermeſſungen gezeigt wird.

Außer dieſen ſind die Höſchelſchen Baummeſſer bekannt, bei welchen die Baumdicke durch ein feines Glasmikrometer gemeſſen wird. Man findet die Beſchreibung eines Höſchelſchen Baummeſſers in Ignatz Pickels prakt. Unterrichte, wie man ſich bei der Ausmeſſung, Aufzeichnung und Berechnung großer Wälder zu verhalten habe ꝛc. Augsburg, 1785.

Der Herr Prof. Späth in Altorf läßt ebenfalls Baummeſſer verfertigen (Man ſehe deſſen Anleitung, die Mathematik u. phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen und forſtl. Camerale nützlich anzuwenden S. 542 f.), die eine Scale auf dünnes Horn oder Perlmutter eingeſchnitten, und ſchwarz eingelaſſen enthalten, weil in dem Walde bei Ermangelung des Lichts ſolche feine Striche auf Glas unſichtbar werden. Dieſe Scale wird nach ihrer Breite zerſchnitten und die eine Hälfte in einen Ring gefaßt, der auf der Alhidade des Quadranten ſenkrecht ſteht. Während alſo der untere Theil des Ringes frei iſt, und nichts die Ausſicht nach dem Baume verdunkelt, ſieht man an dieſem Hornmikrometer, wie nach und nach die Dicke des Baums abnimmt, indem man die Alhidade aus der waagerechten Richtung nach und nach elevirt, während der Baum beſtändig auf dem Mikrometer

bleibt.

bleibt. Die Anzahl der Striche, welche der Querſchnitt des Baums unter einer gegebenen Elevation an dem Mikrometer abſchneidet, zeigt übrigens das Verhältniß ſeiner Durchmeſſer für beide Elevationen, in Bezug auf die gegebenen Entfernungen vom Inſtrumente.

In der angeführten Anleitung ꝛc. S. 543 f. hat Herr Prof. Späth durch Beiſpiele den Gebrauch ſeines mit einem Hornmikrometer verſehenen Baummeſſers gezeigt, uud auf die Fälle aufmerkſam gemacht, die gewöhnlich überſehn werden. Die Berechnungen aber beziehen ſich auf trigonometriſche Formeln, und dürften daher nicht von jedem Forſtoffizianten verſtanden werden.

Soll ein ſtehender Baum kubirt werden, d. i. ſoll man ſeinen körperlichen Inhalt angeben, ſo iſt der Breitenſchnitt am Fuß, und unter ſeinem unterſten Aſte, und der Breitenſchnitt am Gipfel nöthig: will man außerdem auch noch ſeine Aeſte (ſein Aeſtig) berechnen, ſo müßten auch die Querſchnitte der Aeſte nahe bei dem Stamme, und überdies ihre Längen gemeſſen werden. Hieraus ſieht man, daß ein Baummeſſer mit einem Mikrometer ein Werkzeug iſt, welches in der Forſtwirthſchaft nicht entbehrt werden kann, wenn es auch nicht jeder Forſtoffiziant beſitzt. Joh. Heinrich Carl Meyer, Churfürſtl. Sächſiſcher Oberförſter der Aemter Belzig und Rabenſtein zu Dippmannsdorf im Amte Belzig, hat ſchon vor 20 Jahren einen künſtlichen Stab für Forſtbediente erfunden, mittelſt deſſen man nicht nur Perpendikularhöhen z. B. Bäume meſſen, ſondern auch den Diameter des gemeſſenen Baums genau finden kann. Dieſe Meßſtäbe verfertiget der Tiſchlermeiſter Michael Kretſchmar zu Gnadau in der Grafſchaft Barby, zu 6 rthlr., wobei man einen gedruckten Gebrauchszettel erhält.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe.

Die Höhe, ſo wie die Stärke oder den Durchmeſſer eines Breiten- oder Querſchnitts an jeder Stelle eines Baums vermittelſt des Sonnenſchattens zu meſſen.

Auflöſung.

Zu einer Meſſung dieſer Art wird außer dem Sonnenſcheine ein gerader Stab erfordert, deſſen Länge oder Höhe und Dicke oder Stärke bekannt iſt. Man wähle dazu einen 6 Fuß hohen und 2 Zoll im Durchmeſſer ſtarken Stab, der außer dieſer Höhe noch um einige Zolle tief in die Erde geſteckt werden kann.

Am Orte des zu meſſenden Baums ſtecke man dieſen Stab ein, merke außer ſeinen wahren Abmeſſungen an Höhe und Dicke noch die Ausdehnung ſeines Schattens entweder ganz, oder bis zu der Länge, wie weit man ſie nämlich mit der obern Stärke zu wiſſen verlangt, ſammt der Breite des Schattens. Zu eben der Zeit meſſe man den Schatten des Baums an Höhe und Breite, wie am Stabe. Nachdem man damit fertig iſt, ſchließe man: Wie ſich verhält die bekannte Höhe und Stärke des Stabes zu der Höhe und Stärke des Schattens; ſo verhält ſich auch die Höhe und Stärke des Schattens vom Baume zu der Höhe und Stärke des Baums.

Beiſpiel:

Es ſei die Höhe des Stabes über dem Boden 6 Fuß, und der daran geworfene Schatten 10 Fuß. Die Stärke des Stabes ſei 2 Zoll im Durchmeſſer, und die Breite des Schattens $2\frac{1}{2}$ Zoll oder 25 Linien. Der gefundene Schatten des Baums bis an den Ort, deſſen Höhe man

meſſen

meſſen will, ſei 72 Fuß, und die obere Breite 6 Zoll, ſo iſt

10′ Schatten : 6′ Höhe = 72′ Schatten : x Höhe

```
         6
    ─────
10)  432 | 43 Fuß 2 Zoll = x
```

25″ Schatten : 20‴ Stärke = 60‴ Schatten : x Stärke

```
          2 0
     ─────────
25)  1200 |  48‴ oder 4 Zoll
     100  |  8 Linien Stärke
     ───
      200
      200
     ───
```

Der Baum iſt demnach 43 Fuß 2 Zoll hoch und oben 4 Zoll 8 Linien ſtark im Durchmeſſer des Quer- oder Breitenſchnitts.

Anmerkung.

Sollte man ja dieſe Aufgabe von einigem Gebrauche finden, ſo müßte man die Meſſung des Schattens Vormittags von 9 Uhr an, bis Nachmittags um 3 Uhr vornehmen, weil Morgens und Abends der Schatten theils zu lang, theils aber auch zu unbeſtimmt iſt. Allgemein iſt vom Gebrauche dieſer Aufgabe wenig zu halten; einmal iſt die Meſſung des Schattens ſelbſt zu unſicher, und die Unſicherheit wird noch durch das ſcheinbare Vorrücken der Sonne vermehrt; dann kann man auch nicht den Schatten jedes Baums ohne große Unbequemlichkeit meſſen.

Wäre die Aufgabe aber für die genannten Zwecke brauchbar, ſo könnte man auch für jede Höhe eines Baums den Durchmeſſer des Breitenſchnitts finden; das nämliche müßte dann auch für die Quer- oder Breitenſchnitte der Aeſte gelten, folglich würde ihr Gebrauch die Baummeſſer unnütz machen. Vielleicht dient ſie ihrer Unvollkommenheit ungeachtet dazu, Höhe und Stärke der Bäume ohngefähr zu beſtimmen, wenn es auf völlige Genauigkeit nicht abgeſehen iſt.

kegelförmig ſeyn, oben dick und unten ſpitz. Bringt man an die Spitze einen eiſernen Schuh, oder eine Art von Schraube, ſo läßt er ſich ſo feſt in den Boden drehen, als es bei dieſer Meſſung nöthig iſt.

Ohne Stativ läßt ſich dieſer Höhenmeſſer auch auf den Meßtiſch ſtellen, und auf die vorhin beſchriebene Art gebrauchen.

Allgemeiner wird der Gebrauch dieſes Höhenmeſſers, wenn man ihm folgende Einrichtung giebt:

Man trage auf das horizontale Lineal ab (Fig. 17. Tab. II* von a nach b, eine gewiſſe Menge Fuße nach irgend einem verjüngten Maßſtabe, (d. i. ſo viel als man glaubt, für jede Entfernung von dem zu meſſenden Gegenſtande nöthig zu haben), etwa 100 oder 150, höchſtens 200. Auf der obern Fläche von ab laſſe man eine Nuth ziehen, und bringe in dieſe das ſenkrechte Lineal dc, vermittelſt eines Grades, der dicht aber auch leichte in der Nuthe hin und her geſchoben werden kann, und verſehe de von d nach e ebenfalls mit ſolchen Theilen, als ab hat. Die Zahl der Theile iſt auch hier unbeſtimmt, etwa 100 oder bis 160 höchſtens. Das übrige, Gewinde, Diopttern, Stativ ꝛc. iſt wie am vorigen Höhenmeſſer, und der Gebrauch iſt folgender:

Man meſſe die Entfernung des Baums vom Standpunkte a, und ſchiebe das Lineal von a nach b in die Zahl der Fuße, die gefunden worden iſt. Erhebt man nun ca um a ſo lange, bis man im Durchſchnitte der Faden die Spitze des Baums erblickt, ſo zählt man auf de, von d bis zum Durchſchnittspunkte c die Anzahl der Theile. So viel als man Theile findet, ſo viel Fuß iſt der Baum von der Stelle angerechnet hoch, wo das Horizontallineal ab den Baum trifft. Dieſe Höhe mit der Höhe des Inſtrumentes vom Boden vermehrt, giebt die geſammte

ſammte Höhe des Baums. Wäre z. B. die Entfernung des Baums vom Standpunkte 4, ſo ſchiebt man d e auf 4, und viſirt, und es ſchneidet a c von d e, 3, welches die Höhe des Baums, die Erhöhung des Inſtruments ungerechnet, iſt. Die Richtigkeit ergiebt ſich aus dem pythagoriſchen Zahlendreiecke (§. 87.).

Anmerkung.

Mit dieſem, ſo wie mit jedem Höhenmeſſer, kann man auch jedes Stück des Baums meſſen, welcher Fall dann eintritt, wenn man nur den zu einem gewiſſen Zwecke brauchbaren Theil des Stamms ſucht, wenn der Schopf zu ſpitz zuläuft.

Anmerkung über die Höhenmeſſer.

Der Höhenmeſſer zum forſtwirthſchaftlichen Gebrauche giebt es zweierlei Arten: Solche, durch deren Höhe man bloß die Höhe eines Baums zu meſſen im Stande iſt; dann ſolche, welche außer der Vorrichtung zur Meſſung der ſenkrechten Höhe des Baums, vermittelſt einer eigen dazu beſtimmten Einrichtung die Verhältniſſe der Durchmeſſer des Baums in verſchiedenen Höhen, alſo eigentlich die Abnahme der Durchmeſſer auf den Schopf zu, angeben. Oder man erhält durch ihren Gebrauch die Breitenſchnitte (Durchſchnitte) des Baums ſelbſt, oder wenigſtens das Verhältniß der Breitenſchnitte für gegebene Höhen. So eingerichtete Höhenmeſſer kann man mit Recht Baummeſſer (Dendrometer) nennen.

Von der erſtern Art ſind die zu Höhenmeſſern angewandten Aſtrolabia, und die hier §. 14. beſchriebenen beſondern Höhenmeſſer. Zu dieſer Art gehört aus der in F. G. Leonhardi's Forſt- und Jagd-Taſchenbuche, für das Jahr 1796 in XVI. beſchriebene: Von einem Höhenmeßinſtrumente, welches zugleich die Stelle einer Waſſerwaage vertritt, für Forſtoffizianten; von Fr. Meinert.

Von

Von der letztern Art ſind folgende: C. L. Reinhold's Beſchreibung eines Erdmikrometers für Mathematiker und Forſtbediente. Osnabrück, 1780. Der Breitenſchnitt des Baums wird vermittelſt einer Schraube angegeben. A. J. von Kregting's mathematiſche Beiträge zur Forſtwiſſenſchaft. Gieſſen, 1788. bezwecken eigentlich die Bekanntmachung eines vom Verfaſſer erfundenen Dendrometers oder Baummeſſers, womit zugleich die Anwendung auf Forſtvermeſſungen gezeigt wird.

Außer dieſen ſind die Höſchelſchen Baummeſſer bekannt, bei welchen die Baumdicke durch ein feines Glasmikrometer gemeſſen wird. Man findet die Beſchreibung eines Höſchelſchen Baummeſſers in Ignatz Pickels prakt. Unterrichte, wie man ſich bei der Ausmeſſung, Aufzeichnung und Berechnung großer Wälder zu verhalten habe ꝛc. Augsburg, 1785.

Der Herr Prof. Späth in Altorf läßt ebenfalls Baummeſſer verfertigen (Man ſehe deſſen Anleitung, die Mathematik u. phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen und forſtl. Camerale nützlich anzuwenden S. 542 f.), die eine Scale auf dünnes Horn oder Perlmutter eingeſchnitten, und ſchwarz eingelaſſen enthalten, weil in dem Walde bei Ermangelung des Lichts ſolche feine Striche auf Glas unſichtbar werden. Dieſe Scale wird nach ihrer Breite zerſchnitten und die eine Hälfte in einen Ring gefaßt, der auf der Alhidade des Quadranten ſenkrecht ſteht. Während alſo der untere Theil des Ringes frei iſt, und nichts die Ausſicht nach dem Baume verdunkelt, ſieht man an dieſem Hornmikrometer, wie nach und nach die Dicke des Baums abnimmt, indem man die Alhidade aus der waagerechten Richtung nach und nach elevirt, während der Baum beſtändig auf dem Mikrometer bleibt.

bleibt. Die Anzahl der Striche, welche der Querſchnitt des Baums unter einer gegebenen Elevation an dem Mikrometer abſchneidet, zeigt übrigens das Verhältniß ſeiner Durchmeſſer für beide Elevationen, in Bezug auf die gegebenen Entfernungen vom Inſtrumente.

In der angeführten Anleitung ꝛc. S. 543 f. hat Herr Prof. Späth durch Beiſpiele den Gebrauch ſeines mit einem Hornmikrometer verſehenen Baummeſſers gezeigt, uud auf die Fälle aufmerkſam gemacht, die gewöhnlich überſehn werden. Die Berechnungen aber beziehen ſich auf trigonometriſche Formeln, und dürften daher nicht von jedem Forſtoffizianten verſtanden werden.

Soll ein ſtehender Baum kubirt werden, d. i. ſoll man ſeinen körperlichen Inhalt angeben, ſo iſt der Breitenſchnitt am Fuß, und unter ſeinem unterſten Aſte, und der Breitenſchnitt am Gipfel nöthig: will man außerdem auch noch ſeine Aeſte (ſein Aeſtig) berechnen, ſo müßten auch die Querſchnitte der Aeſte nahe bei dem Stamme, und überdies ihre Längen gemeſſen werden. Hieraus ſieht man, daß ein Baummeſſer mit einem Mikrometer ein Werkzeug iſt, welches in der Forſtwirthſchaft nicht entbehrt werden kann, wenn es auch nicht jeder Forſtoffiziant beſitzt. Joh. Heinrich Carl Meyer, Churfürſtl. Sächſiſcher Oberförſter der Aemter Belzig und Rabenſtein zu Dippmannsdorf im Amte Belzig, hat ſchon vor 20 Jahren einen künſtlichen Stab für Forſtbediente erfunden, mittelſt deſſen man nicht nur Perpendikularhöhen z. B. Bäume meſſen, ſondern auch den Diameter des gemeſſenen Baums genau finden kann. Dieſe Meßſtäbe verfertiget der Tiſchlermeiſter Michael Kretſchmar zu Gnadau in der Grafſchaft Barby, zu 6 rthlr., wobei man einen gedruckten Gebrauchszettel erhält.

§. 15.

Aufgabe.

Die Höhe, ſo wie die Stärke oder den Durchmeſſer eines Breiten- oder Querſchnitts an jeder Stelle eines Baums vermittelſt des Sonnenſchattens zu meſſen.

Auflöſung.

Zu einer Meſſung dieſer Art wird außer dem Sonnenſcheine ein gerader Stab erfordert, deſſen Länge oder Höhe und Dicke oder Stärke bekannt iſt. Man wähle dazu einen 6 Fuß hohen und 2 Zoll im Durchmeſſer ſtarken Stab, der außer dieſer Höhe noch um einige Zolle tief in die Erde geſteckt werden kann.

Am Orte des zu meſſenden Baums ſtecke man dieſen Stab ein, merke außer ſeinen wahren Abmeſſungen an Höhe und Dicke noch die Ausdehnung ſeines Schattens entweder ganz, oder bis zu der Länge, wie weit man ſie nämlich mit der obern Stärke zu wiſſen verlangt, ſammt der Breite des Schattens. Zu eben der Zeit meſſe man den Schatten des Baums an Höhe und Breite, wie am Stabe. Nachdem man damit fertig iſt, ſchließe man: Wie ſich verhält die bekannte Höhe und Stärke des Stabes zu der Höhe und Stärke des Schattens; ſo verhält ſich auch die Höhe und Stärke des Schattens vom Baume zu der Höhe und Stärke des Baums.

Beiſpiel:

Es ſei die Höhe des Stabes über dem Boden 6 Fuß, und der daran geworfene Schatten 10 Fuß. Die Stärke des Stabes ſei 2 Zoll im Durchmeſſer, und die Breite des Schattens $2\frac{1}{2}$ Zoll oder 25 Linien. Der gefundene Schatten des Baums bis an den Ort, deſſen Höhe man meſſen

meſſen will, ſei 72 Fuß, und die obere Breite 6 Zoll, ſo iſt

$$10'\text{ Schatten} : 6'\text{ Höhe} = 72'\text{ Schatten} : x\text{ Höhe}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & \\ \hline 10)\ 432 & 43\text{ Fuß } 2\text{ Zoll} = x \end{array}$$

$$25''\text{ Schatten} : 20'''\text{ Stärke} = 60'''\text{ Schatten} : x\text{ Stärke}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & \\ \hline 25)\ 1200 & 48'''\text{ oder } 4\text{ Zoll} \\ 100 & 8\text{ Linien Stärke} \\ \hline 200 & \\ 200 & \end{array}$$

Der Baum iſt demnach 43 Fuß 2 Zoll hoch und oben 4 Zoll 8 Linien ſtark im Durchmeſſer des Quer- oder Breitenſchnitts.

Anmerkung.

Sollte man ja dieſe Aufgabe von einigem Gebrauche finden, ſo müßte man die Meſſung des Schattens Vormittags von 9 Uhr an, bis Nachmittags um 3 Uhr vornehmen, weil Morgens und Abends der Schatten theils zu lang, theils aber auch zu unbeſtimmt iſt. Allgemein iſt vom Gebrauche dieſer Aufgabe wenig zu halten; einmal iſt die Meſſung des Schattens ſelbſt zu unſicher, und die Unſicherheit wird noch durch das ſcheinbare Vorrücken der Sonne vermehrt; dann kann man auch nicht den Schatten jedes Baums ohne große Unbequemlichkeit meſſen.

Wäre die Aufgabe aber für die genannten Zwecke brauchbar, ſo könnte man auch für jede Höhe eines Baums den Durchmeſſer des Breitenſchnitts finden; das nämliche müßte dann auch für die Quer- oder Breitenſchnitte der Aeſte gelten, folglich würde ihr Gebrauch die Baummeſſer unnütz machen. Vielleicht dient ſie ihrer Unvollkommenheit ungeachtet dazu, Höhe und Stärke der Bäume ohngefähr zu beſtimmen, wenn es auf völlige Genauigkeit nicht abgeſehen iſt.

§. 16.

Aufgabe.

Die Höhe eines Baums zu meſſen, zu deſſen Fuß man nicht kommen kann, Fig. 7.

Auflöſung.

Der Baum ſei ab, und ſtehe jenſeits eines Baches, über welchen man ohne viele Umſtände nicht kommen kann.

In dieſem Falle verfahre man alſo:

Man wähle dieſſeits des Baches zwei Standpunkte d und e, oder eine Standlinie dc, die mit des Baums Spitze nicht zu ſtumpfe und nicht zu ſpitze Winkel macht. In d meſſe man mit dem Winkelmeſſer den Winkel adc, und in e, den Winkel aec und die Standlinie de mit der Meßkette. Trägt man hierauf durch Hülfe eines verjüngten Maßſtabes, de auf eine gerade Linie, mit dem Transporteur an d den Winkel adc, und an e den Winkel aec, ſo erhält man das Dreieck ade; fällt man nun aus a auf die verlängerte Standlinie dc den Perpendickel ac, ſo iſt ac der Höhe des Baums von a bis dahin gemäß, wo die verlängerte Standlinie ſeinen Stamm beim Meſſen traf. Mißt man cb unmittelbar oder rechnet man dafür die Höhe des Stativs, wenn der Boden, worauf der Baum und das Stativ ſtehen, in einerlei waagerechter Ebene liegen, ſo hat man in ab die Höhe des Baums.

Anmerkung.

Soll die Höhe des Baums nur einigermaßen richtig ausfallen, ſo darf ec nicht viel größer ſeyn, als die Höhe des Baums; de aber muß, wo möglich, noch kleiner ausfallen, damit aed nicht zu ſtumpf und ade nicht zu ſpitz werde, weil ſonſt in der Zeichnung der Durchſchnittspunkt a zu unbeſtimmt ausfällt.

§. 17.

Aufgabe.

Die Höhe eines Baums zu meſſen, wenn ſein Fuß tiefer ſteht, als der Boden liegt, worauf der Winkelmeſſer geſtellt wird, Fig. 8.

Auflöſung.

Es ſei a b der Baum, d der Ort, worauf man den Winkelmeſſer ſetzen muß mit der Vorausſetzung, daß d höher liege, als eine durch den Fuß des Baums, oder durch b gelegte Horizontalebene.

Man ſetze das Inſtrument in d, und richte das unbewegliche Diopternlineal (oder den Durchmeſſer des Theilringes) waagerecht und viſire nach c. Die beweglichen Dioptern richte man auf den Fuß des Baumes b, und meſſe den Winkel c d b, welchen man den Depreſſionswinkel nennt; auf eine gleiche Art meſſe man auch a d c oder den Elevationswinkel; desgleichen mit der Meßkette die Linie d c.

Trägt man nun nach einem verjüngten Maßſtabe d c auf eine gerade Linie, zeichnet in d den Depreſſionswinkel c d b und den Elevationswinkel a d c und errichtet in c auf c d eine Perpendikularlinie, welche d a in a, und d b in b ſchneidet; ſo giebt a b auf dem gebrauchten verjüngten Maßſtabe die Höhe des Baums.

Anmerkung.

Auf dieſe Art läßt ſich die Höhe der Berge, Felſen, Thürme, Häuſer ꝛc. meſſen. Welche Aufgabe ein gegebener Fall betrifft, läßt ſich jederzeit aus den Umſtänden herleiten.

III.

Von den Durchſchlägen durch Gehölze, als Wege, Alleen und dergleichen.

§. 18.

Wege und Straßen, die in geraden Linien fortlaufen, haben für ein Land mancherlei Vortheile, beſonders wenn ſie an beiden Seiten mit Bäumen beſetzt ſind. Dieſe Bäume, ſie mögen nun unter die Obſtbäume oder unter Nutzholzbäume gehören, ſind im Ganzen ein Gegenſtand der Forſtwirthſchaft und ihre Anpflanzung und Erhaltung ein Gegenſtand des Förſters.

Da die Durchführung oder das Durchſchlagen eines Weges oder einer Straße, Allee und dergl. durch einen Wald oder ein Holz zu den Geſchäften eines Förſters gehört, ſo werden einige hierher gehörige Lehren nicht ohne Nutzen ſeyn.

§. 19.

Aufgabe.

Einen Weg, oder eine Allee geradelinig durch einen Wald oder durch ein anderes Holz zu ſchlagen, Fig. 9.

Auflöſung.

Hierbei kommen verſchiedene Fälle vor:

1) Wenn das Waldrevier, durch welches der Weg oder die Allee geſchlagen werden ſoll, gehörig vermeſſen und zu Papier gebracht iſt, und auf der Forſtcharte die Oerter angezeigt ſind, auf welche die Richtung des Weges am Aus- und Eingange des Holzes trifft.

In dieſem Falle zieht man auf der Forſtcharte (Fig. 9.) von dem Orte A nach B eine gerade Linie (wenn nämlich der Weg in dieſe Richtung treffen ſoll) durch den Wald.

Mißt

Mißt man nun den Winkel, den dieſe gerade Linie mit der daran ſtoßenden Seitenlinie des Waldes macht, mit dem Transporteur, wie hier $\alpha\beta a = 94\frac{1}{2}$ Grad, und trägt dieſen gefundenen Winkel durch Hülfe eines Winkelmeſſers in den gegebenen Punkt an das Gehölze, und verlängert den in den Wald treffenden Schenkel nach §. 47. und mit ihm eine Parallellinie nach §. 48. in der vorgeſchriebenen oder nöthigen Weite, ſo hat man eine Straße, Allee ꝛc. durch den Wald geſchlagen.

Statt des Aſtrolabiums kann man auch den Meßtiſch oder die Bouſſole wählen.

Mit dem Meßtiſche verfahre man auf folgende Art. Man zeichne nämlich einen Theil der Forſtcharte auf den Meßtiſch, der rechts oder links der Durchſchlagslinie AB liegt und notire beſonders den Winkel $\alpha\beta a$, wenn β und α; oder man meſſe den Winkel BAmm, wenn A als der Anfangs- und B als der Endpunkt am Walde gegeben ſind. Bringt man nun den Meßtiſch in die Station B, den Punkt β auf dem Meßtiſche durch Hülfe eines Senkloths an einer Gabel über β, die Linie Ba über βa, ſo giebt ein an $\beta\alpha$ gelegtes Diopternlineal die Richtung $\beta\alpha$ durch den Wald. Da man nun in dieſer Richtung außer β wenigſtens einen Stab einviſiren kann, ſo trifft man durch allmähliche Verlängerung endlich, am entgegengeſetzten Ende des Waldes, den Punkt α.

Auf eine ähnliche Art hätte man verfahren müſſen, wenn auf der andern Seite der Allee A und B, und der Theil der Forſtcharte gegeben worden wäre, der links A und B liegt. Auch kann man die Weite der beiden Parallellinien ſogleich beim Durchſchlagen beſtimmen, und eine ſowohl als die andere verlängern.

Die Bouſſole gebraucht man zu dieſem Geſchäfte alſo: Man nimmt die Bouſſole Fig. 12. vom Aſtrolabio ab, welches durch Schrauben möglich iſt, ſetzt ſie auf die Forſtcharte ſo, daß die auf ihr gezeichnete Mittagslinie auf die Richtung der Allee $\alpha\beta$ trift, und bemerkt den Abweichungswinkel der Magnetnadel von dieſer Mittagslinie; trägt man nun mit der auf das Aſtrolabium wieder aufgeſetzten Bouſſole, den gefundenen Abweichungswinkel an den Punkt β im Holze, viſirt durch die Dioptern, welche einerlei Richtung mit der Bouſſole haben, und ſteckt den Anfang dieſer Linie durch einige Stäbe ab, ſo kann man dieſe Richtung nach und nach verlängern, das Holz wegſchaffen, und man trift am andern Ende des Holzes auf α, welches mit β in einerlei gerader Linie lieget und $\alpha\beta$ iſt die Richtung des Weges oder der Allee durch den Wald.

2) Wenn von dem Waldrevier keine Zeichnung vorhanden iſt, wenigſtens keine ſolche, auf die man ſich ſicher verlaſſen kann.

In dieſem Falle, wenn a und b (Fig. 18. Tab. II.*) die gegebenen Punkte an der Waldgränze ſind, könnte man folgenden Vorſchlag befolgen.

Man laſſe in a bei Abendzeit eine oder mehrere Raketen ſteigen oder bringe in a auf einen hohen, aber von andern Bäumen iſolirten Baum, einen Pechkranz an, nehme ſodann nach demſelben die ohngefähre Richtung bc, und ſtecke die Linie cd durch den Wald ab, wobei man ſich der Vortheile bedienen kann, welche Fig. 15 enthält. Da dieſe Linie nun, wie man voraus ſehen kann, nicht den gegebenen Punkt a genau, ſondern den Punkt d treffen wird, doch ſo, daß d von a nicht zu weit entfernt ſeyn wird; ſo kann die Linie ab durch cd nach folgendem Verfahren genau beſtimmt und als Richtungslinie einer Straße, Allee ꝛc. benutzt werden.

Man

Man meſſe b d beim Durchſchlagen genau, und merke in ihr einige Punkte, z. B. etwa, e, f, g und notire die Maße von b e, b f, b g. Nun errichte man aus d die Linie a d ſenkrecht auf d b, meſſe a d und zeichne nach einem verjüngten Maßſtabe aus d b, den rechten Winkel a d b und aus d a, das rechtwinkelige Dreieck a d b, und ziehe aus g, f und e die Linien g k, f i und e h parallel mit d a; meſſe dieſe Perpendikel g k, f i und e h, und trage ſie im Walde auf d b in g, f und e, ſo beſtimmen die Punkte a, k, i, h ꝛc. und b, die Lage der verlangten Straße oder Allee durch den Wald.

Kann man nur zwei dieſer Punkte, z. B. a und k oder k und i wechſelſeitig ſehen, ſo läßt ſich die Verlängerung ſehr leicht vornehmen, zumal die Richtung a b durchgeſchlagen werden ſoll.

Anmerkung.

Nach irgend einer dieſer Methoden kann man auch Hauptflügel von Luſtgebäuden an durch Wälder führen, die Durchſichten abholzen oder durchſchlagen. Noch iſt zu merken, daß Fig. 18. Tab. II. * die Buchſtaben aus dem großen Alphabeth gewählt, da ſie hier nur aus dem kleinen genommen ſind.

IV.

Von der Vermeſſung der Gränzen eines Reviers.

§. 20.

Das Aeußerſte eines Waldes oder eines Forſtreviers heißt die Gränze. Dieſe Gränze iſt entweder ſelbſt eine gebrochene Linie, die aus geraden Stücken beſteht, die Theile der Gränze oder Gränzlinien heißen, oder ſie muß bei der Vermeſſung des Reviers in eine ſolche Linie verwandelt werden. Die Gränzzeichen in den Endpunkten der Gränzlinien ſind entweder Maal- oder Gränz-

hügel, Gränzſteine, Gränzbäume, oder es ſind Wege, Flüſſe, Lachen ꝛc. Die Entfernung eines Gränzzeichens von dem andern iſt die gerade Linie, die zwiſchen beiden, als zwiſchen zwei Punkten liegt. Sind Wege, Flüſſe, Lachen ꝛc. Gränzmerkmale, ſo geben dieſe gewöhnlich krumme Gränzlinien. Ein Revier liegt entweder ununterbrochen in einem Bezirke beiſammen, oder es liegt durch Wieſen, Felder, Unterthanengehölze ꝛc. unterbrochen oder zerſtreut. Im erſten Falle wird das Revier durch Meſſung der Gränzlinien und der Winkel, welche dieſe machen, indem ſie ſich ſchneiden, in Grund gelegt, oder aufgenommen und aus den gemeſſenen Stücken, welche die Figur beſtimmen, gezeichnet; im andern Falle aber müſſen die zerſtreut liegenden Holzungen jede für ſich vermeſſen, und alle durch Linien mit einander verbunden werden, welche man nach der Mittagslinie oder überhaupt nach den Himmelsgegenden beſtimmt. Alle zwiſchen unzuſammenhängenden Theilen eines Forſtreviers liegenden Felder, Wieſen und Hölzer, die andern Beſitzern gehören, wie auch die im Reviere vorhandenen Blößen und Wieſen, die dazu gehören, ſo wie Holzwege, Lachen, Seen, Brüche, Teiche, Flüſſe, Straßen, Dörfer ꝛc. werden ſämmtlich der Größe nach mit vermeſſen, und in die Forſtcharte eingetragen. Beiſpiele können dieſe Vermeſſungsarten am zweckmäßigſten begreiflich machen und das Geſchäft verſinnlichen.

§. 21.

Aufgabe.

Die Gränzen eines Forſtreviers zu vermeſſen und aus dem Umfange des Reviers die Reviercharte zu entwerfen, Fig. 9.

Auflöſung.

Wenn das Revier zuſammenhängend in einem Bezirke liegt, ſo kann man auf folgende Art ver-

verfahren. Man meſſe alle Seiten des Reviers vermittelſt einer, nach dem angenommenen Längenmaße eingetheilten Meßkette, und drei Winkel weniger, als das Revier Seiten hat, mit irgend einem Winkelmeſſer. Aus dieſen gemeſſenen Stücken aber bringe man nach §. 124. (des theor. Theils) den Umfang des Reviers zu Papiere und man hat den Grundriß.

Beiſpiel.

Es ſei das Revier Freudenberg nebſt dem dazu gehörigen Horſte Fig. 9. in Grund zu legen und in Riß zu bringen.

Man bringe den Mittelpunkt des Winkelmeſſers über a und bezeichne b und mm mit Abſteckeſtäben, richte die unbeweglichen Dioptern aus a in b, und die beweglichen aus a in mm, und zähle die Anzahl der Grade des zwiſchen ab und amm liegenden Bogens, ſo hat man die Größe des Winkels mmab.

Ferner meſſe man ab mit der Meßkette, und ſchreibe die Maße des Winkels und der Gränzlinie in das Manual oder notire ſie in ein Brouillon.

Nun bringe man den Winkelmeſſer über den Punkt b, richte die unbeweglichen Dioptern in die Linie ba, die beweglichen aber aus b nach c, wo ebenfalls ein Abſteckeſtab ſteht, und zähle die Grade ꝛc. des Winkels abc. Nachdem auch die Gränzlinie bc gemeſſen worden, wird auch hier alles ins Manual oder ins Brouillon notirt.

Ferner bringe man das Inſtrument über c, und richte die unbeweglichen Dioptern in cb, die beweglichen aber aus c nach d, und merke den Winkel bcd; nachdem man auch cd gemeſſen hat, trägt man die Maße des Winkels und der Linie abermals ins Manual.

Umgeht man auf dieſe Art das ganze Revier, ſo hat man, wenn der Winkel hhiikk gemeſſen worden iſt, noch die Linien kkll, llmm, mma zu meſſen, ohne daß man die davon eingeſchloſſenen Winkel zu meſſen nöthig hat. Aus dieſem gemeſſenen Stücke entwirſt man

durch Hülfe des Transporteurs und eines (nach Vorſchrift) verjüngten Maßſtabes das geſammte Revier, welches den Grundriß des in der Natur befindlichen vorſtellt.

Das dazu nöthige Manual, welches dazu dient, alle gemeſſenen Stücke einzutragen, um ſie nicht während der Vermeſſung zu vergeſſen, und daraus die Zeichnung zu entwerfen, kann nach folgender Vorſchrift eingerichtet werden.

Gottesgabe, den 12. April, 1766.

Winkel	einwärts	auswärts	Linien.
a	24°	—	ab = 206′
b	28°	—	bc = 205′
c	—	18°	cd = 192′
d	—	15°	de = 295′
e	—	24°	ef = 199′
f	83°½	—	fg = 245′½
g	33°	—	gh = 382′
h	21°	—	hi = 327′
i	—	17°	ik = 255′
k	53°	—	kl = 142′
l	38°½	—	lm = 171′
m	31°½	—	mn = 166′
n	45°½	—	no = 392′
o	—	50°	op = 154′
p	—	15°	pq = 172′
q	—	21°	qr = 236′
r	—	37°	rs = 111′½
s	—	91²	st = 65′½
t	99°	—	tu = 565′
u	15°½	—	uv = 446′.

Zum

Zum Revier Freudenberg, den 13. April, 1766.

Winkel	einwärts	auswärts	Linien.	
v	— 18°½	—	vw	= 160′
w	— —	135°	wx	= 290′
x	— 42°½	—	xy	= 130′
y	— 25°	—	yz	= 212′
z	— 33°½	—	zaa	= 100′
aa	— 22°	—	aabb	= 136′
bb	— 22°½	—	bbcc	= 230′
cc	— 18°	—	ccdd	= 224′
dd	— 19°	—	ddee	= 130′
ee	— —	93°	eeff	= 134′½
ff	— 29°	—	ffgg	= 226′
gg	— 45°½	—	gghh	= 275′½
hh	— 21°	—	hhii	= 366′
ii	— 13°	—	iikk	= 171′
kk	— —	48°	kkll	= 323′
ll	— —	82°	llmm	= 112′
mm	— 21°	—	mma	= 463′

Anmerkung.

Bei der Tabelle iſt zu merken, daß die Benennungen bei den Winkeln einwärts und auswärts ſich auf die Lage der Winkel beziehen, ob ſie außerhalb oder innerhalb der Figur liegen. Diejenigen Winkel, welche unter der Rubrik auswärts ſtehen, liegen wirklich außerhalb der Figur und der zur Figur gehörige iſt vier rechte Winkel weniger dem auswärts liegenden. Unter den Winkeln einwärts muß man die Größe der Abweichung des einen Schenkels vom andern, und zwar einwärts der Figur verſtehen, welche man findet, wenn man z. B. a β nach a γ verlängert, den Transporteur in a auf die Linie $\beta\gamma$ legt, und zuſieht, um wie viel ab davon abweicht. Der Winkel γab iſt = 24°.

§. 22.

§. 22.

Beſchreibung einer Bouſſole, die als Winkelmeſſer unabhängig vom Aſtrolabio gebraucht werden kann, Fig. 19 und 20. Tab. II*.

Die Bouſſole iſt ein Werkzeüg, womit auf dem Felde, vorzüglich aber in oder an Waldungen, Winkel durch Hülfe der Magnetnadel gemeſſen, und ihre Größe in Graden beſtimmt werden.

Ihre Einrichtung iſt folgende: In einer flachen Büchſe, a b (Fig. 19.) welche mit einem Glasdeckel bedeckt werden kann, (wie bey der mit dem Aſtrolabio verbundenen Bouſſole,) befindet ſich eine auf beiden Seiten zugeſpitzte Magnetnadel, welche ſich auf einem im Mittelpunkte der Büchſe ſenkrecht ſtehenden Stifte vermittelſt eines Hütchens um ſich ſelbſt bewegen und drehen kann. Damit die Nadel nicht unnütz beim Wegtragen auf der Spitze des Stifts ſpiele und die innere kegelförmige Vertiefung des Hütchens ausdrehe, wird ſie beim Nichtgebrauche, durch einen Hebel e, der an dem Rande aufliegt, und und unter das Hütchen greift, von dem Stifte aufgehoben und an die innere Fläche des Glasdeckels gedrücket, beim Gebrauche aber nieder gelaſſen. Die Bewegung des Hebels geſchieht durch eine Feder, die mancherlei Einrichtungen erhalten kann.

In der Büchſe iſt an der Seitenwand ein ſchmaler Ring befeſtiget, an deſſen innerer Peripherie die Nadel frei herumſpielt.

Die Länge der Magnetnadel beträgt wenigſtens 5 bis 6 Zoll. Auf der Fläche des Ringes ſind die Grade von 0 bis 360, oder, um Irrungen vorzubeugen, auf beiden Seiten von 0 bis 180 gezählt. Die Büchſe, ſammt der Magnetnadel und der Kreistheilung, ſteht auf einer viereckigen Meſſingplatte, die von 0 und 180 aus ein paar breite

An-

Anſätze f und g hat, worauf die Dioptern ſenkrecht ſtehen. Die Entfernung der Dioptern von einander muß wenigſtens 1 Fuß, ſo wie die Höhe derſelben 6 Zoll betragen; durch Hülfe der angebrachten Gewinde können ſie niedergelegt werden. Unter den Dioptern heißt die, welche o Grad an nächſten ſteht, und mit f (Fig. 20.) bezeichnet iſt, die Objektivdiopter, weil ſie beim Gebrauche allemal auf die Gegenſtände gerichtet wird. Sie iſt oben und unten mit Fäden verſehen, welche in rechteckigen Oefnungen ſtehen, und zwiſchen beiden ſtehen in der Mitte etliche Viſirlöcher. An der andern Diopter g, welche die Okulardiopter heißt, weil hinter ihr beim Gebrauche das Auge ſteht, ſieht man die Viſirlöcher oben und unten, und in der Mitte einen Faden. Die Viſirlöcher in der Objektivdiopter, ſo wie der Faden in der Okulardiopter, dienen bloß dazu, die Richtigkeit der Bouſſole zu unterſuchen, oder das Inſtrument zu prüfen.

Dieſe Einrichtung der Dioptern iſt um deswillen vorzüglich, weil man dadurch bequem auf unebenen Boden nach hoch und tiefliegenden Gegenſtänden viſiren kann, indem die Platte, worauf die Büchſe ſteht, horizontal bleibt. Der Punkt, um welchen ſich das ganze Werkzeug drehet, oder die Axe des Zapſens am Stative, befindet ſich mit den Viſirlöchern und Fäden der Dioptern, oder mit der Viſirlinie in einer auf der Fläche des getheilten Ringes ſenkrechten Ebene, und in dieſer Ebene iſt auch die Spitze, worauf die Magnetnadel ruht. Hierdurch erhält man die mit der Bouſſole gemeſſenen Winkel richtig, und auch zugleich einen ſtäten Gang der Bouſſole bei der Umdrehung, weil das Gewicht aller Theile um den Zapfen des Stativs gleichförmig vertheilt iſt.

Das Umdrehen der Bouſſole iſt bei der gegenwärtigen Einrichtung folgender Geſtalt möglich. Die Hülſe, welche auf den Zapfen der Vorrichtung des Stativs geſteckt wird, und gewöhnlich oben mit einer Platte verſehen iſt, welche

man

man an die untre Fläche der Bouſſole ſchraubt, wird hier ſo eingerichtet, daß ſich die Scheibe mit dem darauf befeſtigten Inſtrumente auf der Hülſe drehet, und eine Bewegung erhält, wie das bewegliche Lineal mit der darauf befindlichen Bouſſole des Aſtrolabiums. Wird nun die Hülſe auf den Zapfen der Vorrichtung des Stativs geſteckt und durch die Schraube h feſtgehalten, ſo kann man die Bouſſole ſanft und ſtät drehen und auf die Gegenſtände vollkommen genau richten.

Die Nuß (wie beim Aſtrolabio Fig. 13.) iſt nicht die bequemſte Vorrichtung, ein Inſtrument genau horizontal zu ſtellen. Alle Unbequemlichkeiten der Nuß fallen weg, wenn man ein Stativ mit der Vorrichtung braucht, wie die Figur 20. enthält. Die Füße des Stativs ſind vermittelſt meſſingener Gewinde a und a mit der Platte bb verbunden, die in der Mitte eine Oefnung c hat, etwa 1″ im Durchmeſſer, durch welche eine doppelte Schnur geht, die an der untern Seite der Platte bb durch ein Oehr geht, und woran 2 gleich ſchwere Gewichte hängen, die verſchoben werden können, um die Schnur zu verlängern und zu verkürzen, und wodurch man den auf der Erde gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte des Inſtruments in einerlei Vertikallinie bringen kann. Auf der Platte bb ſtehen drei ſtarke Schrauben d, d, d, und jede derſelben iſt mit 2 Schraubenmuttern e und i verſehen. Eine andere, eben ſo geſtaltete Platte f f hat drei Löcher, um ſie durch die Schrauben d, d, d mit der Platte bb zu verbinden, und durch die Muttern e und i feſt anzupreſſen. Die obere Platte f f enthält in der Mitte den Zapfen, worauf die Hülſe paßt und durch die Schraube h darauf feſt gehalten wird.

Die Horizontalſtellung geſchieht vermittelſt einer kleinen Setzwaage oder einer mit Weingeiſt gefüllten Glasröhre auf den 3 Seiten der Platte f f, indem man die Schraubenmuttern e, e, e da lüftet und anzieht, wo es nöthig iſt.

Wer-

Werden, nachdem die Platte f f und mit ihr die Bouſſole horizontal iſt, die Muttern i, i, i, angezogen, ſo ſteht das Inſtrument feſt und ſicher in der horizontalen Richtung, man mag nun die Bouſſole drehen, wohin man will. Uebrigens iſt noch zu bemerken, daß in Figur 20. das Stativ mit der Vorrichtung in der Hälfte linker Hand im Durchſchnitte, in der Hälfte rechter Hand aber im Aufriſſe erſcheint.

Anmerkung.

Eine umſtändlichere Beſchreibung der Bouſſole konnte hier der Kürze wegen nicht gegeben werden.

Bouſſolen mit Vorrichtungen dieſer Art verfertigt der Univerſitätsmechanikus Herr Weickerdt in Leipzig. Vollſtändig beſchrieben und nach einzelnen Theilen abgebildet, nebſt der Beſchreibung der Proben und des Gebrauchs des Inſtruments zum Winkelmeſſen, findet man in M. Johann Gottl. Riedels Gründlichem Unterrichte von dem Gebrauche der Bouſſole in der praktiſchen Geometrie. Leipzig 1795. Eine andere Bouſſole findet man in F. Meinerts Anfangsgr. d. Feldmeßkunſt ꝛc. abgebildet und beſchrieben, ſo wie auch die Anweiſung zum Gebrauche, §. 49 - 53; und §. 90.

Will man das Stativ mit ſeiner vortheilhaften Vorrichtung nicht, ſo kann man die Bouſſole auch auf die Vorrichtung und das Stativ des Aſtrolabiums Fig. 13. ſetzen, und als Winkelmeſſer gebrauchen.

Allgemein iſt die Bouſſole zum Vermeſſen eines Waldes oder eines Forſtreviers nicht das ſicherſte, weil die Magnetnadel zu vielen Veränderungen unterworfen iſt, die Fehler in der Beſtimmung der Winkel verurſachen, welche nur durch mühſame Proben verbeſſert werden können. Daher thut man wohl, Winkel, welche Gränzlinien mit einander machen, durch das Aſtrolabium entweder allein, oder in Verbindung mit der Bouſſole zu meſſen, und die Zahl der Grade eines Winkels nach jedem dieſer Inſtrumente beſonders anzugeben.

§. 23.

§. 23.

Aufgabe.

Die Gränzen eines Reviers durch Hülfe der Bouſſole zu beſtimmen, Fig. 9.

Auflöſung.

Man bringe die Bouſſole über a, und richte die Nordlinie auf a b ſo ein, daß N gegen b, und S gegen a trift und merke die Abweichung der Magnetnadel gegen O oder gegen W; meſſe hierauf die Linie a b, und notire beides ins Manual.

Von a bringe man die Bouſſole über b, richte die Nordlinie auf b c und bemerke abermals die Abweichung der Magnetnadel, meſſe die Länge, und trage beides in das Manual ein.

Da man auf dieſe Art nicht die Winkel ſelbſt erhält, unter welchen ſich die Gränzlinien ſchneiden, ſondern nur die Abweichungen der Magnetnadel auf jeder Seite der Figur von der Nordlinie, ſo braucht man ſich nur ein Manual zu entwerfen, worin die Abweichung der Magnetnadel im Winkel a, b, c gegen O oder gegen W in einer, und in der andern Rubrike das Maß der Linien a b, b c, cd u. ſ. w. vorkommt.

Um alle Verwirrung zu vermeiden, befolge man folgende Methode ſtatt der Führung eines Manuals oder Brouillons: Man ziehe nämlich eine gerade Linie (Fig. 22. Tab. II* wenn man Fig. 21. meſſen wollte,) und theile dieſelbe in ſo viele Theile, a b, b c, c d, d e, e f, f a, als die zu meſſende Figur Seiten hat; zwiſchen a und b ſchreibe man die Abweichung der Linie a b, und rechts von a b das Maß der Linie a b. Eben ſo verfahre man mit den Abweichungen und Maßen der andern Linien, bis alle Abweichungen und Maße bemerkt ſind.

Umge-

Umgehet man auf dieſe Art das ganze Revier und ſchreibt alles auf, ſo kann man auf dem Papiere, durch Hülfe der Bouſſole, die man von dem übrigen Apparate abſchraubt, die ganze Figur des Reviers auf eben die Art, wie man ſie gemeſſen hat, zeichnen.

§. 24.

Soll man mit dem Transporteur eine, mit der Bouſſole gemeſſene Figur auf das Papier tragen, ſo kann man auf dieſe Art verfahren: Man zieht zuvor auf das Papier Linien Fig. 21. ns, ns u. ſ. w. etwa 1 bis 2 Zoll parallel auseinander, welche die Lage der Nordlinie beſtimmen. Nimmt man nun einen Punkt N dieſer Linien für Norden, und etwa a derſelben für die Spitze des aufzutragenden Winkels an; ſo beſtimme man nun die Lage ab (§. 49. theor. Theil) und gebe ihr das für ſie im Brouillon bemerkte Maß, indem man von N nach W zählt, wenn man beim Meſſen von O nach N gezählt hat.

Ferner ziehe man durch den Punkt b mit den Nordlinien eine Parallele, beſtimme in b die Lage der Linie bc, trage aus b in c das für ſie im Brouillon befindliche Maß, und fahre ſo fort, bis die Figur ſchließt.

Hieraus wird auch begreiflich, wie man auf eine Charte die Nordlinie auftragen kann, wenn man das Revier mit einem Aſtrolabio, womit eine Bouſſole verbunden iſt, aufgenommen hat; man darf nämlich nur die Nordlinie in die erſte Seite einviſiren und die Abweichung der Magnetnadel von derſelben merken, und dieſe Abweichung auf das Papier bringen. Mit dieſer Nordlinie kann man nachher durch jeden gegebenen Punkt eine Parallellinie ziehen, und folglich die Nordlinie auf der Charte an die Stelle bringen, die für ſie beſtimmt wird.

§. 25.

Auf dieſe Art können ſowohl mit dem Aſtrolabium, als auch mit der Bouſſole und der Meßkette, alle Straßen, Wege, Lachen, Felder ꝛc., die durch ein Revier gehen, aufgenommen, und in die Reviercharten gezeichnet werden. Iſt der Umfang der genannten Gegenſtände krummlinig, ſo kann man die krummlinigen Stücke als Bogen betrachten, die dazu gehörigen Sehnen und Höhen meſſen, und ſie nach §. 63. und 134. (des theoret. Theils) in Grund legen.

Sollte die Krümmung eines Weges oder Fluſſes zu irregulär ſeyn, ſo kann man ſie durch Hülfe einer geraden Linie aufnehmen und zu Papiere bringen. Man zieht nämlich an der krummen Linie eine gerade Linie ſo hin, daß ſie ſich nicht zu weit entferne, und errichtet in großen Krümmungen Perpendikularen auf der geraden Linie, welche die Entfernungen derſelben beſtimmen. Notirt man die Stücke der geraden Linie und die darauf ſtehenden Perpendikel, und überdies, ob die Krümmungen auswärts oder einwärts der geraden Linie liegen, ſo kann man den Zug der krummen Linie darnach zeichnen. Auch kann man auf dieſe Weiſe Linien mit ſehr großen Krümmungen durch gerade Linien ſchneiden, und die Krümmungen über und unter der geraden Linie durch Perpendikularen angeben. Aus den gemeſſenen Stücken läßt ſich alsdenn auch die Zeichnung entwerfen.

Durch dieſe Methode wird man auch in Stand geſetzt, krummlinige Figuren aufzunehmen und aus den gemeſſenen Stücken zu zeichnen. Man darf nämlich nur die krummlinige Figur mit einem Vierecke umgeben, auf den Seiten des Vierecks, wo beträchtliche Krümmungen im Umfange der krummlinigen Figur vorkommen, ſenkrechte Linien errichten, und die Entfernungen der Krümmungen meſſen; entwirft man alsdenn dies Viereck mit den gemeſſe-

meſſenen Perpendikularen auf das Papier, ſo kann der Zug der Peripherie der krummlinigen Figur darnach vorgenommen werden. Auch kann man, wenn es angeht, im Innern einer ſolchen krummlinigen Figur, eine geradlinige ausſtecken, und durch dieſe jene aufnehmen und zeichnen.

§. 26.

Da die Vermeſſung der Gränzen eines Forſts oder eines Reviers für den Feldmeſſer ſowohl als den Förſter wichtig iſt, ſo werden darüber beſondere Gränzvermeſſungsregiſter geführt und beſonders entworfen. Dieſe beſondern Regiſter und die dazu gehörigen Riſſe dienen vorzüglich dazu, wenn etwa Gränzmerkmaale, die in Krümmungen der Gränze ſtehen, verloren gehen, um ihren Stand und ihre Lage durch Hülfe der beiden benachbarten wieder zu finden; denn würden zwei nächſte Grenzmerkmaale dann mit einer geraden Linie vereinigt, und es wäre zwiſchen beiden, entweder in einer Krümmung oder im Winkel einer gebrochenen Linie ein Merkmaal oder Gränzzeichen verloren gegangen, ſo würde in beiden Fällen durch dieſe Vereinigung auf der einen Seite verloren, und auf der andern gewonnen werden, beides aber hindert das Gränzvermeſſungsregiſter und der dazu gehörige Riß, den man auch beſonders ganz, oder theilweiſe nach einem größern Maßſtabe entwerfen kann, als wornach die Reviercharte entworfen wird.

Gränzvermeſſungsregiſter:

Nummer des Gränzzeichens.	Nahmen des Nachbars	Länge der Gränzlinie.	Winkel nach Graden			
			einwärts		auswärts	
			Grade	Min.	Grade	Minut.

Einwärts und auswärts drückt auch hier bei den Winkeln nur die Lage aus, und hat keine Beziehung

auf Größe. Einwärts liegt nach dieſem Begriffe im Winkel, wenn er innerhalb des Reviers; auswärts aber, wenn er auſſerhalb deſſelben liegt.

Anmerkung.

Das Preußiſche Forſtvermeſſungsreglement von 1787 enthält eine noch umſtändlichere Tabelle zum Gränzvermeſſungsregiſter, worin die Winkel nach Graden, welche die Gränzlinien mit einander machen, ſo wie die Abweichung derſelben von der Nordlinie durch Hülfe der Bouſſole angegeben werden.

Was auſſer den mathematiſchen Kenntniſſen bei der Vermeſſung der Forſtgränzen erfordert wird, und auf was man vorzüglich Acht zu geben nöthig hat, findet man in v. Burgsdorfs Forſthandbuche; Abhandl. 2. Kap. 3. S. 605 ff.

Zur Berechnung der Winkel, welche die Gränzlinien mit einander machen, wenn man mit der Bouſſole mißt, kann man nach §. 50. des theoret. Theils der Geom. das Maß des Winkels in Graden beſtimmen, wenn man die Abweichung des einen Schenkels von der Nordlinie, wenn ſie kleiner als 180° iſt, um 180° vermehrt, und die Summe von der Abweichung des andern Schenkels ſubtrahirt. Soll man z. B. Fig. 21. Tab. II* das Maß des Winkels CDE angeben, ſo ſuche man die Abweichung von C nach D, und ſie ſei 120°, die von D nach E aber 242°. Da nun $180° + 120° = 300°$; $300° - 242° = 58°$ iſt, ſo iſt $\angle CDE = 58°$. Sollte man den äußern Winkel DEF nach ſeinem Maße beſtimmen, und die Abweichung der Linie DE wäre größer als 180°, ſo ziehe man von derſelben 180° ab, und ſubtrahire den Reſt von der Abweichung der Linie EF, oder umgekehrt: die Abweichung vom Reſte, wenn die Abweichung kleiner ausfallen ſollte, als der Reſt.

Wäre die Abweichung der Linie $DE = 242°$, von E nach F aber 180°; ſo iſt $242 - 180 = 62°$ die Abweichung von E nach D. Folglich $180 - 62 = 118$ der

Win-

Winkel DEF auswärts der Figur. Verlangt man DEF einwärts der Figur, ſo hat man 360 — 118 = 242°.

V.

Von den Blößen, Wieſen ꝛc. eines Reviers.

§. 27.

Blößen, Wieſen, Seen, Teiche, Horſte, Felder ꝛc. in Forſtrevieren, ſie mögen nun dieſe oder jene Beſtimmung haben, kann man entweder in ihrem Umfange umgehen, oder aus einer angenommenen Standlinie überſehen. Ihre Gränzen ſind insgeſammt, wie die Gränzen der Reviere, gerade oder krummlinig, oder ſie ſind aus beiden zuſammengeſetzt, alſo gemiſchtlinig. Alle dieſe in Forſtrevieren befindlichen Gegenſtände müſſen, woſern man eine genaue Kenntniß vom Reviere haben will, vermeſſen, gezeichnet und berechnet werden.

Zu den Flächen dieſer Art in Forſtrevieren rechnet man auch alle Feldbüſche oder Gehölze, die zum Reviere gehören, und durch Wieſen und Felder davon getrennt ſind. Können dieſe Gegenſtände nur in der Peripherie umgangen werden, ſo vermißt man ſie wie die Reviere nach §. 21. bringt ſie auf eine ähnliche Art zu Papiere, und verbindet ſie vermittelſt einer geraden Linie mit dem Reviere, wie dies in Fig. 9. mit dem großen Horſte durch dm an das Freudenberger Revier geſchehen iſt. Die Linie dm aber erhält ihre Lage durch die Magnetnadel auf der Bouſſole, welche daher auch auf das Papier gebracht werden muß.

Bei der Aufnahme der Blößen, Wieſen ꝛc. die aus einer gewählten Standlinie überſehen werden können, bedient man ſich des Vortheils §. 11.

§. 28.

Aufgabe.

Jede Blöße, Wieſe, jeden Horſt, jedes Feld ꝛc. aus einer Standlinie in Grund zu legen.

Auflöſung.

Es ſei z. B. a b c d e Fig. 10. die im vorigen Reviere Fig. 9. befindliche Blöße. Zum Aufnehmen derſelben wähle man ſich zwei Punkte a und b, verbinde ſolche mit einer Linie ab, welches die Standlinie iſt. In a mißt man die Winkel c a b, d a c, d a e mit einem Winkelmeſſer, und die Standlinie a b mit der Meßkette. Eben ſo mißt man aus b die Winkel d b c, e b d, e b a und trägt alle gemeſſenen Stücke in ein Manual, oder in ein dazu entworfenes Brouillon.

Auf das Papier zeichnet man die Figur a b c d e nach den im Manuale notirten Stücken, indem man das Maß von a b durch einen verjüngten Maßſtab auf eine gerade Linie trägt, und an a die Winkel c a b, d a c, d a e, ſo wie an b die Winkel d b c, e b d, e b a vermittelſt eines Transporteurs zeichnet. Verbindet man die Durchſchnittspunkte a e d c b mit geraden Linien, ſo iſt die Figur der verlangten Blöße gemäß. Mit der Bouſſole wird die Blöße a b c d e Fig. 10. auf folgende Art vermeſſen.

Man bezeichne die Winkelſpitzen mit Abſteckeſtäben und bringe die Bouſſole über a, viſire nach b, und merke die Abweichung der Magnetnadel von der Nordlinie nach O oder W. Ferner viſire man nach den übrigen mit Stäben markirten Punkten c, d und e und notire abermals die Grade der Abweichung der Magnetnadel von der Nordlinie. Nun bringe man die Bouſſole über b und viſire abermals nach allen Winkelſpitzen der Blöße a, c, d und e, ſchreibe alle gefundenen Größen ins Manual, und meſſe überdies die Standlinie a b mit der Meßkette.

Will man die Figur aus den gemeſſenen Stücken mit der Bouſſole auftragen, ſo nehme man ſie vom Stative und verfahre damit auf folgende Art: Man drehe ſie nämlich ſo lange, bis die Magnetnadel die Anzahl der Grade zeigt, die im Manuale aufgeſchrieben ſind, als die Nordlinie über a b lag; in dieſer Richtung ziehe man a b und trage auf ſie das gefundene Maß. Zeichnet man nun auf dieſe Weiſe aus a die Linien a c, a d, a e, und aus b die Linien b c, b d, b e, ſo erhält man durch Verbindung der Punkte b, c, d, e und a, in welchen die gedachten Linien ſich ſchneiden, den Grundriß der Blöße a b c d e.

Iſt eine vorhandene Blöße, Wieſe, ein Horſt oder Feld ꝛc. ſo beſchaffen, daß man innerhalb der Fläche eine Standlinie nehmen, und von dieſer nach allen Winkelſpitzen hinkommen kann, ſo kann man folgendes Verfahren anwenden:

Es ſei Fig. 11, c d e f g eine Blöße, und a b die in ihr genommene Standlinie. Man meſſe in a die Winkel c a g, g a f, f a e, e a d, d a c vermittelſt eines Winkelmeſſers, und die gerade Linie a b mit der Meßkette, ſo wie aus b die Winkel, c b d, d b a, e b f, f b g, g b c und notire alles ins Manual.

Braucht man die Bouſſole, ſo muß man in a die Grade der Abweichung der Linien a c, a d, a e, a f, a g, und aus b, die Grade der Abweichung der Linien b c, b d, b e, b f, b g, von der Nordlinie, ſo wie das Maß der Standlinie a b ſuchen und notiren.

Bei dem Auftragen befolgt man die Regeln, wie im vorigen Falle, und man erhält den Grundriß der Figur c d e f g ebenfalls auf dem Papier.

Anmerkung.

Jeder Zeichnung oder Charte, von einem ganzen Revier ſowohl, als von einzelnen Theilen, z. B. Blößen, Feldern ꝛc. fügt man den Maßſtab bei, nach welchem

man die gemeſſenen, oder ſonſt beſtimmten Linien aufgetragen hat. Auch wird bei der vollkommenen Ausarbeitung einer Charte jede Holzart nach der ihr beſtimmten Form und Farbe angezeigt, und überhaupt die ganze Zeichnung ſo behandelt, daß ſie ein vollkommenes Bild des aufgenommenen Reviers darſtellt.

VI.

Prüfung, ob eine Figur oder ein Revier richtig aufgetragen worden.

§. 29.

Das ſicherſte Merkmaal, ob eine Figur richtig vermeſſen, und aus den gemeſſenen Stücken genau gezeichnet worden, iſt dieſes, wenn die Figur beim Auftragen völlig genau zum Schluß kommt. In dieſem Falle hat man während der Meſſung keine Fehler gemacht, oder die in einer oder in mehrern Stationen gemachten Fehler haben ſich gegen einander völlig aufgehoben. Da aber das Letztere ſich ſelten zutragen wird, ſo kann man behaupten, daß die auf das Papier gezeichnete Figur der gemeſſenen ähnlich, folglich ein genauer Grundriß des vermeſſenen Reviers iſt.

Finden ſich beim Schluſſe einer Figur beträchtliche Fehler, ſo iſt es ſchwer, die Standpunkte auszumitteln, in welchen die Fehler gemacht worden ſind, und eben ſo ſchwer die gemachten Fehler zu verbeſſern. Gewöhnlich ſind, wenn man Fehler entdeckt, die Winkel unrichtig gemeſſen, weil es überhaupt ſchwerer iſt, einen Winkel völlig genau zu meſſen, als eine gerade Linie. Dieſer Fehler wegen iſt zur Aufnahme eines Reviers die Bouſſole mehr als das Aſtrolabium oder der Meßtiſch zu empfehlen, weil die Bouſſole keinen gemachten Fehler fortpflanzt, wie dies der Fall bei andern Winkelmeſſern iſt. Kürze halber und wegen zu vieler Theorie, die bei einer vollſtändigen Unterſuchung dieſer Materie vorausgeſetzt werden müßte, folgen hier

hier nur einige Regeln, durch deren Befolgung man nicht leicht in den Fall kommt, Fehler zu machen, welche der Richtigkeit nachtheilig ſind, oder durch welche man auf eine leichte Art gemachte Fehler verbeſſern kann.

Dieſe Regeln ſind folgende:

1) Man nehme entweder ein Revier mit der Bouſſole allein auf, und zeichne auch durch Hülfe dieſes Inſtruments die Figur auf das Papier, ſo wird ein etwa gemachter Fehler durch den doppelten Gebrauch der Bouſſole entdeckt, oder er pflanzt ſich wenigſtens nicht fort; oder wenn man ein Revier mit dem Aſtrolabio aufnimmt, ſo verbinde man mit dieſem eine Bouſſole, wie Fig. 12. mit einem Theilringe, und vergleiche die Winkel beider Inſtrumente, ſo wird man einen gemachten Fehler bei Zeiten entdecken und auf der Stelle zu verbeſſern im Stande ſeyn.

2) Während dem Meſſen wähle man ſich verſchiedene Richtungspunkte, welche auſſerhalb des Reviers liegen und lege dieſe aus verſchiedenen Standpunkten feſt. Trägt man alsdenn eine Figur auf, und zieht die Linien nach den Richtungspunkten gemäß den gefundenen Winkeln, ſo müſſen die verſchiedenen Linien auch auf dem Papiere ſich in den Richtungspunkten ſchneiden. Findet man das Gegentheil, ſo kann man den etwa gefundenen Fehler leichter entdecken, und entweder ganz oder doch ſo verbeſſern, daß ſein Einfluß nicht merklich wird.

3) Kann man während der Meſſung in Durchſichten Diagonalen durch das Revier oder wenigſtens durch Theile deſſelben ziehen, ſo merke man auf dieſen ſolche Punkte, die feſt bleiben, damit man darnach, bei entſtandenen Fehlern, die Figur verbeſſern kann. Treffen einerlei Gegenſtände auf den Diagonalen der Zeichnung und des Reviers zuſammen, ſo hat man aller Wahr-

ſcheinlichkeit nach, nicht gefehlt; im Gegentheile muß man Fehler ſo viel möglich zu vermindern ſuchen.

Alle Fehler, welche am Schluſſe der Figur durch den Winkel entdeckt werden, um welchen der letzte der Figur zu groß oder zu klein wird, und der Abweichungswinkel, oder der Winkel des Fehlers heißen kann, ſind entweder während der Meſſung auf dem Felde, oder während des Auftragens der Figur auf das Papier gemacht worden. Hat man ſich erſt davon überzeugt, ob Winkel auf das Papier unrichtig aufgetragen worden, welches durch die Betrachtung der Nebenwinkel geſchieht, oder ob man einen oder den andern auf dem Felde unrichtig gemeſſen hat, ſo kann man durch Hülfe feſtgelegter Richtungslinien aus verſchiedenen Standpunkten oder durch gezogene Diagonalen den Winkel ſelbſt finden, der fehlerhaft iſt, und durch Vergleichung mit den angränzenden korrigiren.

Da dieſes Geſchäft aber wohl nicht den Kenntniſſen jedes Förſters angemeſſen ſeyn dürfte, ſo hilft man ſich gewöhnlich durch die Anwendung der folgenden Aufgabe.

§. 30.

Aufgabe.

Auf dem Felde unrichtig gemeſſene Winkel bei dem Entwurfe der Zeichnung zu korrigiren, und die daher entſtandenen Fehler ſo unbedeutend als möglich zu machen.

Auflöſung.

Man lege den Satz §. 116 und 123. (des theor. Theils d. Geom.) zum Grunde, und addire alle Winkel der Figur die um den Umfang herum liegen und zu der Figur gehören; beträgt die Summe ſo viel, als ſie im Umfange der gegebenen Figur, dieſe mag nun regulär oder irregulär ſeyn, nach §. 116 und 123. betragen ſoll, ſo hat man richtig aufgenommen und gezeichnet. Differenzen, die in

in der Zeichnung liegen, können leicht entdeckt und verbeſſert werden.

So iſt z. B. die auf dem Freudenberger Revier aufgenommene Blöße (Fig. 9.) ein Fünfeck abcde. Nun enthält ein Fünfeck ſo viel Dreiecke, als die Figur Seiten hat, weniger zwei, alſo hier $5 - 2 = 3$. Da nun jedes Dreieck 180° faſſet, ſo beträgt die Summe aller Winkel des gegebenen Fünfecks $3 \cdot 180° = 540°$ in der Peripherie (§. 116.)

Nun ſind die Winkel der Blöße (Fig. 9.):

Der Winkel	a =	142°
—	b =	80°
—	c =	113°
—	d =	91°
—	e =	114°
alſo zuſammen genommen		540 Grade.

Demnach wäre die Blöße richtig vermeſſen und die Figur aus den gemeſſenen Stücken richtig gezeichnet.

Fände man nun das Gegentheil, ſo daß man kleine Fehler durch zu kleine Inſtrumente, oder durch Schwäche des Geſichts u. dergl. Unvollkommenheiten gemacht hätte, und der Winkel des Fehlers betrüge nur etwa einige Minuten, oder eine andere Größe, die gegen die Größe eines Winkels der Figur ſehr klein ausfiele, ſo kann man entweder dieſen Winkel zu den kleinſten addiren, oder von den größten ſubtrahiren.

Richtiger aber iſt die Korrektion der fehlerhaft gefundenen Figuren, daß man ſie an Ort und Stelle oder da vornimmt, wo wirklich gefehlt worden iſt, und nicht etwa durch ein gewaltſames Zuſammenzerren und Zuſammenrücken die Figur zum Schluß bringt. Iſt der Fehler unbeträchtlich ausgefallen, ſo vertheile man den am Schluſſe

der

der Figur erhaltenen Abweichungswinkel, oder den Winkel des Fehlers, unter die übrigen Winkel der Figur ſo, daß man ihn förmlich nach einem Anſatze der Regel Detri berechne. Ganz unbedeutende Fehler können in der Ausübung auſſer Acht gelaſſen werden.

Anmerkung.

Da Korrektionen gemachter Fehler mühſam und überdem auf Theorien gebaut ſind, die in den gegenwärtigen Anfangsgründen nicht in der gewohnten mathematiſchen Schärfe auseinander geſetzt werden können; ſo muß ſich der Praktiker vorzüglich bemühen, Meßkette und Winkelmeßinſtrumente mit aller Vorſicht nach den gegebenen Anweiſungen zu gebrauchen, und die Zeichnung ſo richtig als möglich auf das Papier zu bringen ſuchen, um Fehler überhaupt zu vermeiden, weil ein verbeſſerter Fehler doch immer einen kleinen Fehler zurückläßt, und man eine Zeichnung von einem gemeſſenen Reviere, durch Korrektionen nie ſo vollkommen erhält, als ſie zu erhalten möglich iſt, wenn Fehler auf dem Felde ſowohl, als auf dem Papiere gänzlich wegfallen.

VII.

Von der Beſtimmung der Lage eines Reviers nach den Himmelsgegenden, oder von der Mittagslinie.

§. 31.

Aufgabe.

Die wahre Mittagslinie einer Gegend zu finden.

Auflöſung.

Man bereite ſich in der Gegend, für welche man die Mittagslinie beſtimmen will, eine horizontale Fläche, etwa die Ebene des Meßtiſches, zeichne aus einem angenommenen Mittelpunkte einen Kreisbogen, und ſetze in dieſen Mittelpunkt einen ſenkrechten feinen Stift. Nun kehre man das Geſicht nach der Gegend der Sonne,

ohn-

ohngefähr nach Mittag, ſo daß links Morgen und rechts Abend liegt. In dieſer Stellung beobachte man den Ort, wo Vormittags, etwa um 10 Uhr, der Schatten des Stifts den Bogen trift und markire denſelben; desgleichen gebe man Nachmittags, etwa um 2 Uhr Acht, wo der Schatten des Stifts in den Bogen fällt, und markire auch dieſen Punkt. Beide Punkte werden ſo liegen, daß der Vormittags beobachtete rechts der Richtung nach der Mittagsgegend, der Nachmittags beobachtete aber links dieſer Richtung trift. Beide beobachteten Punkte verbinde man mit einer geraden Linie und halbire ſie ſenkrecht, ſo geht die gerade Linie vom Standpunkte des Stifts, durch den gefundenen Mittelpunkt der Entfernung der markirten Punkte im Bogen, gerade nach Mittag vorwärts, und rückwärts verlängert, nach Mitternacht, oder dieſe Linie iſt die wahre Mittagslinie der Gegend, oder eigentlich des Beobachtungsorts. Zu mehrer Sicherheit beobachte man den Ort, in welchem der Schatten des Stifts den erwähnten Bogen trift, zu verſchiedenen Zeiten an einerlei Tage, z. B. Vormittags um 10 Uhr, ½ 11 Uhr, und um 11 Uhr; auf eine gleiche Art auch des Nachmittags zu ſolchen Zeiten, die nach der Mittagszeit ſo folgen, wie die Zeiten vor der Mittagszeit, alſo um 1 Uhr ½ 2 Uhr, und um 2 Uhr. Verbindet man nun die Oerter, welche den Durchſchnitt des Schattens vom Stifte um 10 und 2 Uhr, ferner um ½ 11 und ½ 2 Uhr, ſo wie um 11 und 1 Uhr geben, mit geraden Linien, die wie oben ſenkrecht halbirt werden; ſo trift eine gerade Linie aus dem Standpunkte des Stiftes, alle Punkte, wenn man ſehr genau operirt hat, oder doch die mehreſten. Im erſten Falle kann man verſichert ſeyn, daß die gefundene Mittagslinie die wahre ſei, im and rn Falle kommt ſie der wahren um ſo näher, je näher die Halbirungspunkte der geraden Linie liegen, oder jemehr wirklich in dieſelbe fallen.

Hat man auf dem Reißbrette eine Seite irgend einer zu meſſenden Figur oder eines Reviers, durchs Viſiren aus

dem

dem Standpunkte gefunden, in welchem man die Mittagslinie ſuchte, ſo darf man beide die Mittagslinie und die Seite der Figur nur zweckmäßig ſo weit verlängern, bis ſie ſich ſchneiden, und es giebt der daher entſtandene Winkel die Abweichung der einen Seite des Reviers von der wahren Mittagslinie an. Würde nur eine Seitenlinie der Figur oder des Reviers angegeben, ſo dürfte man nur die Größe des gedachten Abweichungswinkels an die gleichnamige Linie, aus dem gleichnamigen Punkte auf den Plan oder die Zeichnung des Reviers tragen, und man erhielte auf dieſe Art ebenfalls die Abweichung dieſer Seite von der wahren Mittagslinie. Auch könnte man die wahre Mittagslinie durch dieſes Verfahren auf jeden gegebenen Ort des Plans zeichnen, wenn man die Mittagslinie nur parallel transportirte.

Vergleicht man mit einer richtigen Bouſſole die Nordlinie der Magnetnadel mit der wahren Mittagslinie, und merkt die Größe des Abweichungswinkels, ſo kann man mit Hülfe der Bouſſole auf jeden Plan der Gegend die wahre Mittagslinie zeichnen, nur muß ſich die Gegend nicht zu weit erſtrecken, weil man ſonſt Fehler macht, indem die Abweichung der Magnetnadel nicht an allen Orten dieſelbige iſt.

Anmerkung.

Genauer und mit mehr Sicherheit findet man die Mittagslinie auf einer horizontalen Ebene vermittelſt des Sonnenſchattens und eines ſehr einfachen Inſtruments. Man ſehe Meinerts Anfangsgr. der Feldmeßkunſt. Kap. 3. §. 50.

Bei dem Gebrauche dieſes Inſtruments ſo wohl, als wenn man die Mittagslinie durch Hülfe des Sonnenſchattens und eines ſenkrechten Stifts §. 31. ſucht, iſt zu merken, daß das Verfahren mehr Richtigkeit gewährt, wenn man eine Zeit dazu um den längſten Tag herum wählt weil zu einer andern Zeit die Richtigkeit wegen der eig nen Bewegung der Sonne etwas leidet; jedoch

ſind

ſind beide Methoden für den gegenwärtigen Gebrauch, in jedem Tage ausgeübt, hinreichend richtig.

Kennt man die Abweichung der Magnetnadel von der wahren Mittagslinie eines Ortes, d. i. iſt die Abweichung der Nordlinie von der wahren Mittagslinie bekannt, ſo darf man, wenn überdies die Gegend der Abweichung bekannt iſt, nur den Abweichungswinkel an die Nordlinie der Magnetnadel zeichnen, und man hat in der Lage des Schenkels, der auſſer der Nordlinie liegt, die wahre Mittagslinie.

So iſt z. B. für Halle jetzt (1797) der Abweichungswinkel von der wahren Mittagslinie 18° und zwar iſt die Abweichung weſtlich.

§. 32.

Aufgabe.

Die Himmels= oder Weltgegenden auf eine Reviercharte zu zeichnen, um darnach die Lage der Theile eines Reviers zu beſtimmen.

Auflöſung.

Man ſuche die wahre Mittagslinie (§. 31.) nach irgend einer Methode, und zeichne ſie auf die Charte; ſchneidet man dieſe in einem angenommenen Punkte mit einer geraden Linie ſenkrecht, ſo hat man den Raum um den feſten Punkt herum in vier gleiche Theile oder Quadranten eingetheilt. Bezeichnet man die Mittagslinie an dem einen Endpunkte mit N, und an dem andern mit S, ſo hat man die Weltgegenden Nord (Mitternacht) und Süd (Mittag). Nimmt man N ins Geſichte, ſo kann man die Endpunkte derjenigen Linie, welche die Mittagslinie ſenkrecht ſchneidet, rechts mit O, und links mit W bezeichnen, und man hat die Weltgegenden Oſt (Morgen) und Weſt (Abend). Die vier Punkte N, W, S, O heißen die Kardinalpunkte und beſtimmen die vier Hauptgegenden. Beſchreibt man aus dem Durch-

schnitts-

ſchnittspunkte dieſer beiden Linien, NS und WO einen Kreis, ſo ſtellt dieſer den Horizont vor, deſſen Quadranten NW, WS, SO, ON durch fortgeſetzte Halbirungen die verſchiedenen Nebengegenden geben. Die erſte Halbirung giebt die vier erſten Nebengegenden. Der Name einer jeden wird aus den Namen der Hauptgegenden, zwiſchen denen ſie liegt, ſo zuſammengeſetzt, daß die in der Mittagslinie liegende Gegend zu erſt genannt wird. Sonach heißen dieſe Gegenden Nord Weſt, Süd Weſt, Süd Oſt, Nord Oſt. Eine fernere Halbirung dieſer acht Bogen giebt acht zweite Nebengegenden. Jeder Name beſteht aus dem Namen der nebenliegenden Hauptgegend und erſten Nebengegend. Dieſe Namen ſind: Nord Nord Weſt; Weſt Nord Weſt; Weſt Süd Weſt; Süd Süd Weſt; Süd Süd Oſt; Oſt Süd Oſt; Oſt Nord Oſt; Nord Nord Oſt. Endlich giebt eine nochmalige Halbirung der ſechszehn nunmehrigen Bogen noch eben ſo viel dritte Nebengegenden, deren jede entweder an einer Hauptgegend oder an einer erſten Nebengegend anliegt, und von dieſer anliegenden den Namen bekommt, welcher durch die Sylbe gen mit der Hauptgegend verbunden wird, nach welcher die zu benennende Gegend von jener anliegenden abweicht. Die Namen ſind:

Nord gen Weſt; Nord Weſt gen Nord; Nord Weſt gen Weſt; Weſt gen Nord; Weſt gen Süd; Süd Weſt gen Weſt: Süd Weſt gen Süd; Süd gen Weſt; Süd gen Oſt; Süd Oſt gen Süd; Süd Oſt gen Oſt; Oſt gen Süd; Oſt gen Nord; Nord Oſt gen Oſt; Nord Oſt gen Nord; Nord gen Oſt.

Dieſe 32 Weltgegenden ſind in Fig. 10 auf Tab. V. des praktiſchen Theils enthalten und wenn die Richtungslinien gehörig verlängert werden, ſo geben ſie einigermaßen Anlaß, nach denſelben die Schläge oder Gehaue des Holzes zu ordnen und feſte zu ſetzen.

Anmer-

Anmerkung.

Gewöhnlich werden die Forſtcharten ſo gezeichnet, daß Nord oben, und Süd unten kommt, welches bequem, aber nicht abſolut nothwendig iſt. Heut zu Tage zeigt man gewöhnlich die Weltgegenden auf der Charte nur allein durch die Mittagslinie an.

VIII.

Vom Umfange und Durchmeſſer eines Baums.

§. 33.

Der horizontale Durchſchnitt eines Baums iſt ein Kreis, wenn der Baum gerade iſt; ſteht er ſchief ſo iſt dieſer Durchſchnitt eine elliptiſche Fläche. In den mehrſten Fällen wird jeder Baum an ſeinem untern Ende, welches das Stammende heißt, ſo geſchnitten, daß der Durchſchnitt eine Kreisfläche wird; wenigſtens wird dieſer Durchſchnitt in der Regel für einen Kreis angenommen. Den Umfang an der Rinde des Baums um einen ſolchen Durchſchnitt, nennt man den Umfang oder die Peripherie des Baums; der Durchmeſſer des Durchſchnitts wird des Baums Durchmeſſer, und dieſe Durchſchnittsfläche ſelbſt, die Grundfläche des Baums genannt.

Wird mit der Grundfläche des Stammendes am Schopfe des Baums oder in jeder andern Höhe über dem Stammende, eine andere Durchſchnittsfläche gelegt, und der Durchmeſſer gezogen, ſo heißt dieſer, im Gegenſatz des Durchmeſſers am Stammende, den man den untern Durchmeſſer nennt, der obere; legt man auch zwiſchen den gedachten beiden Durchſchnitten einen Durchſchnitt, ſo heißt dieſes Schnitts Durchmeſſer, der mittlere Durchmeſſer. Gewöhnlich aber iſt der mittlere Durchmeſſer die gerade Linie, die man findet, wenn man den

ſchnittspunkte dieſer beiden Linien, NS und WO einen Kreis, ſo ſtellt dieſer den Horizont vor, deſſen Quadranten NW, WS, SO, ON durch fortgeſetzte Halbirungen die verſchiedenen Nebengegenden geben. Die erſte Halbirung giebt die vier erſten Nebengegenden. Der Name einer jeden wird aus den Namen der Hauptgegenden, zwiſchen denen ſie liegt, ſo zuſammengeſetzt, daß die in der Mittagslinie liegende Grgend zu erſt genannt wird. Sonach heißen dieſe Gegenden Nord Weſt, Süd Weſt, Süd Oſt, Nord Oſt. Eine fernere Halbirung dieſer acht Bogen giebt acht zweite Nebengegenden. Jeder Name beſteht aus dem Namen der nebenliegenden Hauptgegend und erſten Nebengegend. Dieſe Namen ſind: Nord Nord Weſt; Weſt Nord Weſt; Weſt Süd Weſt; Süd Süd Weſt; Süd Süd Oſt; Oſt Süd Oſt; Oſt Nord Oſt; Nord Nord Oſt. Endlich giebt eine nochmalige Halbirung der ſechszehn nunmehrigen Bogen noch eben ſo viel dritte Nebengegenden, deren jede entweder an einer Hauptgegend oder an einer erſten Nebengegend anliegt, und von dieſer anliegenden den Namen bekommt, welcher durch die Sylbe gen mit der Hauptgegend verbunden wird, nach welcher die zu benennende Gegend von jener anliegenden abweicht. Die Namen ſind:

Nord gen Weſt; Nord Weſt gen Nord; Nord Weſt gen Weſt; Weſt gen Nord; Weſt gen Süd; Süd Weſt gen Weſt: Süd Weſt gen Süd; Süd gen Weſt; Süd gen Oſt; Süd Oſt gen Süd; Süd Oſt gen Oſt; Oſt gen Süd; Oſt gen Nord; Nord Oſt gen Oſt; Nord Oſt gen Nord; Nord gen Oſt.

Dieſe 32 Weltgegenden ſind in Fig. 10 auf Tab. V. des praktiſchen Theils enthalten und wenn die Richtungslinien gehörig verlängert werden, ſo geben ſie einigermaßen Anlaß, nach denſelben die Schläge oder Gehaue des Holzes zu ordnen und feſte zu ſetzen.

Anmer-

Anmerkung.

Gewöhnlich werden die Forſtcharten ſo gezeichnet, daß Nord oben, und Süd unten kommt, welches bequem, aber nicht abſolut nothwendig iſt. Heut zu Tage zeigt man gewöhnlich die Weltgegenden auf der Charte nur allein durch die Mittagslinie an.

VIII.

Vom Umfange und Durchmeſſer eines Baums.

§. 33.

Der horizontale Durchſchnitt eines Baums iſt ein Kreis, wenn der Baum gerade iſt; ſteht er ſchief ſo iſt dieſer Durchſchnitt eine elliptiſche Fläche. In den mehrſten Fällen wird jeder Baum an ſeinem untern Ende, welches das Stammende heißt, ſo geſchnitten, daß der Durchſchnitt eine Kreisfläche wird; wenigſtens wird dieſer Durchſchnitt in der Regel für einen Kreis angenommen. Den Umfang an der Rinde des Baums um einen ſolchen Durchſchnitt, nennt man den Umfang oder die Peripherie des Baums; der Durchmeſſer des Durchſchnitts wird des Baums Durchmeſſer, und dieſe Durchſchnittsfläche ſelbſt, die Grundfläche des Baums genannt.

Wird mit der Grundfläche des Stammendes am Schopfe des Baums oder in jeder andern Höhe über dem Stammende, eine andere Durchſchnittsfläche gelegt, und der Durchmeſſer gezogen, ſo heißt dieſer, im Gegenſatz des Durchmeſſers am Stammende, den man den untern Durchmeſſer nennt, der obere; legt man auch zwiſchen den gedachten beiden Durchſchnitten einen Durchſchnitt, ſo heißt dieſes Schnitts Durchmeſſer, der mittlere Durchmeſſer. Gewöhnlich aber iſt der mittlere Durchmeſſer die gerade Linie, die man findet, wenn man den

untern und obern Durchmeſſer eines Baums addirt und die Summe mit zwei dividirt, oder halbirt.

§. 34.

Da faſt allgemein zur Ausrechnung des Holzes, ſowohl beim Klafter- als auch beim Bauholze derjenige Werkfuß das Grundmaß iſt, der am Orte oder in der Provinz anerkannt wird, ſo ſind auch hier alle in der Folge vorkommende Fuße bei dieſer und andern ähnlichen Holzberechnungen, nicht geometriſche, ſondern Werkfuße, d. i. ſolche, die im Bauweſen üblich ſind, weil der Inhalt des Holzes jederzeit auf die Art beſtimmt werden muß, wie die Bauleute es verarbeiten. Berechnet man z. B. das Klafterholz nach Ellen, ſo verſteht man unter der Länge einer Elle im Allgemeinen, wenn nicht beſondere Beſtimmungen die Annahme ändern, eine Länge von zwei Werkfußen. Der Werkfuß wird gewöhnlich in 12 Zolle, der Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Skrupel getheilt. Da aber die Decimaleintheilung in vieler Hinſicht vor der Duodecimaleintheilung Bequemlichkeit hat, ſo wird die erſtere oder die Decimaltheilung auch bei Holzberechnungen beibehalten, weil der Inhalt irgend eines Bauholzſtückes, oder einer Klafter, nicht leicht in kleinern Theilen, als in Fußen ausgedrückt wird. Sollten Zolle irgend einmal zum Vorſchein kommen, ſo darf man nur dieſe Zolle in Duodecimalzolle nach dem Verhältniſſe 1000 : 1728 verwandeln, und übrigens die Fuße unverändert laſſen.

Bei großen Zahlen, wodurch der Inhalt irgend eines Holzſtückes angegeben wird, ſind die bei den Fußen ſtehenden Zolle gewöhnlich als nichts anzuſehen, weil in der Ausübung es ſo genau nicht genommen wird, während der Rechnung aber dürfen die Zolle nicht weggelaſſen werden, weil einige Zolle mehremale genommen, auch Fuße geben.

Dieſe

Dieſe Begriffe von den in der Ausübung bei der Größe der Holzbeſtimmung brauchbaren Maßen, gelten auch von den Höhenbeſtimmungen und Durchmeſſern der Bäume, die durch Baummeſſer geſucht werden.

Anmerkung.

In Sachſen wird die Länge des Fußes zur Inhalts-berechnung des Holzes, durch die Dresdner und Leipziger halbe Elle beſtimmt.

Im Preußiſchen hingegen iſt die Länge eines Werkfußes 1391⅕ Theile vom Pariſer Fuß, oder der Werkfuß iſt der rheinl. gemeine Fuß und wird in ſeine 12 Zolle eingetheilt.

§. 35.

Aufgabe.

Den Umfang eines Baums zu meſſen.

Auflöſung.

Man verfertiget ſich hierzu irgend eine Meßſchnur, etwa aus dünnen Pergamentſtreifen von einem Zolle Breite und wickelt ſie auf ein Röllchen, welches in einer Kapſel verwahrt werden kann. Auf dieſen Pergamentſtreifen trägt man mit aller Genauigkeit die Länge eines Werkfußes ſo vielmal, als man denſelben nöthig zu haben glaubt, und theilt jeden dieſer Fuße in 10 Zolle; die Zolle kann man auch noch in Linien ſo theilen, daß ebenfalls jeder 10 Linien erhält. Zum gewöhnlichen Gebrauche iſt es genug, wenn nur der letzte Fuß in Zolle und Linien abgetheilt iſt. Die Theilungsriſſe kann man von ungleicher Länge bei den Zollen und Linien machen, damit ſie leicht erkannt werden, und die Theilſtriche mit guter Dinte ausziehen.

Mit dieſer Schnur umzieht man, etwa einen Fuß über dem Boden, den Baumſtamm, und ſieht zu, wie viel

Fuße, Zolle und Linien dazu nöthig ſind. Der letzte Fuß beſtimmt die kleinern Maßabtheilungen, Zolle und Linien, und die ganze gebrauchte Länge, den Umfang oder die Peripherie des Baums an ſeinem Stammende im Längenmaße.

Anmerkung.

Statt des Pergamentſtreifens kann man ſich auch eine Kette aus Meſſingdrath machen laſſen, die bei einer ſolchen Meſſung ſich wenig oder gar nicht verziehen kann, weil ſie wenig ausgeſpannt oder angezogen werden darf.

Hat man einen §. 14. in der Anmerkung erwähnten Baummeſſer mit einem Mikrometer, ſo kann man, wenn der untere Durchmeſſer aus dem gemeſſenen Umfange beſtimmt worden iſt, auch den obern Durchmeſſer, mithin auch den Umfang des Zopfendes finden.

§. 36.

Aufgabe.

Aus dem gemeſſenen Umfange eines Baums, den dazu gehörigen Durchmeſſer zu finden.

Auflöſung.

Es ſei der Umfang des Baums 6′ 4″; man ſchließe nach §. 67. des theor. Theils:

$$314 : 100 = 64'' : x$$

100

314) 6400 | 20″
628

314) 1200 | 3‴
942

Reſt 258

Alſo iſt der Durchmeſſer 20 Zolle $3\frac{258}{314}$ Linien, oder 2 Fuß 0 Zoll 3 Linien.

§. 37.

§. 37.

Aufgabe.

Aus dem gemeſſenen Durchmeſſer eines Baums, den Umfang zu finden.

Auflöſung.

Es ſei der Durchmeſſer wie §. 36. 2 Fuß, 0 Zoll, $3\frac{258}{314}$ Linien $= 203\frac{258}{314}$ Linien; man ſchließe nach §. 66. des theoret. Theils:

$$100 : 314 = 203\tfrac{258}{314}''' : x$$

```
     203.
    ─────
      942
    628
    ─────
    63742
     +258
    ─────
100) 64|000|64''
```

Alſo iſt der Umfang 6 Fuß 4 Zoll (§. 36.).

Anmerkung.

Den Durchmeſſer eines Baums kann man am bequemſten vermittelſt eines Fußmaßes meſſen, welches zuſammen gelegt, und in der Form eines Quadrats um den Baum herum ſo gehalten werden kann, daß es an den Baum anſchließt, da denn die Seite des Quadrats den Durchmeſſer des Baums angiebt. Die Stärke der Bäume auf dem Reviere muß die Länge des Fußmaßes ohngefähr beſtimmen, und jeder Fuß deſſelben muß in Zolle und jeder Zoll in Linien eingetheilt ſeyn. Man ſehe des Herrn Geh. Oberforſtrath Hennerts Beiträge zur Forſtwiſſenſchaft aus der praktiſchen Geometrie. Leipzig 1783. S. 154.

§. 38.

Aufgabe.

Aus dem gemeſſenen obern und untern Durchmeſſer eines Baums den mittlern Durchmeſſer zu finden.

Auflöſung.

Man addire beide gemeſſene Durchmeſſer, und dividire die Summe durch die Zahl zwei, ſo giebt der Quotient den mittlern Durchmeſſer (§. 170 der Arithmetik).

Es ſei der obere Durchmeſſer 6 Zoll, der untere aber 36; ſo iſt $6 + 36 = 42$, und $\frac{42}{2} = 21$ Zoll, denn es iſt $6 - 21 = 21 - 36$.

Anmerkung.

Kann man in gleichen Höhen und Tiefen über und unter dem untern und obern Durchmeſſer mehrere Durchmeſſer meſſen, ſo erhält man, wenn man alle addirt, und die Summe mit der Anzahl der gemeſſenen Durchmeſſer dividirt, ebenfalls den mittlern, jedoch genauer als in §. 38.

Allgemeine Anmerkung über die Vermeſſung eines Waldes oder Forſtreviers.

Die allgemeine Vermeſſung eines Forſtreviers oder die Vermeſſung der Forſten überhaupt, iſt gewöhnlich das Geſchäft der Kammer-Kondukteure oder der Landmeſſer. In manchen Provinzen gehört dies Geſchäft als eine Hauptarbeit für die Jagdjunkers; in andern wiederum für die Jäger der ſtehenden Corps, die in Friedens-

denszeiten zu künftigen Förſtern und Oberförſtern gezogen, und wiſſenſchaftlich in theoretiſch- und praktiſch-mathematiſchen Kenntniſſen unterrichtet werden. Ein Förſter, deſſen Kenntniſſe nicht tiefer in die Mathematik eingreifen, als die im gegenwärtigen Werke abgehandelten, kommt ſelten zur Aufnahme eines Waldes oder eines Reviers als Hauptperſon; Ihm liegt mehr als Pflicht ob, die innern Abtheilungen eines Reviers, nachdem daſſelbe vermeſſen worden, nämlich die Gehaue oder Schläge abzumeſſen, zu bezeichnen, oder überhaupt das Einzelne im Ganzen nach mathematiſchen Kenntniſſen zu beurtheileu und zu behandeln. Indeß iſt es rühmlich für einen Förſter, der etwas mehr weiß und auszuführen im Stande iſt, als gerade ſo viel, als ſeine Dienſtpflichten erfordern.

Da die möglichen Abtheilungen im Innern eines Reviers im folgenden Abſchnitte abgehandelt werden, ſo iſt hier nur noch nöthig, auf die Vermeſſung des Ganzen aufmerkſam zu machen. Das Aſtrolabium oder die Bouſſole, oder beide in Verbindung, ſind die gewöhnlichſten Inſtrumente, womit man Forſtreviere oder Waldungen aufnimmt. Das, was durch den hier mitgetheilten Unterricht nicht begreiflich werden ſollte, muß man aus den §. 22. in der Anmerkung angeführten Schriften lernen, die eigen dazu beſtimmt ſind, einen vollſtändigen Unterricht über das Aufnehmen einzelner Figuren ſo wohl, als über das Aufnehmen einer ganzen Gegend, theils mit dem Aſtrolabio, theils mit der Bouſſole, theils mit andern Inſtrumenten ꝛc. zu lehren.

Sollte bei einer Forſtvermeſſung der Fall eintreten, daß ein undurchſichtiger Wald, oder ein ſolches Revier gemeſſen werden ſollte, deſſen Umfang oder deſſen Gränzen, als Theile des Umfangs unzugänglich wären, ſo könnte man ſich bei der Aufnahme des Aſtrolabiums, der Bouſſole oder auch des Meßtiſches bedienen, und die Gränzlinien

nien aus rückwärts angenommenen Standpunkten durch ein Verfahren in Grund legen, welches Aehnlichkeit mit der Methode hat, nach welcher die Blößen 10 und 11 (Tab. II. des prakt. Theils der Geom.) in Grund gelegt worden ſind. Dieſe Methode auf den gegenwärtigen Fall angewandt, beſteht im Weſentlichen darin. Iſt die Peripherie des Waldes unzugänglich, wie dies der Fall an manchen Stellen in ſumpfigen Gegenden iſt, vorausgeſetzt, daß die Vermeſſung nicht bis zur Winterszeit, wo man über das Eis weggehet, und zu den Forſtgränzen kommt, verſchoben werden kann, ſo wählt man zur Aufnahme ſolcher Gränzen den Meßtiſch in Verbindung des Aſtrolabiums oder der Bouſſole, oder wählt eins der letztern Inſtrumente allein, nimmt Standlinien von beträchtlicher Größe in einiger Entfernung von den unzugänglichen Gränzlinien an, und ſucht daraus Punkte in der Waldperipherie, durch Interſektionen oder Durchſchnitte zu beſtimmen, indem man ſowohl die Standlinie, als auch die an derſelben liegenden Winkel mißt. Mit einer ſo gemeſſenen Standlinie verbindet man eine andere, und ſo alle folgenden, bis man wieder auf Stellen der Waldperipherie trifft, die zugänglich ſind. Auch erſpart man durch dieſes Verfahren Zeit, weil man nur eine dieſer Standlinien zu meſſen nöthig hat.

Dieſe hier kurz berührte, aber brauchbare Methode, findet man ausführlich aus einander geſetzt in Auers Abhandlung über die geometriſche Aufgabe, einen unzugänglichen und undurchſichtigen Wald oder Moraſt auf die beſte Weiſe auszumeſſen ꝛc. Danzig 1770. Das Unentbehrlichſte derſelben trifft man auch an in Meinerts Anfangsgr. der Feldmeßkunſt. Kap. 9. III. Vermeſſung der Wälder §. 135. S. 297.

Zur Aufnahme der Waldungen oder Forſten und Reviere im Ganzen, ſo wie zur Ausarbeitung der davon

zu

zu machenden Forſtcharte, empfehlen ſich folgende Schriften: Anleitung zu der neuen auf Phyſik und Mathematik gegründeten Forſtſchätzung und Flächeneintheilung in jährliche proportionale Schläge, durch einige auf dieſe Weiſe regulirte Reviere der Königl. Pr. Forſten Schleſiens. Von dem Reichsgräfl. von Praſchmaiſchen Forſtmeiſter Wieſenhaver. Breslau 1794. Kap. 1. und Praktiſche geometriſche Aufnahme der Waldungen mit der Bouſſole und Meßkette. Herausgegeben von H. C. Moſer. Mit 2 Kupfern und einer illuminirten Charte. Leipzig 1797.

Zweite Abtheilung.

Die angewandte Flächenmeſſung

oder die

Epipedometrie im Forſtweſen.

§. 39.

Die Flächenmeſſung begreift alle diejenigen Lehren in ſich, welche zeigen, wie die Größe eines Reviers ſowohl im Ganzen, als auch in ſeinen Theilen nach Quadratmaß berechnet, oder überhaupt, wie der Inhalt dieſer Dinge beſtimmt werden kann.

Die zweite Abtheilung des theoretiſchen Theils enthält den Unterricht zu dieſem Geſchäfte theoretiſch, und in der gegenwärtigen Abtheilung wird gezeigt, wie man von jenen Lehren wirklichen Gebrauch macht, um den Inhalt der Forſten und Waldungen genau zu finden, und dieſen nach den angenommenen Maßen in Quadrat-Ruthen, Morgen, Ackern ꝛc. auszudrücken. Auch bei der Flächenmeſſung behält man die Decimaleintheilung des Quadratmaßes bei, weil man nicht unwichtige Zeiterſparung bei dieſer Eintheilung erhält.

I.

Von dem Inhalte der Seitenflächen ſenkrecht aufgeſetzter Holzklaftern oder Holzmaltern.

§. 40.

Betrachtet man diejenige Seite im Klafter-Holze, welche die Sägeſchnitte zeigt, ſo iſt ſie, wenn die Klafter ſenkrecht ſteht, in allen Fällen ein Rechteck; ein Quadrat aber, wenn die Klafter 6 Fuß Höhe und 6 Fuß Breite hat. Dieſe Seite nun heißt die Fläche der Holzklafter. Auf eben dieſe Art erhält man einen Begriff von der Fläche eines Holzmalters.

§. 41.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt einer Klafter Holz zu finden.

Auflöſung.

Man mache das Produkt aus der Höhe und Breite der Klafter, ſo hat man die Größe der Fläche. Iſt Länge und Breite gleich, ſo iſt der Inhalt ein Quadrat, welches man findet, wenn man die Quadratzahl einer Seite ſucht (§. 105 des theoret. Theils).

Es ſei die Holzklafter 6 Fuß lang und breit, ſo iſt

6 . 6 = 36 Quadratfuß der Inhalt der Fläche.

Oder die Länge und Breite in Zollen ausgedrückt, jede zu 60 Zoll gerechnet, giebt 60 . 60 = 3600 Quadratzolle Inhalt der Fläche.

§. 42.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Holzmalters zu finden.

Auf-

Zweite Abtheilung.

Die angewandte Flächenmeſſung
oder die
Epipedometrie im Forſtweſen.

§. 39.

Die Flächenmeſſung begreift alle diejenigen Lehren in ſich, welche zeigen, wie die Größe eines Reviers ſowohl im Ganzen, als auch in ſeinen Theilen nach Quadratmaß berechnet, oder überhaupt, wie der Inhalt dieſer Dinge beſtimmt werden kann.

Die zweite Abtheilung des theoretiſchen Theils enthält den Unterricht zu dieſem Geſchäfte theoretiſch, und in der gegenwärtigen Abtheilung wird gezeigt, wie man von jenen Lehren wirklichen Gebrauch macht, um den Inhalt der Forſten und Waldungen genau zu finden, und dieſen nach den angenommenen Maßen in Quadrat-Ruthen, Morgen, Ackern ꝛc. auszudrücken. Auch bei der Flächenmeſſung behält man die Decimaleintheilung des Quadratmaßes bei, weil man nicht unwichtige Zeiterſparung bei dieſer Eintheilung erhält.

I.

I.

Von dem Inhalte der Seitenflächen ſenkrecht aufgeſetzter Holzklaftern oder Holzmaltern.

§. 40.

Betrachtet man diejenige Seite im Klafter-Holze, welche die Sägeſchnitte zeigt, ſo iſt ſie, wenn die Klafter ſenkrecht ſteht, in allen Fällen ein Rechteck; ein Quadrat aber, wenn die Klafter 6 Fuß Höhe und 6 Fuß Breite hat. Dieſe Seite nun heißt die Fläche der Holzklafter. Auf eben dieſe Art erhält man einen Begriff von der Fläche eines Holzmalters.

§. 41.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt einer Klafter Holz zu finden.

Auflöſung.

Man mache das Produkt aus der Höhe und Breite der Klafter, ſo hat man die Größe der Fläche. Iſt Länge und Breite gleich, ſo iſt der Inhalt ein Quadrat, welches man findet, wenn man die Quadratzahl einer Seite ſucht (§. 105 des theoret. Theils).

Es ſei die Holzklafter 6 Fuß lang und breit, ſo iſt

6 . 6 = 36 Quadratfuß der Inhalt der Fläche.

Oder die Länge und Breite in Zollen ausgedrückt, jede zu 60 Zoll gerechnet, giebt 60 . 60 = 3600 Quadratzolle Inhalt der Fläche.

§. 42.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Holzmalters zu finden.

Auf-

Aufloſung.

Man mache das Produkt aus der Höhe in die Breite des Malters, ſo hat man die Größe der Fläche. Iſt Höhe und Breite gleich, ſo iſt die Fläche ein Quadrat, welche nach §. 41. berechnet wird. Sind aber beide Abmeſſungen ungleich, ſo iſt die Fläche doch in jedem Falle ein Rechteck, und zwar ein Oblongum, deſſen Inhalt nach §. 106. (des theoret. Theils) berechnet wird.

Es ſei der Malter 30 Zoll hoch und 60 Zoll breit, ſo iſt

30 . 60 = 1800 Quadratzoll der Inhalt der Fläche.

II.

Von dem Inhalte der Seitenflächen ſchief aufgeſetzter Holzklaftern und Holzmaltern.

§. 43.

So bald ein Rechteck (nämlich Quadrat und Oblongum) verſchoben wird, ſo daß aus den rechten, ſchiefe Winkel werden, ſobald wird es am Inhalte kleiner, denn es verliert mehr oder weniger an der Höhe, je nachdem der rechte Winkel an der Grundlinie mehr oder weniger in einen ſchiefen verſchoben wird.

Nimmt man z. B. die Höhe von 6 Fuß, und macht daraus, wie Fig. 12. zeigt, ein Quadrat abcd (§. 97. des theoret. Theils), verlängert cd und ab, und nimmt alsdenn die Länge von 6 Fuß und macht daraus die Raute abcd, deren Winkel bad etwa 53 Grad hält (§. 99. des theoret. Theils) und ſucht den Inhalt des Quadrats ſowohl, als den der Raute, die mit dem Quadrate gleiche Länge hat; ſo findet man, daß, da die Höhe der Raute nicht mehr 6 Fuß, ſondern nur etwa 5 Fuß beträgt, der Inhalt der Raute kleiner ſei, als der des Quadrats. Denn es iſt

der

der Inhalt der Raute 5 . 6 = 30; der Inhalt des Quadrats aber 6 . 6 = 36. Demnach iſt durch das Verſchieben des Quadrats in eine Raute, der Inhalt der Raute um 6 Quadratfuß kleiner geworden, als der Inhalt des Quadrats.

Aus dieſer Betrachtung ergeben ſich folgende Sätze: Jede Holzklafter, oder jeder Holzmalter, welche an einem Berge oder Abhange ſtehen, und alſo in einem ſchiefen Winkel aufgeſetzt worden, iſt an Fläche kleiner, als eine Klafter oder Malter in einem rechten Winkel oder ſenkrecht auf eine horizontale Fläche aufgeſetzt. Da nun jede Klafter ihr gehöriges Maß an Länge, Breite und Höhe oder überhaupt an Inhalt haben ſoll, ſo muß die durch das Aufſetzen entſtandene Verringerung durch folgende Abänderung ergänzt werden.

§. 44.

Aufgabe.

Eine Holzklafter oder einen Holzmalter im Walde an einem Berge oder Abhange, alſo unter einem ſchiefen Winkel an der Grundlinie ſo aufzuſetzen, daß am beſtimmten Inhalte nichts mangele.

Auflöſung.

Da es in Waldungen oder Forſten, beſonders in Gebirgsgegenden, nicht immer möglich iſt, daß das Klafter- und Malterholz auf Horizontalebenen aufgeſetzt werden kann, ſo verfahre man an Bergen, Anhöhen und Abhängen mit dem Aufſetzen auf folgende Art:

Man ſtelle das Klaftermaßab, Fig. 12., nachdem die Grundlinie der Klafter ſo groß gemacht worden iſt, als es die Vorſchrift verlangt, unter einem rechten Winkel mit der Fläche des Bodens, worauf die Klafter ſtehet, und

ſetze,

ſehe, um wie viel es oben über die Klafter hervorrage. Legt man nun noch ſo viel Holz auf, bis die oberſte Linie durch b mit der Grundlinie parallel läuft, oder bis die Klafter die noch zugekommene Höhe cd erreicht hat, ſo hat man eine Klafter von dem Inhalte, den ſie haben würde, wenn ſie auf einer Horizontalebene unter einem rechten Winkel aufgeſetzt worden wäre.

Was für die Klaftern gilt, muß nothwendig auch für die Malter, folglich auch für jeden Holzhaufen gelten.

Differenzen beim Holzhandel, das Holz mag verfahren oder verflößet werden, entſtehen daher nicht immer durch Entwendungen, ſondern ſie können aus dem fehlerhaften Auſſetzen der Klaftern auf unebenen Boden herrühren, worauf alſo die Aufſeher vorzüglich zu merken haben.

Anmerkung.

Wenn Holzklaftern oder Malter unvorſchriftsmäßige Seitenflächen haben, wie dies der Fall in gebirgigen Gegenden ſeyn kann, ſo verliert die Klafter, ſo wie der Malter auch am körperlichen Inhalte, wie dies aus der Betrachtung §. 43. deutlich erhellet. Wer mehr darüber nachzuleſen wünſcht, dem kann folgendes Büchelchen nützen: Gottfr. Erich Roſenthals geometriſche Abhandlung von der Beſtimmung der Größe und des Verluſtes der Holzhaufen, welche ihre Lage an einem Gebirge haben. Nordhauſen, 1771. 3 Bogen. Ferner: Am Schluſſe der phyſikaliſchen Verſuche über das Verhältniß der Brennbarkeit der meiſten deutſchen Waldbaumhölzer, von G. L. Hartig, Marburg 1794. ſteht eine Tabelle, worin angegeben iſt, wie viel Holzmaſſe eine Scheit- und Prügelklafter von jeder Holzart enthält.

III.

Von den Grundflächen der Bäume.

§. 45.

Was die Grundfläche eines Baumes ſei; nämlich eine Kreisfläche, iſt §. 33. bemerkt worden.

§. 46.

Aufgabe.

Die Grundfläche eines Baums zu finden.

Auflöſung.

Da die Grundfläche eines Baums eine Kreisfläche iſt, ſo finden hier alle Lehren und Regeln ihre Anwendung, die (§. 130 bis §. 133. des theoret. Theils) angeführt worden ſind.

Wird der Umfang eines Baums gegeben, ſo ſucht man daraus den Durchmeſſer (§. 36.); quadrirt man dieſen, ſo hat man das Quadrat des Durchmeſſers.

Nun ſchließt man nach §. 131. (des theoret. Theils) 1000 : 785, wie das Quadrat des Durchmeſſers zur Kreisfläche.

Es ſei z. B. der Durchmeſſer des Baums 24 Zoll; wie groß iſt die Grundfläche deſſelben?

$$1000 : 785 = 576 : x$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \hline 4710 \\ 5495 \\ 3925 \\ \hline 1000)\ 452160 \mid 45216''' \end{array}$$

d. i. die Grundfläche iſt 4 F^2 52 Z^2 16 L^2.

Eben

Eben dieſe Grundfläche findet man auch noch auf andere Art. Man ſehe §. 132. des theoret. Theils.

Anmerkung.

Wird außer dem Durchmeſſer auch die Peripherie des Baums gegeben, oder werden beide als bekannt angenommen, ſo kommt man öfters kürzer zum Inhalte der Grundfläche, wenn man die Methode §. 132. des theor. Theils befolgt.

IV.

Von der Berechnung des Flächeninhalts eines ganzen Reviers.

§. 47.

Den Inhalt eines ganzen Reviers findet man im Quadratmaße, wenn man es, nachdem es nach n. IV der erſten Abtheilung des prakt. Theils richtig vermeſſen, oder aufgenommen worden iſt, nach §. 125. des theoret. Theils in Dreiecke, Vierecke, oder in ſolche Figuren zerlegt, in welche es ſich bequem zerlegen läßt, den Inhalt einer jeden dieſer Figuren für ſich ſucht, und zuletzt alle Figuren, die zuſammen genommen das Revier ausmachen, in eine Summe bringt, und dieſe entweder in Quadratruthen, oder Waldmorgen, oder in Ackermaße ausdrückt (§. 3). Ein Beiſpiel wird dies Verfahren vollkommen deutlich machen.

§. 48.

Aufgabe.

Den Inhalt eines aufgenommenen Reviers zu finden.

Auflöſung.

Als Beiſpiel zur Auflöſung dieſer Aufgabe diene das §. 21. aufgenommene oder vermeſſene Freudenberger

Revier,

Revier, wie ſolches die IV. Tafel des praktiſchen Theils der Geometrie, theils in Dreiecke, theils aber auch in Vierecke zerlegt, enthält, und wornach man ſich bei andern ähnlichen Berechnungen richten kann.

Dieſes Revier Tab. IIII. enthält

1) Folgende Dreiecke, als:

a) Das △ klm; auf der Grundlinie km = 305′ und in der Perpendikularlinie oder Höhe = 65′, und hat demnach

305
65
―――
1525
1830
―――
2) 19825 | 9912½ Quadratfuß Inhalt.

b) Das △ kmn; Grundlinie nk = 422′; Höhe = 100′.

422
100
―――
2) 42200 | 21100 Quadratfuß Inhalt.

c) Das △ iqqh; Grundlinie hi = 327′; Höhe = 150′.

327
150
―――
16350
327
―――
2) 49050 | 24525 Quadratfuß Inhalt.

d) Das △ efg; Grundlinie eg = 325′; Höhe 150′

$$\begin{array}{r l} 325 & \\ 75 & = \tfrac{1}{2}(150). \\ \hline 1625 & \\ 2275 & \\ \hline 24375 & \text{Quadratfuß Inhalt.} \end{array}$$

e) Das △ oocd; Grundlinie ood = 365′; Höhe = 40′.

$$\begin{array}{r l} 365 & \\ 20 & = \tfrac{1}{2}(40). \\ \hline 7300 & \text{Quadratfuß Inhalt.} \end{array}$$

f) Das △ oobc; Grundlinie bc = 205′; Höhe = 120′.

$$\begin{array}{r l} 205 & \\ 60 & = \tfrac{1}{2}(120). \\ \hline 12300 & \text{Quadratfuß Inhalt.} \end{array}$$

g) Das △ $\overline{mua}$; Grundlinie $\overline{ma}$ = 460′; Höhe = 145′.

$$\begin{array}{r r l} \tfrac{1}{2}(460) = & 230 & \\ & 145 & \\ \hline & 1150 & \\ & 92 & \\ & 23 & \\ \hline & 33350 & \text{Quadratfuß Inhalt.} \end{array}$$

h) Das △ $\overline{lym}$; Grundlinie $\overline{lm}$ = 112′; Höhe = 20′.

$$\begin{array}{r r l} \tfrac{1}{2}(112) = & 56 & \\ & 20 & \\ \hline & 1120 & \text{Quadratfuß Inhalt.} \end{array}$$

i) Das

i) Das △ $\overline{kni}$; Grundlinie $\overline{nk} = 462'$; Höhe $= 85'$.

$$\begin{array}{r} 231 = \tfrac{1}{2}(462) \\ 85 \\ \hline 1155 \\ 1848 \\ \hline 19635 \end{array}$$
Quadratfuß Inhalt.

k) Das △ $\overline{hni}$; Grundlinie $\overline{hi} = 366'$; Höhe $= 187'$.

$$\begin{array}{r} 183 = \tfrac{1}{2}(366). \\ 187 \\ \hline 1281 \\ 1464 \\ 183 \\ \hline 34221 \end{array}$$
Quadratfuß Inhalt.

l) Das △ $\overline{dew}$; Grundlinie $\overline{dw} = 700'$; Höhe $= 96'$.

$$\begin{array}{r} 700 \\ 48 = \tfrac{1}{2}(96). \\ \hline 33600 \end{array}$$
Quadratfuß Inhalt.

m) Das △ $\overline{cyx}$; Grundlinie $\overline{cx} = 645'$; Höhe $121'$.

$$\begin{array}{r} 645 \\ 121 \\ \hline 645 \\ 1290 \\ 645 \\ \hline 2)\ 78045 \,|\, 39022\tfrac{1}{2} \end{array}$$
Quadratfuß Inhalt.

n) Das △ $\overline{cy}z$; Grundlinie $\overline{cy}$ = 585′; Höhe = 152′.

$$\begin{array}{r} 585 \\ 76 \\ \hline 3510 \\ 4095 \\ \hline 44460 \end{array} \quad 76 = \tfrac{1}{2}(152).$$

44460 Quadratfuß Inhalt.

o) Das △ $\overline{c}bz$; Grundlinie $\overline{c}z$ = 455′; Höhe = 70′.

$$\begin{array}{r} 455 \\ 70 \\ \hline 2)\ 31850 \mid 15925 \end{array}$$

15925 Quadratfuß Inhalt.

p) Das △ $\overline{b}az$; Grundlinie $\overline{b}z$ = 228′; Höhe = 20′.

$$\begin{array}{r} 228 \\ 10 \\ \hline 2280 \end{array}$$

2280 Quadratfuß Inhalt.

q) Das △ $wv\overline{t}$; Grundlinie $w\overline{t}$ = 545′; Höhe = 105′.

$$\begin{array}{r} 545 \\ 105 \\ \hline 2725 \\ 545 \\ \hline 2)\ 57225 \mid 28612\tfrac{1}{2} \end{array}$$

28612½ Quadratfuß Inhalt.

r) Das △ $u\overline{t}v$; Grundlinie uv = 446′; Höhe = 134′.

$$\begin{array}{r} 446 \\ 67 \\ \hline 3122 \\ 2676 \\ \hline 29882 \end{array} \quad 67 = \tfrac{1}{2}(134)$$

29882 Quadratfuß Inhalt.

s) Das

s) Das △ ſſsr; Grundlinie ſſr = 105′; Höhe = 20′.

105
10 = ½(20)
―――
1050 Quadratfuß Inhalt.

t) Das △ qpr̄; Grundlinie qr̄ = 245′; Höhe = 68′.

245
34 = ½(68).
―――
980
735
―――
8330 Quadratfuß Inhalt.

u) Das △ r̄po; Grundlinie r̄o = 170′; Höhe = 94′.

170
47 = ½(94)
―――
1190
68
―――
7990 Quadratfuß Inhalt.

2) Folgende Vierecke oder Trapezoiden, als:

a) Das □ noik; Diagonallinie ni = 506′; Höhen = 232′ und 361′.

232 + 361 (nach §. 108. des theor. Theils).
593
253 = ½(506).
―――
1779
2965
1186
―――
150029 Quadratfuß Inhalt.

b) Das □ oipe; Diagonallinie oe = 748′; Höhen = 518′ und 495′.

$\underbrace{495 + 518}$
1013
374 $= \frac{1}{2}(748)$
―――
4052
7091
3039
―――
378862 Quadratfuß Inhalt.

c) Das □ qhge; Diagonallinie qg = 482′; Höhen = 328′ und 147′.

$\underbrace{328 + 147}$
475
241 $= \frac{1}{2}(482)$
―――
475
1900
950
―――
114475 Quadratfuß Inhalt.

d) Das □ abuo; Diagonallinie ao = 285′; Höhen = 120′ und 129′.

$\underbrace{120 + 129}$
249
285
―――
1245
1992
498
―――
2) 70965 | 35482½ Quadratfuß Inhalt.

e) Das

e) Das □ rmpr; Diagonallinie rp = 721′; Höhen = 722′ und 407′.

$$\underbrace{722 + 407}$$

1129
721

1129
2258
7903

2) 814009 | 407002½ Quadratfuß Inhalt.

f) Das □ ſſtutt; Diagonallinie ttt = 616′; Höhen = 91′ und 128′.

$$\underbrace{91 + 128}$$

219
308 = ½(616).

1752
657

67452 Quadratfuß Inhalt.

g) Das □ weyr; Diagonallinie er = 1425′; Höhen = 608′ und 628′.

$$\underbrace{608 + 628}$$

½(1236) = 618
1425

3090
1236
2472
618

880650 Quadratfuß Inhalt.

h) Das □ $\overline{e}ff\overline{k}ll$; Diagonallinie $\overline{ek}$ = 944′; Höhen = 127′ und 323′.

$$\underbrace{127 + 323}$$
$$450$$
$$472 = \tfrac{1}{2}(944).$$
$$900$$
$$3150$$
$$1800$$
$$212400$$ Quadratfuß Inhalt.

i) Das □ $ffg\overline{h}n$; Diagonallinie ffhh = 485′; Höhen = 173′ und 104′.

$$\underbrace{104 + 173}$$
$$277$$
$$485$$
$$1385$$
$$2216$$
$$1108$$
2) $134345 \mid 67172\tfrac{1}{2}$ Quadratfuß Inhalt.

k) Das □ $\overline{c}dwx$; Diagonallinie ddx = 768′; Höhen = 196′ und 242′.

$$\underbrace{196 + 242}$$
$$\tfrac{1}{2}(438) = 219$$
$$768$$
$$1752$$
$$1314$$
$$1533$$
$$168192$$ Quadratfuß Inhalt.

Um den geſammten Inhalt zu finden: addire man alle Dreiecke, und zur Summe alle Vierecke; nämlich:

Das

Das △ klm	= 99° 12′ 50″	das △ dew	= 336° 00′ 00″
— — kmn	= 211 00	— — cyx	= 390 22 50
— — iqh	= 245 25	— — czy	= 444 60
— — efg	= 243 75	— — cbz	= 159 25
— — ocd	= 73 00	— — baz	= 22 80
— — obc	= 123 00	— — wvtt	= 286 12 50
— — mua	= 333 50	— — uttv	= 298 82
— — lym	= 11 20	— — ſſsr	= 10 50
— — kni	= 196 35 00	— — qpr	= 83 30
— — hni	= 342 21	— — rpo	= 79 90
	1878° 38′ 50″		2111° 52′
	2111° 52′ 00″		

3989° 90′ 50″ = Summe des Inhalts aller Dreiecke des Reviers.

1500° 29′	= Inhalt des □	noik
3788 62	= — — —	oipe
1144 75	= — — —	qhge
354 82 50	= — — —	abuo
4070 04 50	= — — —	rmpr
674 52	= — — —	ſſtutt
8806 50	= — — —	weyr
2124 00	= — — —	effkll
671 72 50	= — — —	ffghn
1681 92	= — — —	cdwx

28797° 10′ Inhalt des ganzen Reviers.

Da hier außer den 28797 Quadratruthen, noch 10 Quadratfuße vorhanden, dieſe aber als eine Kleinigkeit gegen den geſammten Inhalt angeſehen werden können, ſo kann man dieſe, ohne einen Fehler zu beſorgen, von der Summe des Inhalts weglaſſen, und dieſe wäre demnach 28797 Quadratruthen.

Rechnet man nun auf einen Waldmorgen 150, auf einen Acker aber 300 Quadratruthen, ſo wäre der geſammte Inhalt des Freudenberger Reviers 191 Waldmorgen und 97 Quadratruthen; oder 95 Acker, 1 Morgen und 147 Quadratruthen.

Anmerkung.

Im Preußiſchen, wo man auf den Morgen 180 Quadratruthen rheinl. rechnet, wäre, wenn der Inhalt 28797 rheinl. Quadratruthen beträgt, eben dieſer Inhalt, 159 Morgen und 177 Quadratruthen rheinl.

V.

Von der Eintheilung eines Reviers in Gehaue oder Schläge nach dem Flächeninhalte.

§. 49.

Ein Revier unter gewiſſe Gehaue oder Holzſchläge zu vertheilen, oder zu ſetzen, geſchieht auf zweierlei Art. Einmal, wenn man den mit Holz beſtandenen Flächeninhalt eines Reviers, nach einer gewiſſen Anzahl von Jahren, worin man mit Gehauen durch daſſelbe kommen kann, in gleiche Theile, ohne Rückſicht auf eine jährliche feſtgeſetzte Anzahl von Stämmen oder Holzklaftern ꝛc. ſchlagen zu laſſen, eintheilt; dann, wenn man den Holzbeſtand berechnet, und dieſen innerhalb einer gewiſſen Anzahl von Jahren, nach einer jährlich zu ſchlagenden

genden Anzahl von Stämmen oder Holzklaftern ꝛc. einzutheilen ſucht. Von der letztern Art giebt die folgende Abtheilung Unterricht; folglich iſt die erſtere ein Gegenſtand der gegenwärtigen Unterſuchung.

Bevor die Eintheilungsmethode ſelbſt entwickelt wird, muß man zuvor folgende Stücke in Betrachtung ziehen.

§. 50.

1) Von welcher Gegend aus muß ein Gehaue oder ein Holzſchlag angefangen, und nach welcher muß er fortgeführt werden?

Zur Beantwortung dieſer Frage werden unter den verſchiedenen Gründen folgende hinreichend ſeyn.

a) Bei Tannen, Fichten und Kihnen oder Kiefern hat man beſonders darauf zu ſehen, daß die Gehaue nie von West oder Nordweſt gegen Oſt genommen, oder die Reviere angehauen werden. Die Urſachen ſind dieſe;

aa) Weil gewöhnlich die ſtärkſten Sturmwinde aus dieſen Gegenden kommen, und dadurch Windbrüche veranlaßt werden.

bb) Weil durch heftige Sturmwinde auf den abgehauenen Gegenden der Anflug oder die Beſaamung Schaden nehmen und verderben kann.

Mithin hält man die Anhauung vom Nordoſt oder Oſt gen Weſt oder Südweſt für die vortheilhafteſte.

aa) Weil in dieſer Richtung das übrige noch mit Holz beſtandene Revier den heftigen Sturmwinden nicht ſo ſehr ausgeſetzt wird.

bb) Weil durch den Selbſtanflug die Beſaamung befördert werden kann, da nämlich von dem ſtehenden Holze mit dem Südweſt oder Südwinde, durch welchen ſich die Tannen- Fichten- und Kiefernzapfen

im

im Frühjahre öffnen, ſogleich das vorliegende abgetriebene Revier ſich eher wieder beſaamen kann, welches bei entgegengeſetzter Anhauung von Nord- und Oſtwinden mit ſo gutem Erfolg nicht zu hoffen iſt.

b) Bei den harten Holzarten muß man auch verhüten, daß eine Gegend von Nord oder Nordweſt nicht zuerſt entblöſt werde, um den jungen Ausſchlag vor der ſtrengen Witterung ſo viel möglich zu verwahren.

c) Bei den vermiſchten Holzarten aber hat man des Windes wegen nicht ſo viel zu beſorgen. Denn zwiſchen dem harten Bauholze ſtehen die Saattannen, Fichten und Kiefern ſicher. Dies erfolgt deſtomehr, wenn man ſolche Saamenbäume wählt, die in der Nähe einer dicken Eiche oder Buche ſtehen.

Bei der Anlage der Gehaue oder Schläge muß man endlich auch darauf Bedacht nehmen, daß die Holzabfuhren nicht über den Holzſchlag gehen. Zu dem Zwecke führe man ſie von den äußerſten Ecken, damit das abgetriebene Revier, ſobald das Holz abgefahren iſt, in Ruhe bleibe, und ſich entweder durch den Anflug beſaame, oder daß es durch Saat beſaamt werden könne.

§. 51.

2) Wie groß muß ein Gehau oder ein Holzſchlag gemacht werden?

Zur Beantwortung dieſer Frage wird folgendes hinreichen:

a) Beim Tangel- oder Nadelholze iſt es am rathſamſten, ſchmale oder weniger breite Gehaue zu führen, weil ſie ſich von dem noch ſtehenden Holze, wenn man ſie nicht beſäen will, am leichteſten von ſelbſt beſaamen können; daher hat man auch nicht nöthig, zerſtreut einzelne Saamenbäume ſtehen zu laſſen weil dieſe doch ſelten ſtarke Winde auszuhalten fähig ſind. Sollten

ten aber dieſer Vortheile ungeachtet große Gehaue getrieben werden müſſen, ſo könnte man, ſtatt der einzelnen Saatbäume, vortheilhafter ganze Horſte oder ſchmale Streifen ſtehen laſſen. Geſetzt, dieſe blieben auch von ſtarken Winden nicht unangegriffen, ſo fallen ſie doch ſelten durch den Windbruch alle auf einmal, ohne daß davon das Gehaue beſaamet würde. Ungeachtet bey dem Nadelholze kleine Gehaue empfohlen werden, ſo wird dadurch nicht angerathen, hie und da kleine Winkelgehaue anzuordnen. Man treibe demnach von Nordoſt gegen Südweſt die Gehaue höchſtens etwa 20 Ruthen breit; die Länge aber läßt ſich im Allgemeinen nicht beſtimmen, weil Ort, Lage und Größe des Reviers hierzu die Vorſchriften von ſelbſt angeben. Iſt ein ſolches Gehau erſt wieder mit Anflug verſehen, ſo kann darneben ohne Bedenken alsdann auch ein großes Revier abgetrieben werden.

b) Beim harten Holze verhält es ſich mit der Beſtimmung der Größe des Gehaues anders, weil

aa) der Saame zum Theil ſchwerer als beim Nadelholze, und folglich nicht ſo leicht vom Winde verwehet werden kann;

bb) man auch verſichert ſeyn kann, daß der Wind ſo leicht nicht ſtehengebliebene Laaßreißer und Saamenbäume umwerfen wird. Und weil

cc) wegen der Hut und Weide (wo ſolche noch Statt findet) große Gehaue nothwendig getrieben werden müſſen.

Auch iſt es nöthig, daß beſonders in den Revieren, welche aus dem Saamen anzuziehen, viel Saamenbäume gelaſſen werden, die aber, ſobald die Beſaamung erfolgt iſt, nach und nach weggehauen werden können. Dies aber muß, wie bereits bemerkt worden, nicht auf einmal, ſondern nur nach und nach geſchehen, damit dem jungen Anfluge nicht auf einmal der Schatten entzogen werde. Die Aushauung kann nach fünf bis

ſechs

ſechs Jahren ohne Schaden geſchehen, und wenn ſie vorgenommen wird, muß das Holz aus dem Gehaue in die Wege geſchaft werden, damit beim Abfahren deſſelben dem Aufluge der Schade ſo unbeträchtlich wie möglich werde.

c) Bei vermiſchtem Holze kommt es abermals darauf an, ob der Ort in der Folge zu Laub- oder Tangelholz angezogen werden ſolle. Sieht man, daß das Tangelholz die Oberhand behalten will, ſo laſſe man von hartem Bauholze, als von Eichen und Buchen, keine ſtarken und alten Bäume, ſondern junge, glatte und geſunde Laaßreißer ſtehen, aus welchen man bei der künftigen Hauung des Tangelholzes gutes Nutzholz erwarten kann. Vermuthet man aber, daß das harte Holz die Oberhand behalten möchte, ſo läßt man, je nachdem die Bäume groß ſind, auf einem Morgen 4, 5 bis 6 Stücke ſtehen, und zwiſchen denſelben etwa noch 10, 15 bis 20 Stück Laaßreißer. Auf gebirgigen Oertern, wo man befürchten muß, daß manche vom Schnee oder Glatteis verdrückt werden könnten, läßt man die mehreſten ſtehen, und ſchafft übrigens alles Tangelholz weg.

§. 52.

Iſt bei einem Reviere kein Hüttenwerk, oder keine andere holzverzehrende Anlage in der Nähe, und muß man die Holzungen ganz allein zum Verkauf ſchlagen laſſen, ſo iſt insbeſondere darauf zu ſehen, daß kein Bau- Nutz- oder Blockholz zu Feuer- und Kohlholz geſchlagen werde. Mit Revieren in dieſer Lage verfährt man auf folgende Art:

a) Bei dem Tangelholze läßt man dasjenige Revier, das zur Beholzung beſtimmt iſt, abpflöcken. Man durchſuche daher alles genau mit dem Blockholzhauer, damit dieſer zuvor alle die zu Blöcken tauglichen

Stäm-

Stämme heraushaue. Nach dieſem folgt der Bauholzhauer, der Nutzholzhauer, und endlich erhält den Ueberreſt der Feuerholz- und Kohlholzhauer. Auch läßt man zuweilen erſt das Bauholz fällen, weil aus einem mißgerathenen oder mißgefallenen Baumſtamme noch ein Sägeblock genommen werden kann. Das Verhältniß des Nutzholzes gegen das Feuerholz fällt an einigen Orten ungefähr ſo aus: Gilt eine Klafter Feuerholz 1½ Thaler, ſo koſtet dieſe im Bauholze doppelt ſo viel, alſo 3 Thaler, im Nutzholze aber dreimal ſo viel, alſo 4½ Thaler, und im Blockholze viermal ſo viel, alſo 6 Thaler. Indeß iſt dieſes Verhältniß keineswegs als Regel anzunehmen, weil Lage, Ort, Umſtände ꝛc. ſehr vieles ändern.

Hieraus folgt wenigſtens, daß es nachtheilig ſey, wenn in ordentlichen Gehauen vom Nutzholze irgend einer Art, etwas unter Feuerholz geſchlagen wird.

Eine ähnliche Bewandniß hat es

b) mit den harten Bauhölzern. Die Bäume, welche in einem Gehaue zuerſt gefällt werden ſollen, laſſe man mit dem Waldhammer anſchlagen und auszeichnen, und hierbei läßt man z. B. unter den Eichen diejenigen Stämme, welche zu Wellbäumen, Waſſertrögen, oder zu Schiffbauholze brauchbar ſind, beſonders anmerken. Da die Preiſe von dieſen Stämmen ſehr verſchieden ſind, ſo kommt alles darauf an, welche Sorte am häufigſten geſucht wird. So viel iſt ausgemacht, daß Eichenbauholz den Werth des Brennholzes wenigſtens zweimal übertrifft. Mit dem Buchenholze hat es dieſelbe Bewandniß; auch kann deſſen Nutzholz noch einmal ſo hoch als das Brennholz veranſchlaget werden.

c) Bei den Stangenholzarten wird zuerſt das kleine Nutzholz für die Handwerksleute ausgehauen, weil an einigen Orten das Wagnerholz, z. B. Speichen

chen ꝛc. den Werth des Brennholzes dreimal, und andere Sorten wenigſtens doppelt überſteigt. Bei Niederſchlagung der Stangenholzarten muß man ebenfalls auf gute Laaßreißer ſehen, und wenn der Niederſchlag der Stangen geſchehen iſt, ſo werden die abſtändigen oder überflüſſigen Oberſtänder, die von dem erſten Gehaue ſtehen geblieben ſind, mit dem Waldhammer markirt, und das davon zu erwartende Nutzholz aufgemacht. Neben den erwähnten Laaßreißern läßt man etwa auf einen Morgen von den beſten und geſundeſten Oberſtändern 4 bis 5 Stück ſtehen. Aus beiden Arten kann man bei dem künftigen Schlage das benöthigte Nutzholz erwarten.

§. 57.

3) Wenn und zu welcher Zeit ſoll die Schlagung des Bau- und Nutzholzes vorgenommen werden?

Das Holzfällen oder Schlagen geſchieht wohl am zweckmäßigſten in den Wintermonaten.

In dem Falle aber, wenn die Rinde oder Borke der Eichen beſonders benutzt und verkauft werden ſollte, müßte, nach einiger Meinung, das Schlagen erſt ſpät im Frühjahr vorgenommen werden. Damit ein ſolches Verfahren der Dauer des Holzes nicht ſchädlich werde, ſo werden die Stämme ſcharf beſchlagen und es darf nichts vom Splint zurückgelaſſen werden. Birken- und Buchenholz läßt man ebenfalls nicht zu lange in der Borke liegen, weil es unter derſelben leicht zu ſtocken anfängt; kann man es daher nicht ſogleich aus dem Gehölze ſchaffen, ſo muß es abgeſchärft werden.

Anmerkung.

Die hier erwähnten Sätze gehören eigentlich in die Naturlehre des Forſtweſens, und ſind zum Theil aus folgendem Werke entlehnt: Allgemeines ökono-

ökonomiſches Forſtmagazin ꝛc. Herausgegeben von Joh. Fr. Stahl, Frankfurth und Leipzig 1763 bis 1769. XII Bände. Neue vermehrte und verbeſſerte Auflage, Frankf. u. Leipz I. u. II. Band. 1783.

Dieſes Werk enthält eine nützliche Sammlung von Abhandlungen, Auszügen, Verordnungen und litterariſchen Nachrichten das Forſtweſen betreffend.

Hierher gehört auch Neueres Forſtmagazin (herausgegeben von Mathias Joſeph Franzmadhes). Erfurt I u. II. Band, von 1776 bis 1779. Eine ebenfalls brauchbare Sammlung, doch nicht mit ſo guter Auswahl zuſammen getragen als Stahls Forſtmagazin.

Ferner, Forſtarchiv zur Erweiterung der Forſt- und Jagdwiſſenſchaft ꝛc. Von Wilh. Gottfr. von Moſer, Ulm 1788 bis 1796. XVII Bände. Wichtig für denkende Forſtwirthe. Desgleichen Wilh. Gottfr. von Moſers neues Forſtarchiv, fortgeſetzt in Geſellſchaft mehrerer Gelehrten und erfahrner Forſtwirthe. Von D. Chriſtoph Wilh. Jakob Gatterer, Ulm 1796. ff.

In der gegenwärtigen Rückſicht empfiehlt ſich auch das vortreffliche Werk, welches viele wichtige und praktiſche Bemerkungen enthält: Journal für das Forſt- und Jagdweſen. Herausgegeben von J. D. Reitter. Leipz. I. B. 1790 — 1791.; II. B. 1791 — 1792.; III. B. 1792 — 1793.

Auch gehören hierher der Beckmanniſche, nachher von Zanthier und Laßberg fortgeſetzte und durch Grooten vermehrte und verbeſſerte Forſtcalender, Leipz. 1764 bis 1768 und 1772.

Der Taſchencalender auf das Jahr 1791 für Kameraliſten ꝛc. Forſtwirthe ꝛc. von Georg Stumpf, L. C. E. H. F. von Wildungens Neujahrsgeſchenk für Jagd- und Forſtliebhaber auf das Jahr 1794. 1795 und 1796.

Forſt und Jagdcalender. Vom Prof. Fr. Gottlob Leonhardi, welcher zu Leipzig für die Jahre 1794 bis 1797 herausgekommen iſt, und noch fortgeſetzt wird. F. G. Leonhardis Magazin für das Forſt- und Jagdweſen ꝛc. Leipz. 1797. 1-3r Heft.

Außer dieſen angeführten Schriften findet man über dieſe Materie alles, was brauchbar und nützlich iſt, in den v. Burgsdorfiſchen, Hennertſchen u. a. Forſtſchriften.

§. 54.

Aufgabe.

Ein Revier ſeinem Flächeninhalte nach unter gewiſſe Gehaue oder Schläge zu ſetzen und zu berechnen.

Auflöſung.

Das in Schläge oder Gehaue zu ſetzende Revier ſei mit Holz beſtanden, denn Blößen, Wieſen, Felder ꝛc. ſind leer oder von Holz entblößt, und können folglich nicht mit unter die Anzahl der Gehaue gerechnet werden.

Man berechne demnach, nachdem das ganze Revier gehörig aufgenommen, zu Papiere gebracht und berechnet worden, die auf dem Reviere befindlichen Blößen, Wieſen, Seen, Teiche, Felder ꝛc., insbeſondere, und bringe den Inhalt der genannten Stücke in eine Summe. Wird dieſe Summe vom Inhalte des ganzen Reviers ſubtrahiret, ſo bleibt der Inhalt des Theils vom Reviere übrig, der mit Holz beſtanden iſt.

Dieſen Flächeninhalt theile man nun durch die Zahl der Jahre, innerhalb welchen das Holz geſchlagen werden ſoll, und der Quotient giebt die Anzahl der Acker oder Morgen und Quadratruthen an, die auf ein Jahr zum Schlage kommen. Iſt die Anzahl der jährlich zu ſchlagenden Flächen nach Ruthenmaße gefunden worden, ſo macht man die Eintheilung des ganzen Reviers ſo, daß dabei die Sätze §. 51—53 befolgt werden. Diejenigen Gegenden des Forſts, wo Stangenholz und Dickig ſteht, verſpart man zu den letztern Gehauen. Das ſchlagbare Holz ſei das erſte, was man in Gehaue bringe. Auch ſehe man dahin, daß man die Gehaue nach den Weltgegenden (§. 32) beſtimme

ſtimme und befolge bei der Breite die Regeln, welche §. 51 angeführt worden ſind.

Als Beiſpiel ein Revier in Gehaue einzutheilen diene das aufgenommene und bereits berechnete Freudenberger Revier, wie es Tab. V. des praktiſchen Theils abgebildet enthält.

Man berechne daher zuerſt die holzleeren Gegenden, und man findet auf dieſem Reviere:

1) eine Blöße. Dieſe hat in ihrem Inhalte folgende Dreiecke und Vierecke nach Tab. IV. des praktiſchen Theils.

a) Das △ aed; Grundlinie ad = 214′; Höhe = 50′.

$$\begin{array}{r} 214 \\ 25 = \tfrac{1}{2}\,(50). \\ \hline 1070 \\ 428 \\ \hline 5350 \end{array}$$ Quadratfuß Inhalt.

b) Das □ abcd; Diagonallinie ac = 228′; Höhen = 150′ und 130′

$$150 + 130$$

$$\tfrac{1}{2}(280) = 140$$

$$\begin{array}{r} 228 \\ 140 \\ \hline 9120 \\ 228 \\ \hline 31920 \end{array}$$ Quadratfuß Inhalt

5350 — Inhalt des △ aed

37270 Quadratfuß oder

372 Quadratruthen 70 Quadratfuß = Inhalt der Blöße abcde.

2) Eine See. Dieſe enthält nach Tab. IV. des prakt. Theils:

a) Das △ abc; Grundlinie ac = 125′; Höhe = 44′.

$$\begin{array}{r} 125 \\ 22 = \tfrac{1}{2}\,(44) \\ \hline 250 \\ 250 \\ \hline 2750 \end{array}$$ Quadratfuß Inhalt.

b) Das △ def; Grundlinie de = 150′; Höhe = 65′.

$$\begin{array}{r} 65 \\ 75 = \tfrac{1}{2}\,(150) \\ \hline 325 \\ 455 \\ \hline 4875 \end{array}$$ Quadratfuß Inhalt.

c) Das □ acde; Diagonallinie dc = 240′; Höhen = 110′ und 132′.

$$\underbrace{110 + 132}_{242}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ 120 = \tfrac{1}{2}\,(240) \\ \hline 4840 \\ 242 \\ \hline 29040 \end{array}$$ Quadratfuß Inhalt.

Alle drei Flächen zuſammen genommen betragen

das △ abc	=	2750
— def	=	4875
das □ acde	=	29040
		36665 Quadratfuß,

oder 366 Quadratruthen, 65 Quadratfuß = Inhalt der See abcdef.

3) Eine

3) Eine Wieſe. Dieſe enthält nach Tab. IV. des praktiſchen Theils:

a) Das □ abcd; Diagonallinie ac = 130′; Höhen = 25′ und 120′.

$$\underbrace{25 + 120}_{}$$

```
  145
   65 = ½ (130)
 ----
  725
 870
 ----
 9425 Quadratfuß Inhalt.
```

b) Das □ cdef; Diagonallinie de = 272′; Höhen = 141′ und 90′.

$$\underbrace{141 + 90}_{}$$

```
   231
   136 = ½ (272)
  ----
  1386
  693
 231
 -----
 31416 Quadratfuß Inhalt.
```

c) Das □ efgh; Diagonallinie eh = 114′; Höhen = 38′ und 48′.

$$\underbrace{38 + 48}_{}$$

```
   86
   57 = ½ (114)
  ---
  602
 430
 ----
 4902 Quadratfuß Inhalt.
```

Dieſe betragen zuſammen genommen:

Das □	abcd	=	9425
—	cdef	=	31416
—	efgh	=	4902
			45743 Quadratfuß,

oder 457 Quadratruthen 43 Quadratfuß = Inhalt der Wieſe abcdefgh.

Der Inhalt dieſer drei auf dem Reviere befindlichen Stücke beträgt:

1) der Blöße	=	372° 70′
2) der See	=	366° 65′
3) der Wieſe	=	457° 43′
Zuſammen	=	1196° 78′.

Der Inhalt des Reviers war =	28797° 10′ (§. 48.)
Davon ſubtrahirt	1196 78
	27600° 32′.

Statt 27600° 32′ ſetzt man die runde Zahl 27600 Quadratruthen, die nun in Gehaue oder Schläge getheilt werden ſollen. Die Eintheilung ſoll ohne Rückſicht auf Schwarz- und Laubholz gemacht, ſondern alles gleich durch in ein hundertjähriges Gehau geſetzt werden. Bevor aber die Eintheilung vorgenommen werden kann, iſt noch folgendes zu merken.

Das Revier ſei zur Hälfte mit ſchlagbarem Holze und zur Hälfte mit Stangen, Dickig und mit neuem Anfluge beſtanden; man rechne daher 50 Jahre auf das ſchlagbare, und 50 Jahre auf das jetzt noch junge Holz. Die gereinigten Schläge werden entweder durch Saatbäume beſamet, oder förmlich beſäet, und werden in der Folge wieder zu ſolchem Holze, wie jetzt die Dickige und Stangen in der zweiten Hälfte des Reviers.

Gegenwärtige Dickige und Stangen, die der Holzſchlag nach 50 Jahren trift, ſind, wenn ſolche nach 100 Jah-

Jahren (von jetzt an) als ſchlagbares Holz abgeholzet worden, wieder neue Dickige und Stangen, wenn innerhalb dieſer Zeit der erſtere Anflug auch wieder als ſchlagbares Holz da ſtehet, wo jetzt geſchlagen werden ſoll. Kurz man kann nach dieſer Vorausſetzung ſichere Rechnung machen, daß es einem Reviere dieſer Art, bei einer ſolchen Behandlung, nie an tüchtigem Holze fehlen werde, weil die zu machenden Schläge nicht liegen bleiben, ſondern immer wieder angefangen werden.

Dividirt man nun zu dieſem Zwecke die mit Holz beſtandene Fläche des Reviers von 27600 Quadratruthen durch 100, ſo erhält man auf einen Theil 276 Quadratruthen. Dieſe 276 R^2 ſind die Anzahl der Ruthen welche von dieſem ganzen Reviere binnen Jahresfriſt vom Holze zu reinigen, und wiederum aufs neue zu beſaamen ſind.

Nun folgt die Eintheilung ſelbſt. Die Tab. V. auf dem Reviere gezeichnete Magnetnadel mit den übrigen Weltgegenden zeigt, wo das Gehau am vortheilhafteſten angelegt werden kann.

Nimmt man die Gegend von Südweſt, ſo kann man bei ih (Tab. V.) den Anfang machen.

Man ziehe von c nach i eine gerade Linie bis p, und vollende mit ih ein rechtwinkeliges Dreieck igh, deſſen Grundlinie ig = 300′ und die Höhe gh ebenfalls 100′ iſt; ſo hat man

300
5 0 = ½ (100)

15000 Quadratfuß, welche den Inhalt des Dreiecks igh ausmachen.

Nun ſoll aber das Gehaue 276 R^2 = 27600 F^2 betragen, folglich fehlen noch, weil 27600 — 15000 = 12600 iſt, 12600 Quadratfuß. Dieſe zieht man von dem anliegenden Vierecke ghpq, deſſen Breite gh = 100′ beträgt, ab, in-

indem man 12600 durch 100 dividirt. Der Quotient iſt 126 Fuß, welche die Länge eines Vierecks angeben, welches zu dem Dreiecke igh geſetzt werden muß, um die Fläche eines vollen Gehaues zu erhalten. Man trage demnach die Länge von 126′ aus g in f und ziehe mit gh eine Parallele fe, ſo iſt das Viereck ifeh das Ite Gehaue.

Fände man z. B., daß die anliegenden Birken mit ihrem jungen Anfluge eben kein ſonderliches Wachsthum zeigten, ſo ſetzt man an dieſes erſte ſogleich mit Parallellinien das zweite Gehau. Da das Trapez ferq, 100′ breit und der Inhalt eines Gehaues 27600 F^2 iſt, ſo iſt $27600 : 100 = 276$ Fuß die Länge. Trägt man dieſe Länge von 276 aus f nach r, und zieht rq mit fe parallel, ſo iſt das Viereck ferq das IIte Gehau.

Hierdurch iſt gleichſam der Weg gebahnt, auf dieſer Seite in das Revier mit den Holzſchlägen einzudringen. Man macht, ſo oft es nur möglich iſt, jeden Holzſchlag 138′ breit und 200′ lang, dies giebt 138 . 200 oder 27600 Quadratfuß für ein Gehau. Geſetzt nun, man findet im ſüdweſtlichen Theile des Reviers, oben nach Südoſt zu, ein Stangendickig mit neuem Anfluge und in gutem Wachsthume, ſo muß es bis nach 50 Jahren zum Schlagen geſparet werden. Dem ungeachtet kann man doch bei dem Trapez abcd anfangen, die Eintheilung zu machen, ob man gleich daſſelbe der folgenden Zeit vorbehalten muß, damit man mit deſto mehr Ordnung in den jetzt vorzunehmenden Gehauen fortfahren kann.

Man berechne demnach das Trapez abcd, deſſen Diagonallinie $bd = 107'$ iſt, die Höhen aber 40′ und 145′ betragen.

$$\begin{array}{r} 40 + 145 \\ \hline 185 \\ 107 \\ \hline 1295 \\ 185 \\ \hline 2)\ 19795 \end{array}$$ | 9897 Quadratfuß Inhalt.

Da nun 27600′ — 9897 = 17703′ ſo muß noch ſo viel zugeſetzt werden, um ein völliges Gehau zu erhalten. Dividirt man mit 138′ als der Breite des Gehaues, ſo erhält man die Länge von $128\frac{13}{46}$ Fuß. Mißt man dieſe Länge auf ci ab und zieht st parallel mit bc, ſo giebt das Fünfeck astcd den Inhalt eines Gehaues, welches erſt nach 69 Jahren abgeholzet werden ſoll. Nun kann man auf der Linie cp fortgehen, zwiſchen den Parallelen immer 200 abmeſſen, und die Theilungslinien mit st parallel ziehen, ſo erhält man in dieſer Folge, ohne weitere Rechnung das IIIte, IVte, Vte, VIte Gehau.

Das bei den Birken auf der Linie cp gebliebene rechtwinkelige Dreieck, qrp vom zweiten Gehaue, deſſen Grundlinie rp = 140′ und deſſen Höhe rq = 100′ mißt, hat an Inhalt 70000 Quadratfuß. Hierzu nehme man das Dreieck upa, deſſen Grundlinie up = 120′ und Höhe 53′ iſt, folglich einen Inhalt von 3180 Quadratfuß hat, und man erhält in beiden zuſammen 10180 Quadratfuß. 27600 — 10180 giebt 17420′; 17420 : 200 aber, giebt $87\frac{1}{10}$ Fuß zur Breite, welche man auf pu in c aufträgt und mit pr eine Parallele zieht. Demnach giebt die Fläche ucderpqa das VIIte Gehau, und das □ ufdi = 10180 F² bleibt noch zum folgenden Gehaue übrig, und ſchützt zugleich einigermaßen die ſchon abgetriebenen Gehaue gegen die nordweſtlichen Sturmwinde.

Nun nimmt man die Linie au, und zieht mit ihr eine Parallele von 138 Fuß Breite. Man meſſe auf derſelben,

wie vorhin, 200′ Länge für jedes Gehau ab, ſo kann man in den Stangen das Viereck mnsa, welches erſt im 70ſten Jahre abgetrieben wird, angeben. Das Viereck, nsfg aber, welches 44′ breit und 138′ lang iſt, alſo 6072′ Inhalt hat, bleibt bis zur Berechnung des 71ſten Gehau̇es. Hieher aber gehört das Viereck fgux, deſſen Länge 138′ und Breite 66′ iſt, und folglich an Inhalt 9108 Quadratfuß beträgt. Ferner gehört auch hierher das Dreieck aub über der See, deſſen Grundlinie ab = 86′ und Breite = 46′ iſt, ſo wie das Dreieck bxc von eben denſelben Abmeſſungen. Demnach betragen beide Dreiecke zuſammen genommen an Inhalt 3956 Quadratfuß. Weiter gehört hierher, das Dreieck dyf unter der See, deſſen Grundlinie df = 110′, und die Höhe = 48′, ſo wie das Dreieck fze, deſſen Grundlinie fe = 85′ und Höhe 33′ beträgt. Beider Inhalt macht zuſammen 4042 Quadratfuß. Nun iſt aber 9108 + 3956 + 4042 = 17106 Quadratfuß.

Nun iſt 27600 — 17106 = 10494 Quadratfuß, welche von dem anliegenden Holze noch weggenommen werden müſſen, um das geſuchte Gehau voll zu erhalten. Man ſetze 10494 dividirt durch 138, als der Breite des Gehaus, und man erhält zur Länge des noch zuzuſetzenden Stücks zx = $76\frac{11}{66}$ Fuß, welche mit yz parallel gezogen, das VIIIte Gehau in dem Vierecke fgax um die See herum einſchließen. Mißt man 200 Fuß neben dem vorigen, ſo ergiebt ſich das IXte Gehau von ſelbſt.

Zu dem zehnten Gehaue kommt das Viereck fudi, welches 10180 F^2 hält, und das Dreieck abu, worin die Grundlinie ab = 68′ und die Höhe 50′, und deſſen Inhalt 1700 F^2 beträgt. Nun giebt 10180 + 1700 = 11880 F^2, welche von 27600 F^2 abgezogen, noch einen Reſt von 15720 F^2 anzeigen, der, wenn man mit 200′ dividirt, $78\frac{3}{5}$ Breite verlangt. Mißt man dieſe aus h in i, und zieht ia mit hb parallel, ſo wird aus der Fläche

aihfdcn

aihfdcu das Xte Gehau. Das Viereck vlia in dieſer Gegend, von 200′ Länge und 60′ Breite und 12000 F^2 Inhalt, bleibt zu den folgenden Gehauen.

Hierauf folgt die Theilungslinie mv, auf welcher man nunmehr die Gehaue eintheilt und abmißt, wenn vorher mit ihr die Linie kw, in 138′ Breite, parallel gezogen wird. Zwiſchen dieſen Parallelen findet ſich das Dreieck klm, deſſen Grundlinie kl = 138′ und die Höhe ml = 100′ und folglich der Inhalt 6900 F^2 ausmacht. Dazu kommt das Viereck nsfg, deſſen Inhalt 6072 F^2 beträgt. Beide zuſammen geben 12972 F^2 Fläche; ſubtrahirt man dieſe von 27600, ſo iſt der noch fehlende Reſt 14628 F^2. 14628 dividirt durch 138, als der Breite des Gehaues, giebt $114\frac{15}{23}$ Fuß Länge, welche auf der Linie mv aufgetragen werden müſſen, nämlich aus l in n. Nun ziehe man on ≠ mit kl. Damit aber das Viereck nsfg mit ſeinem Gehaue abgeſchlagen werden kann, ſo mißt man nf und trägt das gefundene Maß aus o in p, und zieht aus p in f eine Diagonallinie durch on, ſo trift dieſe q, und es ſind die gegenüberſtehenden Dreiecke gleich groß. Auf dieſe Art hat man das 71ſte Gehau im Dickig auf kommende Jahre verſparet. Zu dieſem kommt noch das Dreieck kmll, deſſen Höhe km = 268′ und deſſen Grundlinie llm = 62′, und folglich der Inhalt, 8308 F^2 iſt; ferner das Dreieck fnp, worin nf = 138′, pn = 90′ und deſſen Inhalt 6210 F^2 beträgt.

Hierauf nimmt man das Dreieck fnm, worin nf = 138, nm = 110′ und deſſen Inhalt 7590 F^2 iſt. Summirt man dieſe drei Flächen, ſo erhält man 22108 Quadratfuße; ſubtrahirt man ſolche von 27600, ſo iſt der noch zum vollen Gehaue gehörige Reſt 5492 F^2. Um dieſen Reſt hinzuzufügen, nehme man mf für die Grundlinie eines Dreiecks an, wozu die Höhe geſucht werden muß, damit der Inhalt 5492 F^2 werde. Nun iſt mf = 174′, die Hälfte = 87′, und es ſei 87′ die Grundlinie.

5492 : 87 = 63$\frac{11}{87}$' Höhe des Dreiecks. Mit dieſer Höhe zieht man auf mf eine Parallele, ſo wird dieſe mv in u durchſchneiden, und den Punkt angeben, wo das Dreieck fmu geſchloſſen und dadurch das letzte in dieſem Stangendickig gelegene Gehau beſtimmt wird, welches erſt nach 72 Jahren geſchlagen werden kann.

Zwiſchen mv und kw aber ſetzt man die Gehaue fort, und nimmt das Dreieck mou, darin mo = 138', uo aber 36', und alſo der Inhalt 2484 F² iſt. Dieſe von 27600 ſubtrahirt, ſo iſt der Reſt 25116 F². Dividirt man dieſen Reſt mit 138', ſo bekommt man die Länge 182', die aus o in d abgemeſſen wird. ed zieht man parallel mit mo und das Viereck mude giebt das XIte Gehau. Nach dieſem kann man in der Ordnung das XIIte, XIIIte und XIVte Gehau abmeſſen.

Auf der Linie kw geht man nun fort zu den folgenden Gehauen. Im Viereck, llmon iſt llo = 128' und die Höhen ſind 64' und 46'.

Das Viereck noxy, welches zwiſchen Parallelen liegt, hat no = 80, xy = 136' und zur Höhe ox = 35'. Berechnet man beide Vierecke und addirt die Inhalte zuſammen, ſo erhält man 10820 F². Werden dieſe von 27600 ſubtrahirt, ſo fehlen noch zum Gehau 16780 F². Dividirt man dieſe Zahl mit 138', ſo bekommt man 121$\frac{41}{69}$ Fuß Länge, welche von x nach z abgemeſſen werden müſſen. Zieht man nun z mit yx parallel, ſo entſteht das XVte Gehau. Nach dieſem findet man ohne Schwierigkeit das XVIte und XVIIte Gehau.

Zum folgenden Gehaue kommt das Viereck abcw, darin ab = 62', cb = 206, und aw = 217' iſt. Die Fläche beträgt 13113 F², welche von 27600 ſubtrahirt, den Reſt 14487 F² giebt, welche man von dwxe wegnehmen, und dem Viereck abcw hinzuſetzen muß. Man mißt zu dieſer Abſicht dw = 130', dividirt damit in

14487, und erhält $111\frac{57}{130}$ Fuß, welche von d nach e abgemeſſen, und dem Gehau zugeſchlagen werden; demnach giebt die Fläche abcied das XVIIIte Gehau.

Die folgende Reihe von Gehauen fängt man oben bei dem Dreiecke abc an, worin ac = 138′, und die Höhe 20′ iſt; demnach beträgt die Fläche 1380 F^2. Im Dreieck bcy iſt by = 53′ und die Höhe 46′, der Inhalt aber 219 F^2. Beide Dreiecke geben 2599 F^2 Flächen. Dieſe von 27600 ſubtrahirt, und der Reſt iſt 25001 F^2. Dividirt man dieſen durch 138′, ſo bekommt man $180\frac{61}{138}$ Fuß zur Länge, welche von c nach d abgemeſſen und mit ac parallel gezogen wird. Dieſe Fläche iſt das XIXte Gehau. Das XXte Gehau ergiebt ſich von ſelbſt, wenn man die Länge 200 Fuß groß macht.

Das Viereck egix am 18ten Gehaue hat die Parallelen ex = 150′, gi = 140′ als Seiten, und eg = 30′ zur Höhe, demnach iſt der Inhalt 4350 F^2. Dieſe müſſen von h nach e, in k abgetheilt werden. Dividirt man nun 4350 durch 138, ſo erhält man $31\frac{12}{23}$ Fuß. Mißt man dieſe von h bis k und zieht mit mn eine Parallele lk, ſo entſteht das XXIte Gehau.

In der folgenden Reihe oben trift man das Dreieck def und fga. In def iſt ef = 138′, de = 8′ und folglich die Fläche 152 F^2. In fga aber fg = 100′, ag = 13′ und die Fläche 650 F^2. Beide zuſammen geben 802 F^2. Werden dieſe von 27600 ſubtrahirt, ſo fehlen noch 26798 F^2. Dividirt man in dieſe Zahl mit 138, ſo bekommt man $197\frac{2}{23}$ Fuß Länge, welche von g bis i abgemeſſen wird. So ergiebt ſich das XXIIte Gehau; das XXIIIte Gehau aber folgt von ſelbſt.

Das folgende Gehau ſtößt abermals an Stangen und Dickig von beſonders ſchönem Wuchſe, die bis in kommende Zeiten zu ſchlagbarem Holze verſparet werden ſollen. Daher mißt

mißt man dieſe, ſo viel möglich dem Dickig unbeſchadet, heraus.

Hier findet man zunächſt das Viereck lkxz, worin die Diagonallinie zk = 172′, die Höhen aber 82′ und 50′ betragen. Die Flächen derſelben ſind 11352 F^2. Zieht man dieſe Zahl von 27600 ab, ſo iſt der Reſt 16248 F^2. Wird mit 138 dividirt, ſo iſt der Quotient $117\frac{51}{69}$ Fuß die Länge, welche aus r bis p abgemeſſen, und mit rt parallel gezogen wird, wodurch man po und dadurch das Quadrat oprt erhält, deſſen Inhalt 16248 F^2 beträgt. Da dieſes Quadrat aber ſchon ſtark in das Dickig einfällt, und mit dem vorigen Viereck, deſſen Inhalt 11352 F^2 war, ein Gehau machet, nicht zuſammen hängt, ſo mißt man lz, und trägt das Maß aus p in s, und zieht die Diagonallinie sz, ſo wird das Dreieck qlz = △ spq, das XXIVte Gehau unbeſchadet dem Dickig, nunmehr von tlkfxsr eingeſchloſſen.

Nun geht man zur folgenden Reihe. Hier iſt das Dreieck hkd, worin kd = 138′ und hk = 20′ und der Inhalt 1380 F^2 beträgt. Wird dieſer von 27600 abgezogen, ſo bleiben noch 26220 F^2 welche mit 138′ dividirt, 190 Fuß Länge geben, die an dieſes Dreieck angeſetzt werden muß, um ein volles Gehau zu erhalten. Man mißt demnach aus k in l und zieht eine Parallellinie mit kd, ſo giebt ſolche das XXVte Gehau zu welchem das XXVIte Gehau bald nachgezogen werden kann.

Nun kommt man dem aufzuſparenden Dickig näher. Man meſſe an demſelben das Dreieck suz, worin su = 332′, und die Höhe 138′ iſt, folglich beträgt deſſen Fläche 22908 F^2, welche von 27600 ſubtrahirt, einen Reſt von 4692 F^2 laſſen. Dieſen dividirt man durch 138′, ſo bekommt man 34′ Länge. Dieſe 34′ mißt man aus t in u, und zieht auch hier eine Diagonallinie tv, ſo ſchließt ſolche in dieſem Dickig, für die folgende Zeit, das 73ſte Gehau ein.

Hier-

Hierauf mißt man das △ txu, darin xv = 138′, tx = 7′ und die Fläche 5382′ iſt. Dieſe Zahl von 27600 abgezogen, giebt 22218 F^2 Reſt, der durch 138′ dividirt, 161′ Länge giebt. Trägt man ſolche aus x in y, ſo kann man damit das 74ſte Gehau ſchließen, und zur folgenden Reihe gehen.

Im Dreleck mno, iſt no = 70′, mn = 60′ und der Inhalt beträgt 2100 F^2. Ferner im Dreieck poh, iſt ph = 76′, die Höhe 8′ und der Inhalt 304 F^2; beide Flächen zuſammen genommen aber 2404 F^2, welche von 27600 ſubtrahirt, den Reſt 25196 F^2 laſſen. Wird dieſer durch 138′ dividirt, ſo erhält man eine Länge von $182\frac{40}{69}$ Fuß, die von n bis s abgemeſſen und mit nh parallel gezogen wird, welches das XXVIIte Gehau giebt. Das folgende 28ſte Gehau langt nach ſeiner ordentlichen Breite und Länge ins Dickig mit dem Dreiecke abc, welches noch geſparet werden ſoll Demnach macht man auf der andern Seite des ſchlagbaren Holzes ein andres Dreieck cta dem vorigen gleich, und zieht die Diagonallinie au, ſo ſchließt ſich das XXVIIIte Gehau in saud ein, bei welchem zugleich das 76ſte und 77te Gehau in dem Dickig angemerkt werden kann, wie man aus der Zeichnung deutlich ſieht.

Hierauf geht man weiter zur folgenden Reihe. Hier findet ſich das Dreieck abc, worin cb = 172′, ac aber 94′ iſt, folglich hat es an Flächeninhalt 8084 F^2. Ferner liegt darneben das Viereck cbde, worin cb = 172′, de = 110′ und cd = 64′ iſt; daher beträgt die Fläche 9024 F^2. Endlich iſt im Viereck defm, de = 110′, fm = 138′ und df = 30′, folglich die Fläche 3720 F^2. Addirt man dieſe drei Flächen zuſammen, ſo hat man 20828 F^2. Werden dieſe von 27600 abgezogen, ſo iſt der Reſt 6772 F^2, welcher durch 138′ dividirt, eine Länge von $49\frac{5}{69}$ Fuß angiebt, die den vorigen Flächen zugeſetzt werden müſſen, um das XXIXte Gehau zu erhalten.

Da

Da in das XXXſte Gehau ein Viereck von der Wieſe fällt, ſo muß daſſelbe berechnet werden, und man ſetzt ſeinen Inhalt = 4000 F^2 dem Inhalte eines Gehaues zu, und erhält 31600 F^2. Wird dieſe Zahl durch 138′ dividirt, ſo giebt der Quotient 228$\frac{6}{23}$ Fuß Länge, die in dieſem Falle vom 30ſten Gehau ſubtrahirt werden muß. Zu gleicher Zeit kann man auch in dieſer Gegend in ſchlagbarem Holze das XXXIſte und im Stangendickige das 78ſte und 79ſte Gehau beſtimmen.

Da aber bei dem letztern das Dreieck abc, worin be = 138′, ab = 40′, und das Dreieck, worin dc = 30′, und die Höhe 38′ beträgt, erſetzt werden muß, ſo berechnet man beide, und erhält 3230 F^2. Dieſen ſchlägt man auf der Linie af in einem Dreiecke dem Gehaue zu, damit es ſeine beſtimmte Größe erhalte. Dividirt man zu dieſer Abſicht 3230 durch fa = 145, ſo bekommt man des Dreiecks Höhe in 22$\frac{8}{29}$ Fuß.

Auf dieſe Art fährt man fort, das ganze Revier in Gehaue zu ſchlagen, und man erhält die Eintheilung wie in der Zeichnung Tab. V. Hierbei iſt nur zu bemerken, daß das 33, 35, 38, 42, 43, 46 und 49ſte Gehau, ſo wie das 30ſte; das 32, 34, 37, 39, 41 und 52te aber, wie das 25ſte; das 57 und 63ſte aber, wie das 69ſte, und die gegen Nordweſt gelegenen Gehaue, wie die vorhergehenden, ebenfalls daſelbſt gelegenen Gehaue eingerichtet und berechnet werden müſſen.

Im Ganzen aber wird man aus dieſem Anfange der Eintheilung in Gehaue zur Genüge erſehen, wie man in dem gegenwärtigen Falle, und in andern ähnlichen verfahren müſſe, um Waldungen und Forſte in Gehaue oder Schläge zu bringen.

Allge-

Allgemeine Anmerkung
über die
Eintheilung in Gehaue oder Schläge.

Da die Eintheilung der Forſten in Gehaue auf verſchiedenen angenommnen Prinzipien beruhet, die aus der Erfahrung genommen ſind, durch Lokalumſtände verändert werden, und in Länder- und Provinzialforſtordnungen enthalten, folglich jedem Forſtwirthe an Ort und Stelle bekannt ſind; ſo wäre es überflüſſig, hier die Verſchiedenheit derſelben aufzuſtellen, zu beurtheilen und alle Methoden vorzutragen, die in den verſchiedenen Ländern, Provinzen und an einzelnen Orten befolgt werden; auch würde hierzu der Raum mangeln, und die Ausführung gegen die Anlage der gegenwärtigen Forſtgeometrie laufen.

Um aber den angehenden Forſtwirth aufmerkſam zu machen, wird es nicht unnütz ſeyn, einige Schriften zu berühren, welche entweder in einzelnen Abtheilungen von der Schlageintheilung handeln, oder ganz eigen dieſem Geſchäfte gewidmet ſind.

Hieher gehören folgende:

Der dritte Abſchnitt in der Anweiſung zur Taxation der Forſten ꝛc. vom königl. preußiſch. geh. Forſt-Rathe C. W. Hennert. Iter Theil. Berlin und Stettin 1791. womit man folgende zwei Schriften von eben dem Verfaſſer verbinden muß: Beiträge zur Forſtwirthſchaft aus der praktiſchen Geometrie. Leipzig 1783, und Kurze Anweiſung zu einigen geometriſchen Hülfsmitteln, welche den Forſtbedienten in ſolchen Forſten, die in Schläge eingetheilt ſind, bei verſchiedenen Fällen nützlich und nothwendig ſeyn können. Berlin und Stettin 1789. In dieſen Abhandlungen hat der Verfaſſer ein Kreuzmaß zur Abſteckung rechter Winkel beſchrieben, welches aber derjenige entbeh-

ren kann, der ein Aſtrolabium oder eine Bouſſole beſitzt. Ferner das zweite Kapitel der Anleitung zur Forſtſchätzung und Flächeneintheilung in jährliche proportionale Schläge ꝛc. vom Forſtmeiſter Hrn. Wieſenhaver. Verbindet man hiermit das v. Burgsdorfiſche Forſthandbuch, ſo wird man in den Stand geſetzt, die für die Eintheilung der Forſten in Schläge, in den preußiſch. Staaten angenommenen Grundſätze vollſtändig zu überſehen und zu beurtheilen.

Die Gründe der allgemeinen und ſpeciellen Gehaubeſtimmung, ſo wie die der Schlageintheilung eines Waldes findet man in des Hrn. Prof. Joh. Leonh. Späths Anleitung die Mathematik und Phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen ꝛc. anzuwenden, §. 17. 18 und 19. wobei aber etwas mehr Arithmetik vorausgeſetzt wird, als man bei jedem Forſtoffizianten antreffen möchte.

Joh. Friedrich Häſelers Auflöſung einer Aufgabe aus der Forſtwiſſenſchaft, welche in die jährlichen Gehaue einſchlägt. Lemgo 1792. Die Aufgabe iſt durch Hülfe der Buchſtabenrechnung aufgelöſt. Hieher gehört auch: Die Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue, eine Rechnungsaufgabe, von Oppel. Freyberg 1760. Neueſte Auflage Dresden 1791. Anleitung zur Taxation und Eintheilung der Laubwaldungen. Von J. M. Reitter Stuttgardt 1794.

D. Joh. Jakob Trunks Praktiſche Forſttabellen ꝛc. Freyburg 1789. in Fol. worin unter andern auch von den Eintheilungen in Schläge gehandelt wird. v. Cancrin, von einem beſondern Holzbau ꝛc. Eintheilung dieſer Waldungen in jährliche Gehaue. In deſſen vermiſchten meiſt ökon. Schriften. Riga 1786. XII.

Mehrere Abhandlungen ſtehen angezeigt und beurtheilt in Moſers Forſtarchive.

Drit-

Dritte Abtheilung.

Die angewandte Körpermeſſung
oder die
Stereometrie im Forſtweſen.

§. 55.

Die Kenntniſſe der Meſſung derjenigen Stücke, die zur Beſtimmung eines Körpers gehören, ſo wohl, als die Berechnung der Körper nach ihrem Inhalte, gehören zu den wichtigſten Erforderniſſen eines guten Förſters. Was ein Körper ſei, und welche Arten im Forſtweſen vorkommen, iſt bereits erklärt worden. Die Hauptgegenſtände in Waldungen und Forſten, ſind Körper, die in verſchiedenen Formen und Größen erſcheinen, und deren Inhalt man bald ganz, bald theilweiſe zu wiſſen verlangt. Alle auf den Forſtrevieren befindlichen Bäume werden zum Theil im Bauweſen, zum Theil zu Geräthen, zum Theil zur Feuerung angewandt, und nach dem verſchiedenen Gebrauche, der davon gemacht wird, wird auch ihre Größe berechnet und angegeben. So wie die Geſtalt eines Baumes durchs Beſchlagen, Zerſägen, Zerſpalten ꝛc. geändert wird, ſo ändert ſich auch die Art und Weiſe ſeinen Inhalt zu finden. Das Bau- und Nutzholz beſtimmt man gewöhnlich nach Kubikmaße, ſo wie das Feuerholz nach jedes Ortes Gewohnheit, bald in Schragen, Haufen, Klaftern und Maltern. Dieſe

letztern Formen gehören ſämmtlich in die Klaſſe der vier-eckigen Körper und laſſen ſich als ſolche berechnen. Iſt ihr Inhalt nach Kubikmaße beſtimmt, ſo kann es nicht ſchwer halten, dieſes Maß in andern Namen unter verſchiedenen Größen auszudrücken, wie die Fälle in der Ausübung auch immer nur vorkommen können.

I.

Vom körperlichen Inhalte einer Klafter, eines Malters und Sechszigers.

§. 56.

Eine Klafter Holz (§. 5.) iſt aus Scheiten zuſammengeſetzt, und bekommt die Form eines Würfels oder eines Balkenſtückes, je nachdem die Scheitlänge mit der Höhe und Breite des Ganzen einerlei iſt, oder nicht. Die zur Berechnung des körperlichen Inhalts der Klaftern nöthigen Regeln, ſind §. 153 und §. 155. (des theoret. Theils) gehörig entwickelt, und dürfen alſo hier nur angewendet werden.

§. 57.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer jeden Klafter Holz zu finden.

Auflöſung.

Es ſei die gegebene Klafter ein Würfel, 6 Fuß hoch, 6 Fuß breit, und die Scheitlänge betrage ebenfalls 6 Fuß.

Man kubire demnach ihre Seite, ſo iſt die Kubikzahl zugleich der Inhalt des Würfels.

$$6^3 = 6.6.6 = 216 \text{ Kubikfuß.}$$

Hier-

Hierbei muß man für die Ausübung noch folgendes bemerken: Wenn der Inhalt einer würfelförmigen Klafter 216 Kubikfuß beträgt, ſo zeigt dieſe Zahl an, daß die Klafter aus ſonſt nichts, als 216 Würfeln beſtehe, deren jeder 1 Fuß lang, breit, und hoch iſt, und ſich ſonſt nichts innerhalb des körperlichen Inhalts der Klafter befinde, das nicht zu ihr gehöre. Der Begriff von Zwiſchenräumen liegt alſo gar nicht in der Beſtimmung der Form und Größe einer Klafter. Da nun aber alle Holzſchichten aus geſchlagenen Stücken oder Scheiten zuſammengeſetzt werden, ſo iſt es nicht möglich, daß ſie ſo an einander ſchließen ſollten, daß nicht Lücken oder Zwiſchenräume entſtünden.

Dieſe Zwiſchenräume gehören demnach mit zum Inhalte einer Klafter Holz, und werden mit gemeſſen und berechnet.

Je kleiner nun die Scheite ſind, deſto mehr gehen auf eine Klafter, und deſto mehr Zwiſchenräume müſſen nothwendig in der Klafter entſtehen; je mehr aber eine Klafter Zwiſchenräume hat, deſto weniger muß ſie Holz enthalten. So auch im entgegengeſetzten Falle: Je dicker oder ſtärker die Scheite ſind, aus welchen eine Klafter zuſammengeſetzt wird, deſto weniger hat ſie Lücken oder Zwiſchenräume, und deſto mehr muß ſie Holz enthalten.

Um den wirklichen Inhalt einer Klafter an Holz auszumitteln, kann man folgenden Verſuch anſtellen:

Man läßt einige Stämme fällen, ſchneidet ſie in dreiellige oder ſechsfußige baumſtarke Stücke oder Klippel. Hierauf berechnet man den Inhalt derſelben, und zählet zugleich, wie viel man dergleichen Klippel zu einer Klafter nöthig gehabt habe. Alsdenn läßt man die im Inhalte der Klafter gefundenen baumſtarken Klippel in gewöhnliche Klafterholzſcheite zerſchneiden, und durch einen ordentlichen Holzſchläger in eine Klafter ſetzen, wie man

ſie zum gewöhnlichen Verkaufe aufſetzt. Iſt dies geſchehen, ſo werden ſicher einige von den berechneten Klippeln, oder wenigſtens einige ſtarke Scheite übrig bleiben. Das was übrig bleibt, berechnet man aufs neue nach körperlichem Inhalte in Kubikfußen oder Kubikzollen, und zieht dieſen zuletzt gefundenen Inhalt von dem Inhalte der Klafter in Kubikfußen und Kubikzollen ausgedrückt ab; dieſer letzte Reſt zeigt den weſentlichen Inhalt einer Klafter an Holz an.

Durch wirklich angeſtellte Verſuche hat man gefunden, daß zu einer ſechsfußigen Klafter Holz, 190 bis 200 Kubikfuß, nachdem die Scheite klein geſpalten oder ſtark gelaſſen worden, hat genommen werden müſſen. Nimmt man das Mittel der beiden Zahlen, nämlich $\frac{190+200}{2}$ oder 195 Kubikfuß zum körperlichen Inhalte einer Klafter Holz, deren Scheitlänge 6 Fuß beträgt, ſo geht man in jedem Falle ſicher.

Hieraus iſt klar, daß auf die Zwiſchenräume einer ſolchen Klafter, die 216 Kubikfuß geometriſchen Inhalt hat, 21 Kubikfuße Holz fehlen, die durch Zwiſchenräume erſetzt werden, und dem Verkäufer zu gute kommen.

Iſt alſo bekannt, wie viel eine 3 ellige oder 6 fußige Klafter Holz an ihrem körperlichen Inhalte durch ihre Zwiſchenräume (Klinſen) verliert; ſo kann es nicht ſchwer werden zu berechnen, wie viel jede Art von Holzklaftern verlieren muß. Oder, welches faſt mit jenem einerlei iſt, man kann die Frage aufwerfen: Wie viel eine jede andere Klafter, deren Scheitlänge bekannt iſt, eigentlich in Kubikfußen oder Kubikzollen an körperlichem Inhalte haben müſſe?

Nach dem erſten Satze darf man nur ſetzen: Eine Klafter Holz, welche 216 Kubikfuß Inhalt haben ſollte, ver-

verliert 21 Kubikfuß: was verliert eine Klafter, die z. B. 144 Kubikfuß Inhalt haben ſollte?

Nach dem zweiten Satze: Eine Klafter, deren Scheitlänge 6 Fuß iſt, hat im körperlichen Inhalte 195 Kubikfuße; wie groß wird der Inhalt einer Klafter Holz ſeyn, deren Scheitlänge z. B. 4 Fuß beträgt?

Zu n. 1. $216 : 21 = 144 : x$

und es iſt $x = \frac{144 \cdot 21}{216} = 14$ Kubikfuß Verluſt.

Zu n. 2. $6 : 195 = 4 : x$

und es iſt $x = \frac{195 \cdot 4}{6} = 130$ Kubikfuß Inhalt.

Zieht man den nach n. 1. gefundenen Verluſt von 14 Kubikfußen vom Inhalte 144 Kubikfuß ab, ſo bekommt man ebenfalls 130 Kubikfuß, welches mit dem Reſultate in n. 2. übereinſtimmt.

Nach dieſen Berechnungen hält eine Klafter Holz

deren	Scheitlänge	2 Fuß iſt, an	65 F^3	oder 65000 Z^3
—	—	2½	— — — 81¼	— — 81250 —
—	—	3	— — — 97½	— — 97500 —
—	—	3½	— — — 113¾	— — 113750 —
—	—	4	— — — 130	— — 130000 —
—	—	4½	— — — 146¼	— — 146250 —
—	—	5	— — — 162½	— — 162500 —
—	—	5½	— — — 178¾	— — 178750 —
—	—	6	— — — 195	— — 195000 —

Hierbei iſt noch folgende Bemerkung wichtig, nämlich: Das, was eine Klafter Holz an ihrem körperlichen Inhalte verliert, verliert ſie in allen Fällen an ihrer Fläche; denn die Länge der Scheite iſt ununterbrochen, und es findet an ihr nicht der geringſte Zwiſchenraum ſtatt. Daher iſt es

nöthig, die Frage näher zu unterſuchen und genauer zu beſtimmen: Wie groß der eigentliche oder weſentliche Flächeninhalt einer jeden Holzklafter ſei?

Nach §. 41. iſt der Flächen-Inhalt einer Holzklafter 36 Quadratfuß; folglich gehen bei einer 2 fußigen Klafter, die eigentlich 72 Kubikfuß halten ſollte, aber wirklich nur 65 Kubikfuß hält, 7 Kubikfuß verloren. Nun betragen aber 7 Kubikfuß $3\frac{1}{2}$ Scheitlänge, wenn man die Klafter der Länge nach 2 fußig ſetzt, folglich muß an der Fläche gerade hindurch $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß oder 350 Quadratzoll verloren gehen.

Oder:

Man nehme eine 4 fußige Klafter, ſo hält dieſe an ihrer Fläche ebenfalls 36 Quadratfuß (weil jede Klafter 6 Fuß hoch und 6 Fuß breit iſt). Ihr Inhalt ſollte 144 Kubikfuß ſeyn, iſt aber wirklich nur 130 Kubikfuß. Demnach hat eine ſolche Klafter 14 Kubikfuß Verluſt. Aus 14 Kubikfußen aber laſſen ſich $3\frac{1}{2}$ Scheitlänge von 4 Fuß legen, daher muß die Fläche der Klafter auch $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß, oder 350 Quadratzoll verlieren.

Zieht man dieſe Verluſt von 36 Quadratfuß ab, ſo behält man noch vom weſentlichen Flächeninhalte 3250 Quadratzolle. Oder dividirt man den ganzen körperlichen Inhalt einer Klafter Holz durch die Scheitlänge, ſo giebt das Produkt den Inhalt der Fläche.

Beiſpiel.

Eine 4 fußige Klafter hat 130 Kubikfuß Inhalt; wie groß iſt ihre Fläche?

4) 130 | 32,5; alſo $32\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

```
130 | 32,5
12
---
 10
  8
---
 20
 20
---
  0
```

Dieſe durch mehrere Erfahrungen beſtätigte Zahl, welche die wirkliche Fläche einer Klafter angiebt, ſoll in der Folge bei Berechnung der Klippel in Holzklaftern zum Grunde gelegt werden, um die Anzahl der Klaftern zu finden, die durchs Zerſpalten aus dem Klippelholze aufgeſetzt werden können.

§. 58.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines jeden Holzmalters zu finden.

Auflöſung.

Einige Arten von Maltern ſind §. 5. angeführt orden. Das Verhältniß des Malters zur Klafter iſt, wie oben erinnert worden, 9 zu 4, d. i. 9 Malter geben 4 Klaftern.

Würden nun 266 dergleichen Malter nach Klafterholze bezahlt und verrechnet, wieviel würden ſie in Klaftern betragen?

$$9 : 4 = 266 : x$$

und es iſt $x = \frac{4 \cdot 266}{9} = 118\frac{2}{9}$ Klaftern, von 4 Fuß Scheitlänge oder wie die Scheitlänge der Malter.

Wenn ein Malter einem Würfel gleicht, ſo hat man nur nöthig, um ſeinen Inhalt zu finden, die Seite deſſelben zu meſſen, und die Kubikzahl von der Zahl zu machen, welche das Maß der Seite ausdrückt. Demnach hält ein 4 fußiger Malter 64 Kubikfuß, denn 4 . 4 . 4 = 64.

Gleicht der Malter aber einem Balkenſtücke, ſo ſucht man ſeine Fläche (§. 42.), multiplicirt dieſe durch ſeine Länge, und man hat den Inhalt.

Wenn z. B. ein Malter Holz 3 Fuß hoch, 4 Fuß breit iſt, und $3\frac{1}{2}$ Fuß Scheitlänge hat; wie groß iſt ſein körperlicher Inhalt? 42 Kubikfuß; denn $3 . 4 = 12$; $12 . 3\frac{1}{2}$ aber $= 42\ F^3$ oder 42000 Kubikzoll.

Ferner: Wenn ein Malter 6 Fuß Höhe, 6 Fuß Breite und 45 Zoll Länge hat; wie groß iſt ſein Inhat? 81 Kubikfuß. Denn

$$3' . 6' . 45'' = 18' . 45'' = 81'000''.$$

Dieſer ſo gefundene Inhalt giebt, ſo wie bei den Klaftern, die Größe des Raums an, worin ſich der Holzmalter befindet, ohne daß man auf Zwiſchenräume ꝛc. Rückſicht nimmt. Da ſich nun bei den Holzmaltern eben ſo, wie bei den Klaftern, Zwiſchenräume finden, ſo muß auch bei den Maltern ihr wahrer Gehalt an Holz feſtgeſetzt werden.

Da der Verluſt der Klafter den Verluſt der Fläche derſelben betraf, ſo muß man auch bei den Maltern unterſuchen, wie viel an ihren Flächen verloren gehe, d. i. man muß den weſentlichen oder wirklichen Inhalt der Flächen zu beſtimmen ſuchen. Wird dieſer alsdenn mit der Länge des Malters multiplicirt, ſo giebt das Produkt den weſentlichen Inhalt des Malters. Setzt man zu dieſem Zwecke: 36 Quadratfuß Flächeninhalt einer Holzklafter leidet $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß $= 350''$ Verluſt, ſo kann man finden, wie groß der Verluſt eines gegebenen Malters an ſeiner Fläche ſei.

ſei. So findet man 16 Quadratfuße bei einem 4 fußigen; 12 wenn er 3′ hoch und 4′ breit iſt, und 18 Quadratfuß, wenn er 3′ hoch und 6′ breit iſt.

$$3600'' : 350'' = 1600'' : x$$

und es iſt $x = \frac{350 . 1600}{3600} = 155\frac{5}{9}$ Quadratzoll Verluſt.

Dieſen Verluſt ſubtrahirt man vom ganzen Flächeninhalte des Malters, d. i. hier von 1600, ſo erhält man 14 Quadratfuß und $44\frac{4}{9}$ Quadratzoll für den weſentlichen Inhalt des Malters. Multiplicirt man dieſen mit der Scheitlänge, nämlich mit 4′ oder 40″, ſo hat man $57\frac{7}{9}$ Kubikfuß für den körperlichen Inhalt: denn

$$\begin{array}{l} 1444\frac{4}{9}'' . 40'' \\ \hline 13000 \\ 40 \\ \hline 9)\ 520000 \mid 57'777\frac{7}{9}'' \end{array}$$

Ferner: $3600' : 350'' = 1200'' : x$

und es iſt $x = \frac{350 . 1200}{3600} = 116\frac{2}{3}$ Quadratzoll

$$\begin{array}{l} 1200'' \\ 116\frac{2}{3} \text{ ſubtrahirt} \\ \hline 1083\frac{1}{3} \end{array}$$

$1083\frac{1}{3}$ Quadratzoll, als die Fläche eines Malters von 3 Fuß Höhe und 4 Fuß Breite.

Multiplicirt man nun mit der Scheitlänge 35 Zoll, ſo iſt der körperliche Inhalt eines Malters $37916\frac{2}{3}$ Kubikzoll, oder $37\frac{11}{12}$ Kubikfuß.

Noch weiter: $36' : 350'' = 18' : x$

und es iſt $x = \frac{350 . 18}{36} = 175''$

1800

1800
175 ſubtrahirt

1625 Quadratzoll, als die Fläche eines Malters, der 3′ hoch und 6′ breit iſt. Dieſe Fläche mit der Scheitlänge von 45″ multiplicirt, giebt den körperlichen Inhalt des Malters = $73\frac{1}{8}$ Kubikfuß.

Nach dieſen Berechnungen, hat ein Malter von 4′ Höhe, 4′ Breite und 4′ Tiefe, $1444\frac{4}{9}$ Quadratzoll Fläche, und $57777\frac{7}{9}$ Kubikzoll, oder $57\frac{7}{9}$ Kubikfuß körperlichen Inhalt.

Ein Malter, von 3′ Breite, 4′ Höhe und 35″ Länge oder Tiefe, hält $1083\frac{1}{3}$ Quadratzoll in der Fläche, und $37916\frac{2}{3}$ Kubikzoll, oder $37\frac{11}{12}$ Kubikfuß im körperlichen Inhalte.

Ein Malter aber, der 3′ hoch, 6′ breit und 45″ lang iſt, hat eine 1625 Quadratzoll große Fläche, und ſein körperlicher Inhalt beträgt 73125 Kubikzoll oder $73\frac{1}{8}$ Kubikfuß.

Dieſe gefundenen Reſultate dienen dazu, das zu ſchlagende Holz, wenn es nach Kubikfußen berechnet wird, ſogleich nach Maltern zu beſtimmen.

§. 59.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Sechszigers zu finden.

Auflöſung.

Ein Sechsziger (§. 5.) faßt 3600 Scheitchen, welche 2′ lang, 2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll hoch oder dicke, und 3 bis $3\frac{1}{2}$ Zoll breit. Multiplicirt man die Höhe mit der Breite, ſo hat man die Fläche eines Sechszigers.

Es

Es ſei z. B. 2″ die Dicke und 3″ die Breite; da nun $2 . 3 = 6$, ſo iſt 6 Quadratzoll die Fläche eines Scheitchens; ſo auch, wenn $2\frac{1}{2}$″ die Dicke und $3\frac{1}{2}$″ die Breite, ſo iſt $2\frac{1}{2} . 3\frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$ Quadratzoll die Fläche.

Man nehme an, daß die angeführten Scheitchen zur Hälfte mit einander vermiſcht ſind, ſo hat man von der erſten Art 1800 Scheitchen, deren Fläche 6 Quadratzoll, und von der andern Art ebenfalls 1800 Scheitchen, deren Fläche $8\frac{3}{4}$ Quadratzoll beträgt. Multiplicirt man dieſe beiden Arten, jede mit einander, ſo erhält man

$$\begin{array}{r} 1800 . 6 \\ 6 \\ \hline 10800 \end{array} \text{ Quadratzoll Fläche} \qquad \begin{array}{r} 1800 \\ \hline 9000 \\ 7 \\ \hline 4)\ 63000 \end{array} . \begin{array}{l} 8\frac{3}{4} \\ \hline 35 = 5 . 7. \\ \\ \\ |\ 15750 \text{ Quadratzoll Fläche.} \end{array}$$

Addirt man beide Produkte, ſo erhält man 26550 Quadratzolle oder $265\frac{1}{2}$ Quadratfuß für die geſammte Fläche eines Sechszigers. Da nun ein Scheitchen eines Sechszigers 2 Fuß lang iſt, ſo folgt, daß der ganze körperliche Inhalt eines Sechszigers 531 Kubikfuß ſei.

$$\text{Denn } \begin{array}{r} 26550'' \\ 20 \\ \hline 531000, \end{array} \text{ d. i. 531 Kubikfuß.}$$

Sucht man nun das Verhältniß eines Sechszigers und einer Klafter, ſo dividire man den Sechsziger durch die Anzahl der Fuße einer Holzklafter, und der Quotient zeigt, wie viel Klaftern auf einen Sechsziger gerechnet werden müſſen.

So hat z. B. eine Klafter, deren Scheitlänge 4′ groß iſt, 130 Kubikfuß Inhalt; folglich gehen $130 . 531 = 4\frac{11}{130}$ oder 4 Klaftern und 11 Kubikfuß auf einen Sechsziger;

ziger; oder: ein Sechsziger Holz faßt eben ſo viel, als 4 Klaftern und 11 Kubikfuß, deren Scheitlänge 4 Fuß iſt, in ſich faſſen.

II.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Bäume.

§. 60.

Ein Baum gleicht im Ganzen einem Kegel, und kann auch als ein ſolcher berechnet werden §. 163. (des theoret. Theils). Soll indeß ein Baum zu Brenn- und Nutzholze gebraucht werden, ſo braucht man den Stamm nur bis zum Schopfe meſſen, wo derſelbe noch etwa 6 Zoll Durchmeſſer hat, denn das Uebrige nebſt den Zacken oder Aeſten wird zu den Klippel- oder Zackenklaftern geſchlagen, und daher ſelten zu dem weſentlichen Klaftergehalt gerechnet. In dieſer Geſtalt iſt der Baum beinahe ein abgekürzter Kegel, aber doch nicht völlig. Denn vom Stammende hinauf hat er, je nachdem er überhaupt hoch und ſtark iſt, gewöhnlich einige Ellen keine merkliche Abnahme in der Dicke, ſondern bleibt gleich ſtark. Oefters findet man dieſe gleiche Stärke an 6 bis 8 Ellen; daher iſt der Baum bis zu dieſer Höhe ein Cylinder oder eine Walze. Folglich iſt der Baum ſo betrachtet eigentlich ein Mittelding zwiſchen einem Cylinder und abgekürzten Kegel; demnach muß er ſo behandelt werden, daß man ſeinen obern und untern Durchmeſſer addirt, und aus der Summe die Hälfte als den Durchmeſſer der Grundfläche eines Cylinders nimmt, der mit dem Baum gleiche Höhe oder Länge hat. Dieſer Durchmeſſer mag in der Folge jederzeit der mittlere Durchmeſſer heißen (§. 33. 38.). Auf dieſe Art wird der ganze Baum beinah einer Walze oder einem Cylinder gleich, und kann folglich auch als ein ſolcher berechnet werden.

§. 61.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Baums zu finden.

Auflöſung.

1) Man meſſe den obern und untern Umfang des Baums, wenn der §. 60. erwähnte mittlere Durchmeſſer noch unbekannt iſt, und ſuche aus dieſer Peripherie ſo wohl den obern als auch den untern Durchmeſſer der Durchſchnittsflächen (§. 36.), und aus beiden den mittlern Durchmeſſer (§. 39.).

2) Nun berechne man aus dem mittlern Durchmeſſer den Durchſchnitt des Baums (§. 46.) in Quadratfußen oder Quadratzollen, je nachdem der Baum groß oder klein iſt. Multiplicirt man dieſe Durchſchnittsfläche oder Grundfläche des Baums mit ſeiner Länge, ſo erhält man den körperlichen Inhalt.

Wollte man den Inhalt des ganzen Baums, von ſeiner Grundfläche am Stammende, bis zur äußerſten Spitze haben, ſo müßte man denſelben nach §. 163 (des theoret. Theils) als einen Kegel berechnen, der ein Produkt iſt aus der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

Beiſpiel.

Der unterſte Umfang am Stammende des Baums ſei 7'8"5''' 785''', der oberſte Umfang aber am Schopf oder Zopf 1'2"6''' = 126''', und ſeine Länge 80'5" = 805" oder 8050'''.

Man ſchließe: $314 : 100 = 785'' : x$

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 785}{314} = 25''$ der untere Durchmeſſer.

$314 : 100 = 126'' : x$

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 126}{314} = 4''$ der obere Durchmeſſer.

Nun iſt $25 + 4 = 29''$; $\frac{29}{2} = 145'''$ der mittlere Durchmeſſer.

Oder:

Man addire beide Peripherien, halbire die Summe, und ſuche aus der einen Hälfte den Durchmeſſer, ſo iſt dieſer ebenfalls der mittlere Durchmeſſer. Z. B.

785'' die untere Peripherie
126'' — obere —

2) 911 | 4555''' halbe Summe der Peripherien.

$314 : 100 = 4555 : x$

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 4555}{314} = 145''$ der mittlere Durchmeſſer.

Den Inhalt der Fläche findet man nach §. 46.

$1000 : 785 = 145^2 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 145^2}{1000} = 16504$ Quadratlinien, oder $1\,F^2\,65\,Z^2\,4\,L^2$.

Der Inhalt ergiebt ſich aus dem Produkt der Grundfläche in die Höhe, alſo

16504 L^2 Inhalt der Grundfläche
8050 L^2 Höhe des Baums

825200
132032

132857200 Kubiklinien, oder
132 F^3 857 Z^3 200 L^3 körperl. Inhalt des Baums.

Anmer-

Anmerkung.

In den durch dieſe Rechnung gefundenen Reſultaten, kann man Brüche, welche unter einem halben Zolle betragen, weglaſſen, weil ſie in der Ausübung doch wenig zu bedeuten haben. Indeß darf man dieſe Abkürzungen vor den Rechnungen nicht vornehmen, weil man ſonſt zu kleine Reſultate erhält, die der Ausübung widerſprechen. Ueberhaupt müſſen die Umſtände hier mehr, als Regeln entſcheiden, und der Gebrauch kann die Mittel angeben, nach welchen man verfahren muß.

III.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc.

§. 62.

Begriffe von Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffsknieen ꝛc. zu geben, wäre überflüſſig; jeder Förſter lernt die körperl. Gegenſtände aus der Erfahrung kennen. Demnach folgt ſogleich die Beſtimmung des körperlichen Inhalts der genannten Holzſtücke.

§. 63.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer Welle, Nabe, Achſe, Schiffsbucht, eines Schiffskniees ꝛc. zu finden.

Auflöſung.

1) Wie groß iſt der Inhalt einer Mühlwelle, wenn ihr Durchmeſſer 42 Zoll, und ihre Länge 50 Fuß groß iſt?

Man berechne ſie wie einen Cylinder §. 159. (des theoret. Theils).

$$1000 : 785 = 42^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 42^2}{1000} = 138474'''$ oder $13 F^2\ 84 Z^2$ $74 L^2$ Inhalt der Grundfläche.

Die Länge beträgt 30′, d. i. 3000‴; alſo

$$\begin{array}{r} 138474'' \\ 3000''' \\ \hline 415422000''' \end{array}$$ oder

$415 F^3\ 422 Z^3$ körperlicher Inhalt der Welle.

2) Wie groß iſt der Inhalt einer Nabe von 18 Zoll im Durchmeſſer, und 22 Zoll Länge?

Man berechne ſie ebenfalls wie einen Cylinder.

$$1000 : 785 = 18^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 18^2}{1000} = 25434'''$ Inhalt der Grundfläche. Nun betragen 22 Zoll Länge 220 Linien, daher iſt

$$\begin{array}{r} 25434''' \\ 220''' \\ \hline 508680 \\ 50868 \\ \hline 5595480''' \end{array}$$, oder

$5 F^3\ 595 Z^3\ 480 L^3$ körperlicher Inhalt der Nabe.

3) Wie groß iſt der Inhalt einer Achſe, welche 10 Zoll Durchmeſſer und 9 Fuß, oder 90 Zoll Länge hat?

$$1000 : 785 = 10^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 100}{1000} = 7850'''$ Inhalt der Grundfläche.

7850'''
9 00''' Länge

7065000''' oder $7 F^3 65 Z^3$ körperlicher Inhalt der Achſe.

4) Wie groß iſt der Inhalt einer Schiffsbucht?

Eine Schiffsbucht iſt, nach den Begriffen im Forſtweſen, ein natürlich gebognes Eichenſtück, welches zwei Grundflächen hat, die entweder Quadrate oder längliche Quadrate ſind. Dieſer Körper wird als ein vollkommenes Balkenſtück berechnet, deſſen Grundfläche eine der beiden gleichen Grundflächen der Schiffsbucht, und deſſen Länge, die Länge der Schiffsbucht iſt, die man findet, wenn man die Krümmung längs der hohen Kante von einer Grundfläche zur andern mißt.

Wäre demnach die eine Grundfläche 272 Quadratzolle, und die Länge auf der hohen Kante hin betrüge 13' 4'', ſo wäre der körperliche Inhalt der Schiffsbucht:

$272 Z^2$
134 Z Länge

1088
816
272

36448 Kubikzolle, oder 36 Kubikfuß 448 Kubikzolle.

5) Wie groß iſt der Inhalt eines Schiffsniees?

Ein Schiffsniee iſt ein natürlich winklich gewachſenes Eichenſtück, welches entweder aus dem Stamm und einem ſtarken Aſte, oder aus dem Stamm und einer ſtarken Wurzel beſteht. Der ſtärkſte dieſer Theile heißt der Rumpf, und der ſchwächſte der Kopf. Den Rumpf

Da in das XXXſte Gehau ein Viereck von der Wieſe fällt, ſo muß daſſelbe berechnet werden, und man ſetzt ſeinen Inhalt = 4000 F^2 dem Inhalte eines Gehaues zu, und erhält 31600 F^2. Wird dieſe Zahl durch 138′ dividirt, ſo giebt der Quotient $228\frac{6}{23}$ Fuß Länge, die in dieſem Falle vom 30ſten Gehau ſubtrahirt werden muß. Zu gleicher Zeit kann man auch in dieſer Gegend in ſchlagbarem Holze das XXXIſte und im Stangendickige das 78ſte und 79ſte Gehau beſtimmen.

Da aber bei dem letztern das Dreieck abc, worin bc = 138′, ab = 40′, und das Dreieck, worin dc = 30′, und die Höhe 38′ beträgt, erſetzt werden muß, ſo berechnet man beide, und erhält 3230 F^2. Dieſen ſchlägt man auf der Linie af in einem Dreiecke dem Gehaue zu, damit es ſeine beſtimmte Größe erhalte. Dividirt man zu dieſer Abſicht 3230 durch fa = 145, ſo bekommt man des Dreiecks Höhe in $22\frac{8}{29}$ Fuß.

Auf dieſe Art fährt man fort, das ganze Revier in Gehaue zu ſchlagen, und man erhält die Eintheilung wie in der Zeichnung Tab. V. Hierbei iſt nur zu bemerken, daß das 33, 35, 38, 42, 43, 46 und 49ſte Gehau, ſo wie das 30ſte; das 32, 34, 37, 39, 41 und 52te aber, wie das 25ſte; das 57 und 63ſte aber, wie das 69ſte, und die gegen Nordweſt gelegenen Gehaue, wie die vorhergehenden, ebenfalls daſelbſt gelegenen Gehaue eingerichtet und berechnet werden müſſen.

Im Ganzen aber wird man aus dieſem Anfange der Eintheilung in Gehaue zur Genüge erſehen, wie man in dem gegenwärtigen Falle, und in andern ähnlichen verfahren müſſe, um Waldungen und Forſte in Gehaue oder Schläge zu bringen.

Allge-

Allgemeine Anmerkung über die Eintheilung in Gehaue oder Schläge.

Da die Eintheilung der Forſten in Gehaue auf verſchiedenen angenommnen Prinzipien beruhet, die aus der Erfahrung genommen ſind, durch Lokalumſtände verändert werden, und in Länder- und Provinzialforſtordnungen enthalten, folglich jedem Forſtwirthe an Ort und Stelle bekannt ſind; ſo wäre es überflüſſig, hier die Verſchiedenheit derſelben aufzuſtellen, zu beurtheilen und alle Methoden vorzutragen, die in den verſchiedenen Ländern, Provinzen und an einzelnen Orten befolgt werden; auch würde hierzu der Raum mangeln, und die Ausführung gegen die Anlage der gegenwärtigen Forſtgeometrie laufen.

Um aber den angehenden Forſtwirth aufmerkſam zu machen, wird es nicht unnütz ſeyn, einige Schriften zu berühren, welche entweder in einzelnen Abtheilungen von der Schlageintheilung handeln, oder ganz eigen dieſem Geſchäfte gewidmet ſind.

Hieher gehören folgende:

Der dritte Abſchnitt in der Anweiſung zur Taxation der Forſten ꝛc. vom königl. preußiſch. geh. Forſt-Rathe C. W. Hennert. Iter Theil. Berlin und Stettin 1791. womit man folgende zwei Schriften von eben dem Verfaſſer verbinden muß: Beiträge zur Forſtwirthſchaft aus der praktiſchen Geometrie. Leipzig 1783, und Kurze Anweiſung zu einigen geometriſchen Hülfsmitteln, welche den Forſtbedienten in ſolchen Forſten, die in Schläge eingetheilt ſind, bei verſchiedenen Fällen nützlich und nothwendig ſeyn können. Berlin und Stettin 1789. In dieſen Abhandlungen hat der Verfaſſer ein Kreuzmaß zur Abſteckung rechter Winkel beſchrieben, welches aber derjenige entbeh-

ren kann, der ein Aſtrolabium oder eine Bouſſole beſitzt. Ferner das zweite Kapitel der Anleitung zur Forſtſchätzung und Flächeneintheilung in jährliche proportionale Schläge ꝛc. vom Forſtmeiſter Hrn. Wieſenhaver. Verbindet man hiermit das v. Burgsdorfiſche Forſthandbuch, ſo wird man in den Stand geſetzt, die für die Eintheilung der Forſten in Schläge, in den preußiſch. Staaten angenommenen Grundſätze vollſtändig zu überſehen und zu beurtheilen.

Die Gründe der allgemeinen und ſpeciellen Gehaubeſtimmung, ſo wie die der Schlageintheilung eines Waldes findet man in des Hrn. Prof. Joh. Leonh. Späths Anleitung die Mathematik und Phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen ꝛc. anzuwenden, §. 17. 18 und 19. wobei aber etwas mehr Arithmetik vorausgeſetzt wird, als man bei jedem Forſtoffizianten antreffen möchte.

Joh. Friedrich Häſelers Auflöſung einer Aufgabe aus der Forſtwiſſenſchaft, welche in die jährlichen Gehaue einſchlägt. Lemgo 1792. Die Aufgabe iſt durch Hülfe der Buchſtabenrechnung aufgelöſt. Hieher gehört auch: Die Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue, eine Rechnungsaufgabe, von Oppel. Freyberg 1760. Neueſte Auflage Dresden 1791. Anleitung zur Taxation und Eintheilung der Laubwaldungen. Von J. M. Reitter Stuttgardt 1794.

D. Joh. Jakob Trunks Praktiſche Forſttabellen ꝛc. Freyburg 1789. in Fol. worin unter andern auch von den Eintheilungen in Schläge gehandelt wird. v. Cancrin, von einem beſondern Holzbau ꝛc. Eintheilung dieſer Waldungen in jährliche Gehaue. In deſſen vermiſchten meiſt ökon. Schriften. Riga 1786. XII.

Mehrere Abhandlungen ſtehen angezeigt und beurtheilt in Moſers Forſtarchive.

Dritte Abtheilung.

Die angewandte Körpermeſſung

oder die

Stereometrie im Forſtweſen.

§. 55.

Die Kenntniſſe der Meſſung derjenigen Stücke, die zur Beſtimmung eines Körpers gehören, ſo wohl, als die Berechnung der Körper nach ihrem Inhalte, gehören zu den wichtigſten Erforderniſſen eines guten Förſters. Was ein Körper ſei, und welche Arten im Forſtweſen vorkommen, iſt bereits erklärt worden. Die Hauptgegenſtände in Waldungen und Forſten, ſind Körper, die in verſchiedenen Formen und Größen erſcheinen, und deren Inhalt man bald ganz, bald theilweiſe zu wiſſen verlangt. Alle auf den Forſtrevieren befindlichen Bäume werden zum Theil im Bauweſen, zum Theil zu Geräthen, zum Theil zur Feuerung angewandt, und nach dem verſchiedenen Gebrauche, der davon gemacht wird, wird auch ihre Größe berechnet und angegeben. So wie die Geſtalt eines Baumes durchs Beſchlagen, Zerſägen, Zerſpalten ꝛc. geändert wird, ſo ändert ſich auch die Art und Weiſe ſeinen Inhalt zu finden. Das Bau- und Nutzholz beſtimmt man gewöhnlich nach Kubikmaße, ſo wie das Feuerholz nach jedes Ortes Gewohnheit, bald in Schragen, Haufen, Klaftern und Maltern. Dieſe

letztern Formen gehören ſämmtlich in die Klaſſe der vierſeckigen Körper und laſſen ſich als ſolche berechnen. Iſt ihr Inhalt nach Kubikmaße beſtimmt, ſo kann es nicht ſchwer halten, dieſes Maß in andern Namen unter verſchiedenen Größen auszudrücken, wie die Fälle in der Ausübung auch immer nur vorkommen können.

I.

Vom körperlichen Inhalte einer Klafter, eines Malters und Sechszigers.

§. 56.

Eine Klafter Holz (§. 5.) iſt aus Scheiten zuſammengeſetzt, und bekommt die Form eines Würfels oder eines Balkenſtückes, je nachdem die Scheitlänge mit der Höhe und Breite des Ganzen einerlei iſt, oder nicht. Die zur Berechnung des körperlichen Inhalts der Klaftern nöthigen Regeln, ſind §. 153 und §. 155. (des theoret. Theils) gehörig entwickelt, und dürfen alſo hier nur angewendet werden.

§. 57.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer jeden Klafter Holz zu finden.

Auflöſung.

Es ſei die gegebene Klafter ein Würfel, 6 Fuß hoch, 6 Fuß breit, und die Scheitlänge betrage ebenfalls 6 Fuß.

Man kubire demnach ihre Seite, ſo iſt die Kubikzahl zugleich der Inhalt des Würfels.

$6^3 = 6.6.6 = 216$ Kubikfuß.

Hier-

Hierbei muß man für die Ausübung noch folgendes bemerken: Wenn der Inhalt einer würfelförmigen Klafter 216 Kubikfuß beträgt, ſo zeigt dieſe Zahl an, daß die Klafter aus ſonſt nichts, als 216 Würfeln beſtehe, deren jeder 1 Fuß lang, breit, und hoch iſt, und ſich ſonſt nichts innerhalb des körperlichen Inhalts der Klafter befinde, das nicht zu ihr gehöre. Der Begriff von Zwiſchenräumen liegt alſo gar nicht in der Beſtimmung der Form und Größe einer Klafter. Da nun aber alle Holzſchichten aus geſchlagenen Stücken oder Scheiten zuſammengeſetzt werden, ſo iſt es nicht möglich, daß ſie ſo an einander ſchließen ſollten, daß nicht Lücken oder Zwiſchenräume entſtünden.

Dieſe Zwiſchenräume gehören demnach mit zum Inhalte einer Klafter Holz, und werden mit gemeſſen und berechnet.

Je kleiner nun die Scheite ſind, deſto mehr gehen auf eine Klafter, und deſto mehr Zwiſchenräume müſſen nothwendig in der Klafter entſtehen; je mehr aber eine Klafter Zwiſchenräume hat, deſto weniger muß ſie Holz enthalten. So auch im entgegengeſetzten Falle: Je dicker oder ſtärker die Scheite ſind, aus welchen eine Klafter zuſammengeſetzt wird, deſto weniger hat ſie Lücken oder Zwiſchenräume, und deſto mehr muß ſie Holz enthalten.

Um den **wirklichen Inhalt einer Klafter an Holz** auszumitteln, kann man folgenden Verſuch anſtellen:

Man läßt einige Stämme fällen, ſchneidet ſie in dreiellige oder ſechsfußige **baumſtarke** Stücke oder Klippel. Hierauf berechnet man den Inhalt derſelben, und zählet zugleich, wie viel man dergleichen Klippel zu einer Klafter nöthig gehabt habe. Alsdenn läßt man die im Inhalte der Klafter gefundenen baumſtarken Klippel in gewöhnliche Klafterholzſcheite zerſchneiden, und durch einen ordentlichen Holzſchläger in eine Klafter ſetzen, wie man

ſie zum gewöhnlichen Verkaufe aufſetzt. Iſt dies geſchehen, ſo werden ſicher einige von den berechneten Klippeln, oder wenigſtens einige ſtarke Scheite übrig bleiben. Das was übrig bleibt, berechnet man aufs neue nach körperlichem Inhalte in Kubikfußen oder Kubikzollen, und zieht dieſen zuletzt gefundenen Inhalt von dem Inhalte der Klafter in Kubikfußen und Kubikzollen ausgedrückt ab; dieſer letzte Reſt zeigt den weſentlichen Inhalt einer Klafter an Holz an.

Durch wirklich angeſtellte Verſuche hat man gefunden, daß zu einer ſechsfußigen Klafter Holz, 190 bis 200 Kubikfuß, nachdem die Scheite klein geſpalten oder ſtark gelaſſen worden, hat genommen werden müſſen. Nimmt man das Mittel der beiden Zahlen, nämlich $\frac{190+200}{2}$ oder 195 Kubikfuß zum körperlichen Inhalte einer Klafter Holz, deren Scheitlänge 6 Fuß beträgt, ſo geht man in jedem Falle ſicher.

Hieraus iſt klar, daß auf die Zwiſchenräume einer ſolchen Klafter, die 216 Kubikfuß geometriſchen Inhalt hat, 21 Kubikfuße Holz fehlen, die durch Zwiſchenräume erſetzt werden, und dem Verkäufer zu gute kommen.

Iſt alſo bekannt, wie viel eine 3 ellige oder 6 fußige Klafter Holz an ihrem körperlichen Inhalte durch ihre Zwiſchenräume (Klinſen) verliert; ſo kann es nicht ſchwer werden zu berechnen, wie viel jede Art von Holzklaftern verlieren muß. Oder, welches faſt mit jenem einerlei iſt, man kann die Frage aufwerfen: Wie viel eine jede andere Klafter, deren Scheitlänge bekannt iſt, eigentlich in Kubikfußen oder Kubikzollen an körperlichem Inhalte haben müſſe?

Nach dem erſten Satze darf man nur ſetzen: Eine Klafter Holz, welche 216 Kubikfuß Inhalt haben ſollte, ver-

verliert 21 Kubikfuß: was verliert eine Klafter, die z. B. 144 Kubikfuß Inhalt haben ſollte?

Nach dem zweiten Satze: Eine Klafter, deren Scheitlänge 6 Fuß iſt, hat im körperlichen Inhalte 195 Kubikfuße; wie groß wird der Inhalt einer Klafter Holz ſeyn, deren Scheitlänge z. B. 4 Fuß beträgt?

Zu n. 1. $216 : 21 = 144 : x$

und es iſt $x = \frac{144 \cdot 21}{216} = 14$ Kubikfuß Verluſt.

Zu n. 2. $6 : 195 = 4 : x$

und es iſt $x = \frac{195 \cdot 4}{6} = 130$ Kubikfuß Inhalt.

Zieht man den nach n. 1. gefundenen Verluſt von 14 Kubikfußen vom Inhalte 144 Kubikfuß ab, ſo bekommt man ebenfalls 130 Kubikfuß, welches mit dem Reſultate in n. 2. übereinſtimmt.

Nach dieſen Berechnungen hält eine Klafter Holz deren Scheitlänge 2 Fuß iſt, an 65 F^3 oder 65000 Z^3

—	—	$2\frac{1}{2}$	— — — $81\frac{1}{4}$	— — 81250	—
—	—	3	— — — $97\frac{1}{2}$	— — 97500	—
—	—	$3\frac{1}{2}$	— — — $113\frac{3}{4}$	— — 113750	—
—	—	4	— — — 130	— — 130000	—
—	—	$4\frac{1}{2}$	— — — $146\frac{1}{4}$	— — 146250	—
—	—	5	— — — $162\frac{1}{2}$	— — 162500	—
—	—	$5\frac{1}{2}$	— — — $178\frac{3}{4}$	— — 178750	—
—	—	6	— — — 195	— — 195000	—

Hierbei iſt noch folgende Bemerkung wichtig, nämlich: Das, was eine Klafter Holz an ihrem körperlichen Inhalte verliert, verliert ſie in allen Fällen an ihrer Fläche; denn die Länge der Scheite iſt ununterbrochen, und es findet an ihr nicht der geringſte Zwiſchenraum ſtatt. Daher iſt es

nöthig, die Frage näher zu unterſuchen und genauer zu beſtimmen: Wie groß der eigentliche oder weſentliche Flächeninhalt einer jeden Holzklafter ſei?

Nach §. 41. iſt der Flächen-Inhalt einer Holzklafter 36 Quadratfuß; ſolglich gehen bei einer 2 fußigen Klafter, die eigentlich 72 Kubikfuß halten ſollte, aber wirklich nur 65 Kubikfuß hält, 7 Kubikfuß verloren. Nun betragen aber 7 Kubikfuß $3\frac{1}{2}$ Scheitlänge, wenn man die Klafter der Länge nach 2 fußig ſetzt, folglich muß an der Fläche gerade hindurch $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß oder 350 Quadratzoll verloren gehen.

Oder:

Man nehme eine 4 fußige Klafter, ſo hält dieſe an ihrer Fläche ebenfalls 36 Quadratfuß (weil jede Klafter 6 Fuß hoch und 6 Fuß breit iſt). Ihr Inhalt ſollte 144 Kubikfuß ſeyn, iſt aber wirklich nur 130 Kubikfuß. Demnach hat eine ſolche Klafter 14 Kubikfuß Verluſt. Aus 14 Kubikfußen aber laſſen ſich $3\frac{1}{2}$ Scheitlänge von 4 Fuß legen, daher muß die Fläche der Klafter auch $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß, oder 350 Quadratzoll verlieren.

Zieht man dieſe Verluſt von 36 Quadratfuß ab, ſo behält man noch vom weſentlichen Flächeninhalte 3250 Quadratzolle. Oder dividirt man den ganzen körperlichen Inhalt einer Klafter Holz durch die Scheitlänge, ſo giebt das Produkt den Inhalt der Fläche.

Beiſpiel.

Eine 4 fußige Klafter hat 130 Kubikfuß Inhalt; wie groß iſt ihre Fläche?

4) 130

4) 130 | 32,5; alſo $32\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

```
130 | 32,5
12
---
 10
  8
---
  20
  20
---
   0
```

Dieſe durch mehrere Erfahrungen beſtätigte Zahl, welche die wirkliche Fläche einer Klafter angiebt, ſoll in der Folge bei Berechnung der Klippel in Holzklaftern zum Grunde gelegt werden, um die Anzahl der Klaftern zu finden, die durchs Zerſpalten aus dem Klippelholze aufgeſetzt werden können.

§. 58.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines jeden Holzmalters zu finden.

Auflöſung.

Einige Arten von Maltern ſind §. 5. angeführt orden. Das Verhältniß des Malters zur Klafter iſt, wie oben erinnert worden, 9 zu 4, d. i. 9 Malter geben 4 Klaftern.

Würden nun 266 dergleichen Malter nach Klafterholze bezahlt und verrechnet, wieviel würden ſie in Klaftern betragen?

$$9 : 4 = 266 : x$$

und es iſt $x = \frac{4 \cdot 266}{9} = 118\frac{2}{9}$ Klaftern, von 4 Fuß Scheitlänge oder wie die Scheitlänge der Malter.

Wenn ein Malter einem Würfel gleicht, ſo hat man nur nöthig, um ſeinen Inhalt zu finden, die Seite deſſelben zu meſſen, und die Kubikzahl von der Zahl zu machen, welche das Maß der Seite ausdrückt. Demnach hält ein 4 fußiger Malter 64 Kubikfuß, denn 4 . 4 . 4 = 64.

Gleicht der Malter aber einem Balkenſtücke, ſo ſucht man ſeine Fläche (§. 42.), multiplicirt dieſe durch ſeine Länge, und man hat den Inhalt.

Wenn z. B. ein Malter Holz 3 Fuß hoch, 4 Fuß breit iſt, und $3\frac{1}{2}$ Fuß Scheitlänge hat; wie groß iſt ſein körperlicher Inhalt? 42 Kubikfuß; denn 3 . 4 = 12; 12 . $3\frac{1}{2}$ aber = 42 F^3 oder 42000 Kubikzoll.

Ferner: Wenn ein Malter 6 Fuß Höhe, 6 Fuß Breite und 45 Zoll Länge hat; wie groß iſt ſein Inhat? 81 Kubikfuß. Denn

$$3' . 6' . 45'' = 18' . 45'' = 81'000''.$$

Dieſer ſo gefundene Inhalt giebt, ſo wie bei den Klaftern, die Größe des Raums an, worin ſich der Holzmalter befindet, ohne daß man auf Zwiſchenräume ꝛc. Rückſicht nimmt. Da ſich nun bei den Holzmaltern eben ſo, wie bei den Klaftern, Zwiſchenräume finden, ſo muß auch bei den Maltern ihr wahrer Gehalt an Holz feſtgeſetzt werden.

Da der Verluſt der Klafter den Verluſt der Fläche derſelben betraf, ſo muß man auch bei den Maltern unterſuchen, wie viel an ihren Flächen verloren gehe, d. i. man muß den weſentlichen oder wirklichen Inhalt der Flächen zu beſtimmen ſuchen. Wird dieſer alsdenn mit der Länge des Malters multiplicirt, ſo giebt das Produkt den weſentlichen Inhalt des Malters. Setzt man zu dieſem Zwecke: 36 Quadratfuß Flächeninhalt einer Holzklafter leidet $3\frac{1}{2}$ Quadratfuß = 350'' Verluſt, ſo kann man finden, wie groß der Verluſt eines gegebenen Malters an ſeiner Fläche

ſei. So findet man 16 Quadratfuße bei einem 4 fußigen; 12 wenn er 3′ hoch und 4′ breit iſt, und 18 Quadratfuß, wenn er 3′ hoch und 6′ breit iſt.

$$3600'' : 350'' = 1600'' : x$$

und es iſt $x = \frac{350 . 1600}{3600} = 155\frac{5}{9}$ Quadratzoll Verluſt.

Dieſen Verluſt ſubtrahirt man vom ganzen Flächeninhalte des Malters, d. i. hier von 1600, ſo erhält man 14 Quadratfuß und $44\frac{4}{9}$ Quadratzoll für den weſentlichen Inhalt des Malters. Multiplicirt man dieſen mit der Scheitlänge, nämlich mit 4′ oder 40″, ſo hat man $57\frac{7}{9}$ Kubikfuß für den körperlichen Inhalt: denn

$$\begin{array}{l} 1444\frac{4}{9}'' . 40'' \\ \hline 13000 \\ \quad 4 \quad 0 \\ \hline 9)\ 520000 \mid 57'777\frac{7}{9}'' \end{array}$$

Ferner: $3600' : 350'' = 1200'' : x$

und es iſt $x = \frac{350 . 1200}{3600} = 116\frac{2}{3}$ Quadratzoll

$$\begin{array}{l} 1200'' \\ \ \ 116\frac{2}{3} \text{ ſubtrahirt} \\ \hline \end{array}$$

$1083\frac{1}{3}$ Quadratzoll, als die Fläche eines Malters von 3 Fuß Höhe und 4 Fuß Breite.

Multiplicirt man nun mit der Scheitlänge 35 Zoll, ſo iſt der körperliche Inhalt eines Malters $37916\frac{2}{3}$ Kubikzoll, oder $37\frac{1}{12}$ Kubikfuß.

Noch weiter: $36' : 350'' = 18' : x$

und es iſt $x = \frac{350 . 18}{36} = 175''$

1800
175 ſubtrahirt

1625 Quadratzoll, als die Fläche eines Malters, der 3′ hoch und 6′ breit iſt. Dieſe Fläche mit der Scheitlänge von 45″ multiplicirt, giebt den körperlichen Inhalt des Malters = $73\frac{1}{8}$ Kubikfuß.

Nach dieſen Berechnungen, hat ein Malter von 4′ Höhe, 4′ Breite und 4′ Tiefe, $1444\frac{4}{9}$ Quadratzoll Fläche, und $57777\frac{7}{9}$ Kubikzoll, oder $57\frac{7}{9}$ Kubikfuß körperlichen Inhalt.

Ein Malter, von 3′ Breite, 4′ Höhe und 35″ Länge oder Tiefe, hält $1083\frac{1}{3}$ Quadratzoll in der Fläche, und $37916\frac{2}{3}$ Kubikzoll, oder $37\frac{11}{12}$ Kubikfuß im körperlichen Inhalte.

Ein Malter aber, der 3′ hoch, 6′ breit und 45″ lang iſt, hat eine 1625 Quadratzoll große Fläche, und ſein körperlicher Inhalt beträgt 73125 Kubikzoll oder $73\frac{1}{8}$ Kubikfuß.

Dieſe gefundenen Reſultate dienen dazu, das zu ſchlagende Holz, wenn es nach Kubikfußen berechnet wird, ſogleich nach Maltern zu beſtimmen.

§. 59.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Sechszigers zu finden.

Auflöſung.

Ein Sechsziger (§. 5.) faßt 3600 Scheitchen, welche 2′ lang, 2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll hoch oder dicke, und 3 bis $3\frac{1}{2}$ Zoll breit. Multiplicirt man die Höhe mit der Breite, ſo hat man die Fläche eines Sechszigers.

Es ſei z. B. $2''$ die Dicke und $3''$ die Breite; da nun $2 . 3 = 6$, ſo iſt 6 Quadratzoll die Fläche eines Scheitchens; ſo auch, wenn $2\frac{1}{2}''$ die Dicke und $3\frac{1}{2}''$ die Breite, ſo iſt $2\frac{1}{2} . 3\frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$ Quadratzoll die Fläche.

Man nehme an, daß die angeführten Scheitchen zur Hälfte mit einander vermiſcht ſind, ſo hat man von der erſten Art 1800 Scheitchen, deren Fläche 6 Quadratzoll, und von der andern Art ebenfalls 1800 Scheitchen, deren Fläche $8\frac{3}{4}$ Quadratzoll beträgt. Multiplicirt man dieſe beiden Arten, jede mit einander, ſo erhält man

1800 . 6
6
———
10800 Quadratzoll Fläche

1800 . $8\frac{3}{4}$
———
9000 . 35 = 5 . 7.
7
———
4) 63000 | 15750 Quadratzoll Fläche.

Addirt man beide Produkte, ſo erhält man 26550 Quadratzolle oder $265\frac{1}{2}$ Quadratfuß für die geſammte Fläche eines Sechszigers. Da nun ein Scheitchen eines Sechszigers 2 Fuß lang iſt, ſo folgt, daß der ganze körperliche Inhalt eines Sechszigers 531 Kubikfuß ſei.

Denn $26550''$
2 0
———
531000, d. i. 531 Kubikfuß.

Sucht man nun das Verhältniß eines Sechszigers und einer Klafter, ſo dividire man den Sechsziger durch die Anzahl der Fuße einer Holzklafter, und der Quotient zeigt, wie viel Klaftern auf einen Sechsziger gerechnet werden müſſen.

So hat z. B. eine Klafter, deren Scheitlänge $4'$ groß iſt, 130 Kubikfuß Inhalt; folglich gehen 130 . 531 $= 4\frac{11}{130}$ oder 4 Klaftern und 11 Kubikfuß auf einen Sechsziger;

ziger; oder: ein Sechsziger Holz faßt eben ſo viel, als 4 Klaftern und 11 Kubikfuß, deren Scheitlänge 4 Fuß iſt, in ſich faſſen.

II.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Bäume.

§. 60.

Ein Baum gleicht im Ganzen einem Kegel, und kann auch als ein ſolcher berechnet werden §. 163. (des theoret. Theils). Soll indeß ein Baum zu Brenn- und Nutzholze gebraucht werden, ſo braucht man den Stamm nur bis zum Schopfe meſſen, wo derſelbe noch etwa 6 Zoll Durchmeſſer hat, denn das Uebrige nebſt den Zacken oder Aeſten wird zu den Klippel- oder Zackenklaftern geſchlagen, und daher ſelten zu dem weſentlichen Klaftergehalt gerechnet. In dieſer Geſtalt iſt der Baum beinahe ein abgekürzter Kegel, aber doch nicht völlig. Denn vom Stammende hinauf hat er, je nachdem er überhaupt hoch und ſtark iſt, gewöhnlich einige Ellen keine merkliche Abnahme in der Dicke, ſondern bleibt gleich ſtark. Oefters findet man dieſe gleiche Stärke an 6 bis 8 Ellen; daher iſt der Baum bis zu dieſer Höhe ein Cylinder oder eine Walze. Folglich iſt der Baum ſo betrachtet eigentlich ein Mittelding zwiſchen einem Cylinder und abgekürzten Kegel; demnach muß er ſo behandelt werden, daß man ſeinen obern und untern Durchmeſſer addirt, und aus der Summe die Hälfte als den Durchmeſſer der Grundfläche eines Cylinders nimmt, der mit dem Baum gleiche Höhe oder Länge hat. Dieſer Durchmeſſer mag in der Folge jederzeit der mittlere Durchmeſſer heißen (§. 33. 38.). Auf dieſe Art wird der ganze Baum beinah einer Walze oder einem Cylinder gleich, und kann folglich auch als ein ſolcher berechnet werden.

§. 61.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Baums zu finden.

Auflöſung.

1) Man meſſe den obern und untern Umfang des Baums, wenn der §. 60. erwähnte mittlere Durchmeſſer noch unbekannt iſt, und ſuche aus dieſer Peripherie ſo wohl den obern als auch den untern Durchmeſſer der Durchſchnittsflächen (§. 36.), und aus beiden den mittlern Durchmeſſer (§. 39.).

2) Nun berechne man aus dem mittlern Durchmeſſer den Durchſchnitt des Baums (§. 46.) in Quadratfußen oder Quadratzollen, je nachdem der Baum groß oder klein iſt. Multiplicirt man dieſe Durchſchnittsfläche oder Grundfläche des Baums mit ſeiner Länge, ſo erhält man den körperlichen Inhalt.

Wollte man den Inhalt des ganzen Baums, von ſeiner Grundfläche am Stammende, bis zur äußerſten Spitze haben, ſo müßte man denſelben nach §. 163 (des theoret. Theils) als einen Kegel berechnen, der ein Produkt iſt aus der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

Beiſpiel.

Der unterſte Umfang am Stammende des Baums ſei 7'8"5''' 785''', der oberſte Umfang aber am Schopf oder Zopf 1'2"6'''=126''', und ſeine Länge 80'5"=805" oder 8050'''.

Man ſchließe: 314 : 100=785" : x

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 785}{314} = 25''$ der untere Durchmeſſer.

$314 : 100 = 126'' : x$

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 126}{314} = 4''$ der obere Durchmeſſer.

Nun iſt $25 + 4 = 29''$; $\frac{29}{2} = 145'''$ der mittlere Durchmeſſer.

Oder:

Man addire beide Peripherien, halbire die Summe, und ſuche aus der einen Hälfte den Durchmeſſer, ſo iſt dieſer ebenfalls der mittlere Durchmeſſer. Z. B.

785'' die untere Peripherie
126'' — obere —
2) 911 | 4555''' halbe Summe der Peripherien.

$314 : 100 = 4555 : x$

und es iſt $x = \frac{100 \cdot 4555}{314} = 145''$ der mittlere Durchmeſſer.

Den Inhalt der Fläche findet man nach §. 46.

$1000 : 785 = 145^2 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 145^2}{1000} = 16504$ Quadratlinien, oder $1 F^2\ 65 Z^2\ 4 L^2$.

Der Inhalt ergiebt ſich aus dem Produkt der Grundfläche in die Höhe, alſo

16504 L^2 Inhalt der Grundfläche
8050 L^2 Höhe des Baums
825200
132032
132857200 Kubiklinien, oder
132 F^3 857 Z^3 200 L^3 körperl. Inhalt des Baums.

Anmer-

Anmerkung.

In den durch dieſe Rechnung gefundenen Reſultaten, kann man Brüche, welche unter einem halben Zolle betragen, weglaſſen, weil ſie in der Ausübung doch wenig zu bedeuten haben. Indeß darf man dieſe Abkürzungen vor den Rechnungen nicht vornehmen, weil man ſonſt zu kleine Reſultate erhält, die der Ausübung widerſprechen. Ueberhaupt müſſen die Umſtände hier mehr, als Regeln entſcheiden, und der Gebrauch kann die Mittel angeben, nach welchen man verfahren muß.

III.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts der Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc.

§. 62.

Begriffe von Mühlwellen, Naben, Achſen, Schiffsbuchten, Schiffskniee ꝛc. zu geben, wäre überflüſſig; jeder Förſter lernt die körperl. Gegenſtände aus der Erfahrung kennen. Demnach folgt ſogleich die Beſtimmung des körperlichen Inhalts der genannten Holzſtücke.

§. 63.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt einer Welle, Nabe, Achſe, Schiffsbucht, eines Schiffskniees ꝛc. zu finden.

Auflöſung.

1) Wie groß iſt der Inhalt einer Mühlwelle, wenn ihr Durchmeſſer 42 Zoll, und ihre Länge 50 Fuß groß iſt?

Man berechne ſie wie einen Cylinder §. 159. (des theoret. Theils).

$$1000 : 785 = 42^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 42^2}{1000} = 138474'''$ oder $13 F^2\ 84 Z^2\ 74 L^2$ Inhalt der Grundfläche.

Die Länge beträgt 30′, d. i. 3000‴; alſo

$$\begin{array}{r} 138474'' \\ 3000''' \\ \hline 415422000''' \end{array}$$ oder

$415 F^3\ 422 Z^3$ körperlicher Inhalt der Welle.

2) Wie groß iſt der Inhalt einer Nabe von 18 Zoll im Durchmeſſer, und 22 Zoll Länge?

Man berechne ſie ebenfalls wie einen Cylinder.

$$1000 : 785 = 18^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 18^2}{1000} = 25434'''$ Inhalt der Grundfläche. Nun betragen 22 Zoll Länge 220 Linien, daher iſt

$$\begin{array}{r} 25434''' \\ 220''' \\ \hline 508680 \\ 50868 \\ \hline 5595480''' \end{array}$$, oder

$5 F^3\ 595 Z^3\ 480 L^3$ körperlicher Inhalt der Nabe.

3) Wie groß iſt der Inhalt einer Achſe, welche 10 Zoll Durchmeſſer und 9 Fuß, oder 90 Zoll Länge hat?

$$1000 : 785 = 10^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 100}{1000} = 7850'''$ Inhalt der Grundfläche.

7850‴

7850‴
9 00‴ Länge

7065000‴ oder 7 F^3 65 Z^3 körperlicher Inhalt der Achſe.

4) Wie groß iſt der Inhalt einer Schiffsbucht?

Eine Schiffsbucht iſt, nach den Begriffen im Forſtweſen, ein natürlich gebognes Eichenſtück, welches zwei Grundflächen hat, die entweder Quadrate oder längliche Quadrate ſind. Dieſer Körper wird als ein vollkommenes Balkenſtück berechnet, deſſen Grundfläche eine der beiden gleichen Grundflächen der Schiffsbucht, und deſſen Länge, die Länge der Schiffsbucht iſt, die man findet, wenn man die Krümmung längs der hohen Kante von einer Grundfläche zur andern mißt.

Wäre demnach die eine Grundfläche 272 Quadratzolle, und die Länge auf der hohen Kante hin betrüge 13′ 4″, ſo wäre der körperliche Inhalt der Schiffsbucht:

272 Z^2
134 Z Länge

1088
816
272

36448 Kubikzolle, oder 36 Kubikfuß 448 Kubikzolle.

5) Wie groß iſt der Inhalt eines Schiffsaniees?

Ein Schiffsaniee iſt ein natürlich winklich gewachſenes Eichenſtück, welches entweder aus dem Stamm und einem ſtarken Aſte, oder aus dem Stamm und einer ſtarken Wurzel beſteht. Der ſtärkſte dieſer Theile heißt der Rumpf, und der ſchwächſte der Kopf. Den Rumpf

berechnet man, wenn man die Länge mißt, und dieſe in den mittlern Durchſchnitt multiplicirt; den Kopf auf eben dieſe Art, indem man das Produkt der Länge in den mittlern Durchſchnitt ſucht. Addirt man beide ſo gefundene Balkenſtücke, ſo giebt die Summe den Inhalt des Kniees mit ziemlicher Richtigkeit an. Gewöhnlich werden dergleichen ſeltnere Holzſtücke über den Werth des Inhalts bezahlt, und das Schiffsknie ſteigt überdies am Werthe, wenn der Winkel, den der Kopf mit dem Rumpfe macht, größer iſt, als 45 Grad, und zwar um deſto mehr, je näher dieſer Winkel einem rechten Winkel kommt.

IV.

Von der Beſtimmung des Werthes eines jeden Holzſtückes.

§. 64.

Der Werth eines Holzſtückes richtet ſich theils nach der Größe, theils aber auch nach der innern Güte, nach dem Gebrauche und Nutzen und nach deſſen Seltenheit. Vergleicht man daher Holzſtücke mit einander, ſo bringt man ſie nach den angeführten Eigenſchafter gegen einander in ein Verhältniß. Der Exponent der verſchiedenen Qualität, giebt den Exponent der gleichfalls verſchiedenen Werthe. Weiß man z. B. aus der Erfahrung, daß bei der Feuerung das büchene und eichene Holz gegen das fichtene ſich verhält, wie $14\frac{1}{2}$ Klafter zu 17 Klaftern, ſo kann man $14\frac{1}{2}$ Klafter Buchen- oder Eichenholz ſo hoch halten als 17 Klaftern Fichtenholz.

Steht nun die Birke an Güte zur Feuerung nahe an der Eiche, die Eller aber noch unter der Fichte, ſo kann man überhaupt ſchließen, daß, um ſo größer der Nutzen der einen Holzart gegen die andere iſt, um ſo mehr muß auch der Preis der einen Holzart größer ſeyn, als der der andern; demnach wäre das büchene, eichene und birkne Holz in dieſem

ſem Betracht theurer, als das fichtene und ellerne Holz. (Ueber den Feuerungswerth verſchiedener Holzarten ſehe man das Leipziger Intelligenzblatt, von 1765. S. 105 ff.)

Auch bei dem Gebrauche des Holzes zu Bauten, zur Verarbeitung von Gewerken, zu Geräthſchaften ꝛc. ſuche man ein Verhältniß deſſelben zum Feuerungsholze zu beſtimmen.

Nach den §. 52. angeführten Verhältniſſen, iſt das Feuerholz zum Bauholze, wie 1 : 2, das Bauholz zum Nutzholze, wie 1 : 2, folglich das Nutzholz zu Wagner- Bötticher- Tiſchler- und Drechslerarbeiten, zum Feuerholze wie 1 : 3, und das Blockholz zum Feuerholze, wie 1 : 4. Setzt man dieſe Verhältniſſe als angenommen voraus, ſo läßt ſich darnach der Preis einer jeden Holzart, wenn er von einer bekannt iſt, leicht berechnen.

Das harte Holz verhält ſich gegen das weiche in Anſehung ſeiner innern Güte bei der Feuerung, wie 14½ zu 17. Kennt man nun den Preis einer Klafter Feuerholz, ſo kann man hiernach den Preis des Buchen- und Eichenklafterholzes beſtimmen, indem man ſchließt:

14½ : 17 oder 29 : 34

d. i. 29 Klaftern hartes Holz koſten eben ſo viel, als 34 Klaftern weiches Holz. Koſtet nun eine Klafter weiches Holz, deren Scheitlänge 4 Fuß beträgt, 1½ rthl., ſo müſſen 34 Klaftern 51 rthl. gelten. Und nach den angeführten Gründen müſſen daher 29 Klaftern hartes Holz eben ſo viel gelten, alſo 51 rthl. Wo alſo eine Klafter Fichtenholz mit 1 rthl. 12 gr. bezahlt wird, muß nach dieſen Verhältniſſen eine Klafter Buchen- Eichen- oder Birkenholz 1 rthl. 18 gr. 2½ Pf. gelten.

§. 65.

Aufgabe.

Den Werth eines jeden Holzſtückes in Gelde zu berechnen.

Auflöſung.

Man berechne zuvörderſt einen Kubikfuß Holz nach dem gemeinſten Holzpreiſe, d. i. nach dem Klafterholzpreiſe, ſo kann man darnach, vermöge der §. 63. gemachten Vorausſetzungen, den Preis eines Kubikfußes von jeder Holzart beſtimmen. Kennt man den körperlichen Inhalt der Holzklaſtern, ſo findet man den Preis eines Kubikfußes, durch Multiplikation des Inhalts mit dem Klafterpreiſe.

Es koſte eine vierſchuhige Klafter weiches Holz z. B. 1 Rthl. 12 Gr. und habe 130 Kubikfuße Inhalt, ſo iſt

130 Kubikfuß : 1 Rthl. 12 Gr. = 1 Kubikfuß : x

36 Gr.

12 Pf. = 1 Gr.

72

36

130) 432 | $3\frac{21}{65}$ Pf. der Werth eines Kubikfußes.

Der Werth einer Klafter hartes Holz, von der vorigen Größe, ſei 1 rthl. 18 gr. $2\frac{1}{2}$ Pf.

130 F^3 1 Rthl. 18 Gr. $2\frac{1}{2}$ Pf. = 1 F^3 : x

24 Gr. : 12

506 : $\frac{1}{2}$

260) 1013 | beinahe 4 Pfennige, wenn der Kubikfuß weiches Holz etwa 3 Pfennige gilt.

Den Preis eines Kubikfußes lege man nun bei der Tarirung der Werkhölzer zum Grunde. Da die Werkhöl-

zer das geſundeſte und wohlgewachſenſte Holz erfordern, ſo muß auch der Preis eines ſolchen Kubikfußes größer ſeyn, als der eines Fußes Klafterholz. Gilt der Kubikfuß weiches Holz in Klaftern 3 Pf. und hartes 4 Pf., ſo mag der eine von den Werkhölzern, wenn es Bauholz iſt, 6 Pf. und der andere 8 Pf. gelten.

Iſt das Holz Nutzholz, ſo gelte der eine Kubikfuß 9 Pf. und der andere 11 Pf. oder 1 Gr. Iſt endlich das Holz Blockholz, ſo mag der Preis des einen 1 Gr. und der des andern $1\frac{1}{3}$ Gr. betragen; andere Umſtände, z. B. Entfernungen der Waldungen, Seltenheit der Holzart bei Seite geſetzt.

Läge das Holz nach den beſtimmten Preiſen nahe am Rande der Waldungen, ſo kann man für ſolches, was tiefer in den Revieren liegt, folgende Preiſe annehmen. Das fichtene Bauholz mag im Kubikfuße mit 5, und das eichene mit 7 Pf.; das fichtene Nutzholz mit 7, das eichene mit 8 Pf., und das fichtene Blockholz mit 10, das harte aber mit 1 Gr. auch 1 Gr. 2 Pf. bezahlt werden.

Folgende Beiſpiele werden dieſe Vorausſetzungen und Folgerungen noch deutlicher machen.

Was gilt eine Klafter Schindel- oder Böttcherholz, wenn der Preis eines Kubikfußes 9 Pf. beträgt?

$$\underbrace{9 \cdot 130}_{} \quad 24)$$
$$12)\ 1170 \mid 97 \mid 4 \text{ Thaler}$$
$$6 \text{ Pf.}\ 1 \text{ Gr.}$$

Wie hoch kommt eine Klafter hartes Holz, wenn es zu Nutzholz, als Felgen, Speichen ꝛc. verbraucht werden kann, und der Kubikfuß 10 Pf. gilt?

$$\underbrace{10 \cdot 130}_{} \quad 24)$$
$$12)\ 1300 \mid 108 \mid 4 \text{ Thaler}$$
$$4 \text{ Pf.}\ 12 \text{ Gr.}$$

Was gilt eine Felge, wenn ein Rademacher 17 Stück aus einer Klafter ziehet?

17 . 4 Rthl. 12 Gr. 4 Pf.
24

108
12

220
108 12)

17) 1300 | 76 | 6 Gr.
4 Pf.

Wie hoch kommt eine Achſe, die 10 Zoll im Durchmeſſer hat und 9 Fuß lang iſt, unter der Vorausſetzung, daß der Kubikfuß mit 10 Pfennig bezahlt werden ſoll?

5 Gr. $10\frac{13}{20}$ Pf.

Bei dieſer und den übrigen Aufgaben, ſucht man zuerſt den körperlichen Inhalt (§. 62.) in Kubikfußen oder Kubikzollen. So iſt der Inhalt dieſer Achſe 7 Fuß und 65 Zoll im Kubikmaße. Darnach ſetzt man:

$$1000 \text{ Kubikzolle} : 10 \text{ Pf.} = 7065\ Z^3 : x$$

$$\text{und es iſt } x = \frac{10 \cdot 7065}{1000} = 5 \text{ Gr. } 10\tfrac{13}{20} \text{ Pf.}$$

Wie groß iſt der Preis einer Nabe für den Stellmacher, die 22 Zoll lang, und 18 Zoll im Durchmeſſer iſt, wenn der Kubikfuß 1 Gr. gilt?

Es ſei der körperliche Inhalt einer dergleichen Nabe 5 F^3 595 Z^3.

$$1000 : 1 \text{ Gr.} = 5595 : x$$

$$\text{und es iſt } x = 5 \text{ Gr. } 7\tfrac{7}{50} \text{ Pf.}$$

Wie hoch kommt eine Welle, die 24 Fuß lang iſt, und 20 Zoll im Durchmeſſer, mithin 75 F^3 360 Z^3 körperli=

perlichen Inhalt hat, und wovon der Kubikfuß mit $1\frac{1}{3}$ Gr. bezahlt wird?

$$1000 : 16 \text{ Pf.} = 75360 : x$$

und es iſt $x = 4$ Rthl. 4 Gr. $5\frac{19}{25}$ Pf.

Ferner: Was gilt eine Mühlwelle, welche 415 F^3 422 Z^3 Inhalt hat, wenn der Kubikfuß zu 18 Pf. gerechnet wird?

$$1000 : 18 \text{ Pf.} = 415422 : x$$

und es iſt $x = \frac{18 \cdot 415422}{1000} =$ 25 Rthl. 23 Gr. 1 Pf.

Anmerkung.

Man ſieht hieraus auch wohl ohne Erinnerung, daß es bei dieſer Aufgabe nur auf die Rechnungsformen abgeſehen iſt, weil ſich die Preiſe der verſchiedenen Hölzer nach Zeit und Umſtänden ändern, und die Verhaltungsregeln zur Gnüge in den Taxen für Forſtofſizianten vorgeſchrieben werden.

V.

Von der Taxirung eines Baums nach dem Bauholzpreiſe.

§. 66.

Zwiſchen dem Brennholze und Bauholze macht man einen Unterſchied nach Gehalt und Güte, und dieſer Unterſchied findet daher auch zwiſchen den Preiſen beider Holzarten Statt. Zum Bauholze ſuche man alles kernhafte und wohlgewachſene Holz aus, und das zum Bauen und andern Beſtimmungen unbrauchbare und verunſtaltete Holz gebrauche man nur allein zu Brennholze.

Man beſtimme demnach das Verhältniß des Werthes eines Baumſtammes zum Werthe eines Brennholzſtammes,

mes, und berechne den unbekannten Preis nach dem gegebenen oder bekannten.

§. 67.

Aufgabe.

Einen ganzen Bauholzſtamm zu taxiren.

Auflöſung.

Man berechne zunächſt den körperlichen Inhalt des ganzen Baums (§. 61.) und verfahre alsdenn nach §. 65.

Ein Baum z. B., deſſen mittlerer Durchmeſſer 145 Linien beträgt, und der 805 Zoll lang iſt, hat 132 F³ 857 Z³ Inhalt. Wenn nun 1 Kubikfuß im Bauholze 6 Pf. gilt, was iſt der Werth des ganzen Baums?

$$1000 : 6 \text{ Pf.} = 132857 : x$$

und es iſt $x = \frac{6 \cdot 132857}{1000} = 2$ Rthl. 18 Gr. 5 Pf.

VI.

Von der Berechnung des körperlichen Inhalts eines Baumſtammes nach Klafterholz.

§. 68.

Dieſe Berechnung dient beſonders dazu, ein ganzes Gehölze nach dem Klafterbeſtand anzugeben und zu taxiren. Denn weiß man, wie viel Scheitklaftern auf einem Revier geſchlagen werden können, ſo weiß man auch durch Erfahrung, daß 6 Scheitklaftern allemal eine Zacken- oder Klippelklafter geben; mithin wird man hierdurch in den Stand geſetzt, den ſämmtlichen Vorrath an Holz in Scheit- und Klippelklaftern anzugeben und zu beſtimmen. Was hier am einzelnen Theile eines Waldes mit einem

Baume vorgenommen wird, das gilt auch für das Ganze oder den geſammten Wald.

§. 69.

Aufgabe.

Den Inhalt eines Baumſtammes nach Klaftern zu berechnen, oder zu beſtimmen, wie viel aus einem Baume an Klafterholz geſchlagen werden könne.

Auflöſung.

Hierzu hat man zweierlei Methoden:

a) Man berechnet den Inhalt des Baumſtammes nach §. 61. Dieſen Inhalt dividirt man mit der Anzahl der Kubikfuße und Zolle, welche diejenige Art von Klafter hat, in welche man den Baum ſchlagen will (§. 57.). Der Quotient giebt die Anzahl der Klaftern, welche der Baum enthält.

Beiſpiel.

Man habe eine Eiche, deren mittlerer Durchmeſſer 6′ und deren Höhe 35 Ellen oder 70 Fuß beträgt. Wie viel hält dieſe Eiche ſolche Klaftern, deren Scheitlänge 4′ iſt?

Man ſetze:

$$1000 : 785 = 6^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 6 \cdot 6}{1000} = 28' \, 26''$ Inhalt der Kreisfläche des Baums. $2826'' \cdot 700''$ aber iſt $= 1978200$ Kubikzoll körperlichen Inhalt.

Nun ſchließt man:

Eine Klafter, deren Scheitlänge 4′ iſt, hat 130 Kubikfuße oder 130000 Kubikzolle Inhalt. Man dividire den gefundenen Inhalt durch dieſe Zahl.

130000) 1978200 | 15 Klaftern, 28 Kubikfuße und 200 Kubikzoll.

b) Oder:

b) Oder: Man ſchneide den Baum in ſo viel Klippel, als die Scheitlänge der Holzklaftern zuläßt, und multiplicire die Durchſchnittsfläche des Baums mit der gefundenen Anzahl der Klippel; endlich dividire man mit der Fläche einer Klafter (§. 57.), d. i. mit 32′ 50″ Quadratmaß. Der Quotient giebt die Anzahl der Klaftern.

Es ſei z. B. der vorige Eichbaum 35 Fuß lang; man ſoll daraus 4fußiges Klafterholz ſchlagen. Wie groß iſt die Anzahl der Klippel?

Die Kreisfläche (Grundfläche) des Baums war vorhin (n. a.) = 28′ 26″.

2826″ . 17½
14130 35 = 5 . 7
2) 98910 | 494′ 55″ = der Fläche von allen Klippeln zuſammen genommen. Dividirt man nun mit der Fläche einer Klafter, mit 32′ 50″, ſo erhält man

3250) 49455 | 15 Klaftern
705 Reſt
130
21150
705
3250) 91650 | 28 Kubikfuß
Reſt = 200 Kubikzoll.

VII.

Von der Berechnung eines Holzſtückes, deſſen Inhalt einer Klafter Holz gleich iſt.

§. 70.

Aufgabe.

Wie viel Fuße müſſen von einem Baumſtamme oder Stammſtücke, deſſen Durchmeſſer durchaus einer-

lei

lei Größe hat, abgeſchnitten werden, daß der Inhalt eine Holzklaſter giebt, deren Scheitlänge vorgeſchrieben iſt.

Aufloſung.

Man ſucht aus dem gegebenen Durchmeſſer des Baums ſeine Grundfläche (§. 46.), und ſetzt dieſe ins Verhältniß mit der Fläche einer Klafter, oder mit 3250 Quadratzolle, indem man ſchließt: Wie ſich die Grundfläche eines Stammes, aus welchem eine Klafter Holz geſchnitten werden ſoll, zur Fläche einer Klafter; ſo verhält ſich auch ein Kloͤtz von dieſem Stamme zu der Anzahl der übrigen, die eine Klafter Holz geben. Multiplicirt man hierauf die gefundene Anzahl der Klötzer durch die Scheitlänge, nach welcher das Holz aufgeſetzt werden ſoll; ſo giebt das Produkt die Anzahl der Fuße oder Ellen, die vom ganzen Baume oder Baumſtücke abgeſchnitten werden müſſen, um daraus eine Klafter Holz zu erhalten.

Man habe z. B. ein Baumſtück von 24 Ellen oder 48 Fuß, welches faſt einer Walze gleicht, weil deſſen Durchmeſſer beinahe überall 24 Zoll beträgt. Hieraus ſoll man eine Klafter Holz ſchlagen, deren Scheitlänge 3 Fuß oder $1\frac{1}{2}$ Elle groß iſt; wie viel Ellen muß man davon abſchneiden?

Man ſetze:

$$1000 : 785 = 24^2 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 24 \cdot 24}{1000} = 452$ Quadratzoll der Kreisinhalt eines Klippels.

Nun dividire man 3250 durch 452, ſo iſt der Quotient 7 = der Anzahl der Klippel. Nun ſoll ein Klippel, nach der Klafterlänge, 3 Fuß oder $1\frac{1}{2}$ Elle lang ſeyn, folglich 7 · 3 giebt 21 Fuß oder $10\frac{1}{2}$ Elle. So viel Fuße oder

Ellen müſſen von dem Baumſtamme oder Baumſtücke abgeſchnitten werden, um daraus eine Klafter Holz von 3 Fuß Scheitlänge zu erhalten.

VIII.

Von der Berechnung der Säulen und Schwellen.

§. 71.

Da im Bauweſen, Säulen und Schwellen in vielen Fällen eine beſtimmte Stärke oder Dicke erhalten, und zwar, nachdem die Baumſtämme, wie man ſie aus den Forſten erhält, gehörig beſchlagen worden ſind; ſo iſt einem Förſter zu wiſſen nöthig, aus welchen Stämmen eine Säule oder Schwelle, oder überhaupt ein Stück Zimmerholz von vorgeſchriebener Stärke, gehauen werden kann, damit der Handwerker nicht nöthig habe, auf eine unnütze Art Holz in die Späne zu hauen. Schreibt der Handwerker den Umfang des Baums vor, ſo iſt eine weitere Berechnung unnöthig; gewöhnlich aber erhalten die Forſtoffizianten die Holzſtärken des beſchlagenen Holzes, und werden daher genöthiget, den Umfang oder die Dicke des Baums ſelbſt zu beſtimmen, der beſchlagen, ein Zimmerholz von vorgeſchriebener Größe giebt.

§. 72.

Aufgabe.

Zu finden, wie groß der Umfang eines Baums ſeyn muß, wenn daraus ein vierkantiges Zimmerholzſtück, deſſen Seitenhöhe vorgeſchrieben wird, geſchlagen werden ſoll.

Aufloͤſung.

Hierzu giebt es abermals zweierlei Methoden:

a) Durch Huͤlfe der Rechnung.

Man multiplicirt die gegebene Seitenhoͤhe der Saͤule ꝛc. mit ſich ſelbſt, oder macht das Produkt der Hoͤhe in die Breite, wenn der Durchſchnitt der Saͤule oder Pfoſte ein laͤngliches Viereck iſt. Das daher entſtandene Quadrat oder Produkt multiplicirt man abermals mit 2, und zieht aus dieſem zweifachen Produkt die Quadratwurzel. Dieſe giebt die Groͤße des Durchmeſſers des Baums. Aus dieſem ſucht man hiernaͤchſt den Umfang, und dieſer giebt die Staͤrke des Baums, aus welchem man die verlangte Saͤule kann ſchlagen laſſen.

Z. B. Man habe ein Stuͤck Holz zu einer Pfoſte oder Schwelle noͤthig, welches ins Gevierte 25 Zoll hoch und 20 Fuß lang ſeyn ſoll. Wie ſtark muß der Baum ſeyn, aus welchem man eine dergleichen vierkantige Schwelle kann hauen laſſen?

$$25'' \; 25'' = 625$$
$$2$$
$$\overline{12|50|}35'' \; 3'''$$ der Diameter des Baums, der zur Saͤule erfordert wird.

Hieraus ergiebt ſich der Umfang des Baums auf folgende Art:

$$100 : 314 = 353''' : x$$

und es iſt $x = \frac{314 \cdot 353}{100} = 1108'''$ oder 11 Fuß und 8 Linien, d. i. der Umfang eines ſolchen Baums muß beinahe 11 Fuß und 1 Zoll groß ſeyn.

Oder:

b) Ohne Rechnung vermittelſt des Zirkels.

Man nehme mit dem Zirkel von einem verjuͤngten Maßſtabe die Anzahl der Zolle, die eine Seite der Schwelle ꝛc. halten ſoll, hier 25'', und konſtruire daraus, naͤmlich

aus ab nach Fig. 13 ein Quadrat abcd. Man ziehe die Diagonallinien ac und bd, die ſich in e ſchneiden. Aus e als Mittelpunkt beſchreibe man um das gezeichnete Quadrat einen Kreis und meſſe den Durchmeſſer ac oder bd auf dem verjüngten Maßſtabe, ſo giebt dieſer die Anzahl von Fußen und Zollen, welche der Durchmeſſer des Baums haben muß, der beſchlagen, die Schwelle giebt. Hiermit vergleiche man §. 140 und 141 des theoretiſchen Theils.

§. 73.

Aufgabe.

Umgekehrt: Aus der Stärke eines Baums zu finden, was für eine vierkantige Pfoſte oder Schwelle daraus beſchlagen werden kann.

Auflöſung.

a) Durch Rechnung.

Man ſucht aus dem Umfange des Baums den Durchmeſſer, nimmt von dieſem die Hälfte, und quadrirt dieſe Hälfte, alſo den Halbmeſſer des Baums.

Das erhaltene Quadrat multiplicirt man mit 2, und extrahirt daraus die Wurzel. Dieſe giebt die Höhe der Schwelle, welche aus dem Baumſtamme gehauen werden kann.

Z. B. Der gegebene Baum, aus welchem die Schwelle geſchlagen werden ſoll, ſei im Umfange = 10048'''. Wie hoch kann eine Seite werden?

$$314 : 100 = 10048 : x$$

und es iſt $x = \frac{100 . 10048}{314} = 32''$ der Durchmeſſer des Baums.

Nimmt

Nimmt man davon die Hälfte, d. i. $\frac{32}{2} = 16''$, ſo hat man

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

, und es iſt

$\sqrt{256} = 22'' \, 6'''$ die Höhe der Seite der Schwelle.

b) Mit Hülfe des Zirkels.

Man beſchreibe mit der halben Stärke des Baums als Halbmeſſer e b eine Kreislinie, nachdem man ihn vom verjüngten Maßſtabe genommen. Zeichnet man nun in den Kreis ein Quadrat a b c d (§. 138. des theoret. Theils) und mißt eine Seite, etwa ab oder ad auf dem verjüngten Maßſtabe, ſo hat man in der Anzahl der Zolle, die Höhe der Seite der Schwelle oder Pfoſte, die aus dem gegebenen Baum gehauen werden kann. Hiermit vergleiche man §. 138 und 139 des theoret. Theils.

§. 74.

Aufgabe.

Zu finden, wie viel Balken von einer gegebenen Größe zu Bändern, Riegeln ꝛc. aus einem Blocke oder Klotze, deſſen Durchmeſſer gegeben iſt, geſchnitten werden können.

Auflöſung.

Man ſucht aus dem gegebenen Durchmeſſer des Baums ſeinen Umfang, und zeichnet in denſelben ein Quadrat, ſo giebt die Seite deſſelben auf dem verjüngten Maßſtabe, die Höhe der Seite eines Balkens, der aus dem gegebenen Klotze geſchnitten werden kann.

Soll man nun den Balken auf das Kreuz, d. i. in vier andere Balken trennen, ſo rechnet man auf den Sägeſchnitt $\frac{1}{4}$ Zoll ab. Alles was übrig bleibt, dividirt man durch 2, ſo giebt der Quotient die Stärke der kleinern Balken an, die aus dem Klotze geſchnitten werden können.

Z. B. In Fig. 14 ſei der Durchmeſſer des Baums ab = 32″, und man findet die Balkenſeite ac = 22″ 6‴. Hiervon ſubtrahirt man den Sägeſchnitt = $\frac{1}{4}$″ oder $2\frac{1}{2}$ Linie, und es bleiben noch reichlich 22 Zolle. Durch einen Kreuzſchnitt erhält man nun 4 Stücke, oder vier kleinere Balken, wovon jedes Höhe ad und Breite ac = 11 Zoll groß iſt.

Sollten aber nach Fig. 15 aus eben dieſem Klotze 9 Stück kleinere Balken geſchnitten werden, ſo müßte ſolches durch zwei an einerlei Seite angebrachte Kreuzſchnitte geſchehen, und folglich gienge auch $\frac{1}{2}$ Zoll oder 5 Linien für den Sägeſchnitt in jeder Seite verloren, ſo daß alſo nur noch 22 Zoll übrig blieben. Theilt man dieſe durch die Zahl 3, ſo bekommt man $7\frac{1}{3}$ Zoll für die Höhe einer Seite der erhaltenen kleinern Balken.

Wollte man nach Fig. 16. aus dieſem Klotze 6 ſolche Balken ſchneiden, ſo würde man auf der einen Seite zwei, auf der andern aber nur einen Sägeſchnitt nöthig haben. Jeder daraus erhaltene Balken würde alsdenn $7\frac{1}{3}$ Zoll breit, und 11 Zoll hoch in der Grund- oder Durchſchnittsfläche werden.

IX.

Von der Berechnung der Breter und Latten, die aus einem Klotze oder Blocke geſchnitten werden können.

§. 75.

Um den Schneidemüller zu kontrolliren, wie viel er Breter oder Latten aus einem gelieferten Blocke oder Klotze ſchnei-

ſchneiden kann, iſt es nöthig, ſich mit gegenwärtiger Rechnung bekannt zu machen. Von den Bevortheilungen der Schneidemüller und ſolche zu entdecken, enthält das Leipziger Intelligenzblatt von 1765 S. 293 einen Aufſatz. Man kann nämlich durch folgende Probe entdecken, ob die aus einem Klotze geſchnittenen Breter alle ſind, oder ob eins oder mehrere mangeln, wenn man nämlich die Breter von einem Klotze an ihren Enden mit den Klinſen zuſammen ſetzt, wo ſie alsdenn dergeſtalt in einander paſſen müſſen, daß der Block völlig wieder hergeſtellt wird. Die Probe geht bei wenigen Bretern, oder mit einem einzigen Klotze oder Blocke wohl an; allein bei vielen, die oft von verſchiedener Art ſind, und unter einander geworfen werden, iſt dieſe Probe zu zeitſpielig.

Das Aufſetzen der Breter und Latten nach Sägeblöcken, iſt für den Müller ebenfalls zu weitläufig. Um dieſes alles entbehren zu können, kann man vorläufig berechnen, wie viel und wie ſtarke Breter und Latten aus einem Blocke oder Klotze geſchnitten werden können. Hierdurch beugt man dem Hange zu Betrügereien vor, und iſt überdies im Stande einen Ueberſchlag von dem zu machen, was man an Bretern und Latten aus gegebenen Klötzen erhalten kann, und zu ſehen, ob dieſe Anzahl zu irgend einer Bauunternehmung hinreichend ſei, oder nicht; oder umgekehrt, aus der gegebenen Anzahl von Bretern und Latten, die Menge der Klötzer zu beſtimmen, die zu irgend einem Baue erforderlich ſind.

Beim Schneiden ſelbſt kommt es unter andern darauf an, ob die Breter auf der Mühle geſäumet werden ſollen oder nicht.

Werden ſie geſäumet, ſo wird der Bretkloß erſt ins vierkantige geſchnitten. Die hierdurch erhaltenen Abſchnitte, geben die ſo genannten Schwarten. Nach dieſen folgen noch 2, 3 oder auch wohl mehrere Vorſchlagebreter, ſo daß man auf einen Kloß 4 Schwarten, und 4, 8 oder 12 Vorſchlagebreter rechnen kann. Die hierauf

folgenden Breter heißen geſäumte, oder auch wohl Kernbreter. Dieſe letztern Breter können wiederum dem Gebrauche nach auf verſchiedene Art betrachtet werden. So giebt es Spündebreter, Tiſchlerbreter ꝛc. wovon jede Art ihre beſondere Stärke hat. Sie können daher nach Vorſchrift zu 1 bis $1\frac{1}{4}$ oder bis $1\frac{1}{2}$, und zu Pfoſten auch wohl 2 Zoll ſtark geſchnitten werden, je nachdem ſie zu dieſem oder zu jenem Gebrauche beſtimmt ſind.

Werden die Breter aber nicht geſäumet, ſo wird der Block gleich durch in die verlangte Anzahl von Bretern nach ihrer Stärke zerſchnitten. Auf dieſe Art erhält man aus einem Blocke nur 2 Schwarten, und etwa noch 2 oder 4 geringere Breter, welche ſogleich auf die Schwarten oder Ortbreter folgen. Die übrigen Breter fallen gerade durch den Kloß, und ſind von gleicher Stärke, ſo wie ſie beim Gebrauche erfordert werden.

Die Beſtimmung der Anzahl von Bretern und Latten, die aus einem Kloße fallen können, wenn beides, Kloß- und Breteranzahl bekannt iſt, betrift die gegenwärtigen Aufgaben, weil ſie ebenfalls einem Forſtoffizianten nützlich werden können. Da ſich die Anzahl der ungeſäumten Breter, die aus einem Kloß geſchnitten werden können, leichter beſtimmen läßt, als die Anzahl der geſäumten, ſo wird mit den leichtern Aufgaben hier der Anfang gemacht.

§. 76.

Aufgabe.

Zu finden, wie viel Breter nach der gegebenen Stärke aus einem Sägeblocke, deſſen Durchmeſſer bekannt iſt, geſchnitten werden können.

Auflöſung.

Man nimmt den Durchmeſſer des Bretkloßes oder Sägeblockes, und ſubtrahirt davon 4 Zoll für die Dicke der beiden äußern Breter oder Schwarten. Beſtimmt man hierauf

auf die Stärke der Breter, und addirt zu derſelben $\frac{1}{4}$ Zoll für den Sägeſchnitt, und dividirt mit dieſer Zahl in den Reſt des Durchmeſſers, ſo hat man im Quotienten die Anzahl der Breter, die aus dem Kloße geſchnitten werden können.

Es ſei Fig. 17. der Durchmeſſer a b des Bretklotzes, 31 Werkzoll. (Bei dieſen und ähnlichen Berechnungen muß das Werkmaß und deſſen Eintheilung beibehalten werden.) Die daraus zu ſchneidenden Breter ſollen $1\frac{1}{4}$ Zoll Stärke oder Dicke erhalten. Wie viel Breter wird man aus dem Kloße bekommen?

Man ſetze:

	31	Werkzolle	der Durchmeſſer,
	4	—	für die Schwarten;
bleiben	27	—	für das Dividendum.
Ferner	$1\frac{1}{4}$	Zoll	für die Stärke eines Bretes,
	$\frac{1}{4}$	— —	den Sageſchnitt;
und es kommt	$1\frac{1}{2}$	Zoll	für den Diviſor.

Daher $1\frac{1}{2}$: 27

3   2

3) 54 | 18 Stück Breter,

alle von gleicher Stärke, $1\frac{1}{4}$ Zoll dick.

Nimmt man aber auf jeder Seite noch zwey Vorſchlagebreter nach den Schwarten weg, und jedes derſelben ſei $\frac{3}{4}$ Zoll ſtark, ſo geben ſolche mit den Sägeſchnitten noch vier Zoll Abzug von dem Durchmeſſer a b, und die Berechnung wäre dieſe:

31 Werkzolle der Durchmeſſer

8 — für Schwarten und Vorſchlagebreter.

$1\frac{1}{2}$: 23

3   2

3) 46 | 15 Stück Breter von $1\frac{1}{4}$ Zoll Stärke.

 Neben

Neben dieſen erhält man noch ein Bret von $\frac{1}{3}$ aus $1\frac{1}{2}$ Zoll, d. i. von $\frac{1}{2}$ Zoll; oder da von der Säge noch nicht völlig $\frac{1}{4}$ Zoll auf den Schnitt weggeriſſen wird, noch ein Vorſchlagebret von $\frac{3}{4}$ Zollen.

Demnach müßte man aus dieſem Sägeblocke erhalten:

2 Schwarten, jede 2 Werkzoll ſtark.
5 Vorſchlagebreter, jedes $\frac{3}{4}$ Zoll ſtark.
und 15 Tiſchlerbreter, jedes $1\frac{1}{4}$ Zoll ſtark.

Sollen aber geſäumte Breter aus einem Bretklotze geſchnitten werden, ſo werden an allen vier Seiten erſt ſo viel Breter abgetrennt, bis der Klotz zu einem regulären vierkantigen Balkenſtücke geſchnitten iſt. Um nun zu erfahren, was für eine Anzahl von Vorſchlage- und andern Bretern aus dem Klotze geſchnitten werden können, verfahre man auf folgende Art:

Man meſſe zuerſt den Durchmeſſer des Bretklotzes. Von dieſem nehme man die Hälfte, und mache davon das Quadrat, welches ſich in einen Kreis zeichnen läßt (§. 138 des theoret. Theils.) Hierauf zieht man eine Seite dieſes Quadrats vom Durchmeſſer des Baums ab, und man hat im Reſte den Ueberſchuß, der in zwei gleiche Theile getheilt wird. Jeder Theil wird alsdenn, wie vorhin, in ſeine Schwarten und Vorſchlagebreter getheilt und berechnet. In Fig. 18 findet man dieſe Abtheilungen ſo wohl bei a b als auch bei c d, ſo wie auf den Seiten bei a c und b d.

Multiplicirt man die aus einem dergleichen Abſchnitte geſchnittenen Breter mit 4, ſo hat man alles dasjenige, was von dem Bretklotze wegkommt, ehe noch das vierkantige Balkenſtück in die geſäumten Breter geſchnitten wird. Von dieſen nimmt man nun eine Seite, dividirt ſolche, wie vorhin, durch die Stärke der Breter nebſt $\frac{1}{4}$ Zoll für den Sägeſchnitt, nach dem Maße, in welchem die Breter ſtark oder ſchwach ausfallen ſollen. Der Quotient giebt auch hier die Anzahl Breter, die aus dieſem Balkenſtück noch getrennt werden können.

Z. B. Man hätte einen Bretkloz, von 40″ im Durchmeſſer; daraus ſollten $1\frac{3}{4}$ Zoll ſtarke und an beiden Seiten abgeſäumte Breter geſchnitten werden. Die Frage iſt: Wie viel man ſolche Breter, und wie viel man Vorſchlagebreter darneben nebſt den Schwarten erhält, wenn die Schwarten 2, die Vorſchlagebreter aber auf $\frac{3}{4}$ Zoll Stärke getrennet werden?

Man verfahre auf folgende Art:

40 Werkzolle der Durchmeſſer des Klotzes,

20 — die Hälfte deſſelben.

$20 \cdot 20 = 400;$

$400 \cdot 2 = 800$

und es iſt $\sqrt{800} = 28$ Werkzolle, welches eine Seite des Quadrats, nämlich a c oder a b iſt.

Die 28″ zieht man vom Durchmeſſer = 40″ ab, ſo iſt der Reſt 12 Zolle, und $\frac{12}{2}$ giebt 6 für jeden Kreisbogen a e b oder c f d ꝛc. der vom Baume abgeſchnitten wird, ehe der Schnitt an das Balkenſtücke kommt. Von dieſem rechnet man 2 Zoll auf die Schwarten, ſo bleiben noch 4 Zoll. Aus den letztern 4 Zollen laſſen ſich nun noch 4 Vorſchlagebreter, jedes $\frac{3}{4}$ Zoll ſtark ſchneiden, weil auf einen Schnitt noch $\frac{1}{4}$ Zoll des Sägeſchnitts hinzu kommt.

Demnach erhält man:

4 Schwarten, jede 2 Zoll ſtark, und

16 Vorſchlagebreter, jedes $\frac{3}{4}$ Zoll ſtark.

Hierauf folgt die Zertrennung des Balkenſtücks, deſſen Seite 28 Zoll Höhe hat. Sollen nun daraus $1\frac{3}{4}$ Zoll ſtarke Breter geſchnitten werden, ſo kommt für den Sägeſchnitt $\frac{1}{4}$ Zoll hinzu, ſo daß die Stärke 2 Zoll iſt. Dividirt man 28 durch 2, ſo giebt der Quotient 14 Stück Breter, wovon jedes $1\frac{3}{4}$ Zoll ſtark iſt und 28 Zoll Breite hat.

Alſo kommen noch zu den obigen

4 Schwarten, und

16 Vorſchlagebretern,

14 Spundbreter, die an beiden Seiten geſäumt ſind.

Will man dieſe Aufgabe ohne Rechnung, bloß durch eine Zeichnung auflöſen, ſo verfährt man auf dieſe Art: Man nimmt den Halbmeſſer des Baums e g = 20″ (Fig. 18.) vom verjüngten Maßſtabe, und beſchreibt mit demſelben einen Kreis. In den Kreis beſchreibt man (§. 138 des theoret. Theils) ein Quadrat a b c d und mißt a c oder die Seite deſſelben auf dem verjüngten Maßſtabe, ſo giebt dieſe die Anzahl der Zolle an, die vom Durchmeſſer abgezogen werden müſſen. Theilt man endlich den Durchmeſſer e f nach dem verjüngten Maßſtabe in diejenigen Theile ein, welche die Stärke der Breter beſtimmen, und zieht durch die Theilungspunkte mit a b Parallellinien, ſo hat man den Durchſchnitt der Sägeſchnitte. Dieſe Eintheilung muß, wenn der verjüngte Maßſtab nicht zu klein angenommen, alle Maße richtig aufgetragen und die Linien gehörig getheilt werden, mit der vorigen Rechnung vollkommen übereinſtimmen.

§. 77.

Aufgabe.

Zu finden, wie viel Latten von gegebener Breite und Stärke aus einem Bretklotze, deſſen Durchmeſſer bekannt iſt, geſchnitten werden können.

Auflöſung.

Man zeichnet mit dem halben gegebenen Durchmeſſer als Halbmeſſer, einen Kreis, und theilt auf demſelben die Stärke der Balken ab, wie bei den Bretern. Hierauf zieht man (Fig. 19.) durch den Mittelpunkt des Kreiſes und den Durchmeſſer a b noch eine andere gerade Linie c d, welche denſelben rechtwinkelig ſchneidet. Macht man nun auf dieſer Linie die Eintheilung vom Mittelpunkte nach beiden Seiten hin in der gegebenen Breite der Latten, und zieht durch die Theilungspunkte die Theilungslinien, die ſich kreuzweiſe ſchneiden, ſo ſtellen dieſe die Sägeſchnitte, die

die Zwiſchenräume aber die Queerdurchſchnitte der Latten vor, welche nach der Zeichnung abgezählt werden können. Hiernach muß der Sägeblock in der Schneidemühle getrennt werden.

Oder:

Es ſei der Durchmeſſer ab des Bretklotzes = 24 Zoll. Man ſoll ſolche Latten daraus ſchneiden, deren Stärke mit Einbegriff des Sägeſchnitts 2″, die Breite aber, ebenfalls mit dem Sägeſchnitte 4 Zoll betrage. Dabei verfahre man nun auf folgende Art: 24 : 2 = 12, welche Zahl die Anzahl der Latten von 2 Zoll Stärke anzeigt. Theilt man nun den Durchmeſſer eben dieſes Klotzes cd mit der Breite der Latten oder 4 Zoll, ſo iſt $\frac{24}{4} = 6$; folglich werden jene 12 Stück übers Kreuz noch 6 mal zerſchnitten, ſo daß alſo der ganze Block oder Klotz in 6 . 12 oder in 72 Theile zerſchnitten wird, unter der Vorausſetzung, daß er die Geſtalt eines Balkenſtücks und nicht die Form einer Walze habe. Allein, da der letzte Fall hier eintritt, ſo muß man berechnen, wieviel auf jeden Winkel efgh, und alſo in den Winkel cea, 6 Stücke Säumlinge als der dritte Theil eines Viertels vom Ganzen gehen; denn es müſſen $\frac{72}{4} = 18$, und $\frac{18}{3} = 6$ Stücke ausfallen, die zu keinem großen Gebrauche angewandt werden können. Folglich bleiben für jedes Viertel anſtat 18 nur noch 12 Stücke übrig. Aber auch unter dieſen 12 Stücken, als $\frac{2}{3}$ aus $\frac{1}{4}$ der ganzen Summe, fallen noch 3 Stücke aus, die ebenfalls nicht vierkantig geſchnitten werden können, aber doch noch gebraucht, und folglich zu den übrigen Latten gerechnet werden können. Erhält man aber aus $\frac{1}{4}$ des Ganzen 12 Stück brauchbare Latten, ſo erhält man aus dem ganzen Klotze 12 . 4 oder 48 Stück Latten, die zum Gebrauche angewandt werden können.

Anmerkung.

Hat man Schwarten und Vorſchlagebreter nöthig, ſo kann man auch von jedem Stamme, ehe die Latten getrennt werden, eine ſolche Anzahl wegnehmen laſſen, daß das noch übrige Stück ein Balkenſtück werde, woraus ſich alsdenn die Anzahl der zu erhaltenden Latten leicht finden läßt. Hierbei hat man den Vortheil, daß alles, was im Schnitte fällt, gebraucht werden kann.

Allgemeine Anmerkung.

Wer in der allgemeinen Arithmetik Fortſchritte gemacht hat, findet eine Menge nützlicher und wichtiger Lehren der Stereometrie auf das Forſtweſen angewandt, in Hr. Prof. Späths Anleitung die Mathematik und phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen und forſtliche Camerale anzuwenden. §. 31. Forſtliche Stereometrie in XIV. Hauptabtheilungen. Die dort gebrauchten Formeln beruhen entweder auf unwiderſprechlichen Gründen, oder auf ſichern Erfahrungen, und ſind ihrer Brauchbarkeit und ihres Nutzens wegen jedem zu empfehlen, der ſich über die Anfangsgründe der Mathematik hinauf arbeiten kann. Litteratur zur Erweiterung dieſes Theils der praktiſchen Forſtgeometrie, vorzüglich mehrere Sammlungen von Tabellen, welche bei der Holzberechnung nützliche Dienſte leiſten, findet man in D. Chriſtoph Wilhelm Jakob Gatterers Allgemeinen Repertorium der Forſtwiſſenſchaftlichen Litteratur. Band I. (Ulm 1796.) §. 3. B. Von der Berechnung des Gehalts der Bäume und des Holzes. Bei den einzelnen Schriften und Tabellen findet man zugleich ein kurz gefaßtes Urtheil über die Brauchbarkeit oder die Fehler derſelben.

Von dieſen Schriften ſind folgende vorzüglich brauchbar: Forſtwirthſchafts = Tabellen, worin das Stammholz vom geringſten bis zum ſtärkſten Stamme berechnet iſt, nämlich:

1) Wie

1) Wie viel Klaftern Holz ein Stamm von beſtimmter Dicke und Länge gebe;

2) wie viel Kubikſchuhe ſolcher beſchlagen, und wie viel er dergleichen Schuhe rund enthalte;

3) was der ganze Stamm rund koſte, wenn der Preis für einen Kubikſchuh feſtgeſetzt iſt.

Entworfen von Hrn. Dieper und zum Drucke befördert von J. P. Kling. Mannheim 1790. gr. Fol. II Bände. Ferner:

Fr. A. L. von Burgsdorfs Beiträge zur Erweiterung der Forſtwiſſenſchaft, durch Bekanntmachung eines Holztaxationsinſtruments, und deſſen leichten und vielfachen Gebrauch. Berlin 1780. Das Inſtrument iſt in Berlin für 25 Rthlr. in Gold zu bekommen.

Segondats Holztabellen, zu leichter Berechnung des viereckigen und runden Holzes nach Kubikfuß, und des geſägten Holzes nach Quadratfuß; nach dem Franzöſiſchen Original verbeſſert, nebſt einer Vorrede von P. H. C. Brodhagen. Wohlfeile Ausgabe. Hamb. 1792.

Die unentbehrlichſten Tafeln zur Berechnung der Baumſtämme kommen zu Ende des Buches vor.

X.

Von der Zählung der Bäume eines ganzen Reviers nach ihrer verſchiedenen Größe.

§. 78.

Der Methoden, das ſchlagbare Holz, oder den Holzbeſtand eines Reviers durchzuzählen, oder der Taxation eines Forſts im Allgemeinen, giebt es viele. Statt mehrere Methoden zu beſchreiben, wird hier die Vierenkleeſche angegeben, und in der Folge wer-

werden die Schriften genannt, worin man die neuern Methoden kennen lernt, nach welchen die Zählung der Bäume und die ganze Taxation eines Waldes vorgenommen wird, weil die örtlichen Forſtverordnungen oder Reglements gewöhnlich beſtimmen, nach welcher Methode die Bäume gezählt und überhaupt die Forſten eines Landes taxirt werden ſollen, und von welchen die Forſtoffizianten einer Provinz nicht abweichen dürfen, ſelbſt dann nicht, wenn auch eine andere Methode zweckmäßiger wäre, als die vorgeſchriebene.

§. 79.

Aufgabe.

Die Bäume eines Waldes zu zählen.

Auflöſung.

Man wähle ſich 12 Perſonen nebſt einem Holzhauer mit einem ſcharfen Beile. Jede der 12 Perſonen muß wenigſtens darin Kenntniſſe und Fertigkeit haben, den Umfang eines Baumes zu meſſen, daraus den Durchmeſſer zu finden, oder umgekehrt, und in Ermangelung eines Baummeſſers oder Taxationsinſtruments, den Durchmeſſer nach dem Augenmaße ſelbſt dann noch zu ſchätzen wiſſen, wenn er auch nur am Gipfel eines Baums 4 bis 6 Zoll halten ſollte. Man ſchätzt die Durchmeſſer der Bäume in eben dem Maße, womit man mißt, nämlich in Ellen, oder Fußen und Zollen. Fehlt aber dieſe Kenntniß und Fertigkeit, ſo muß das durch unmittelbare Meſſung mit zuſammenzulegenden Zollſtäben und einem Höhenmeſſer geſucht werden, was durch ein gutes Augenmaß oder durch zweckmäßig eingerichtete Baummeſſer und Taxationsinſtrumente gefunden wird. Einiges Augenmaß hat Jedermann, und eine Zeitlang daſſelbe an Gegenſtänden dieſer Art geübt, ſetzt am Ende in Stand, das nach dem Augenſcheine zu meſſen, was ohne Uebung nur durch Inſtrumente

mente möglich iſt. Bei genauen und wichtigen Beſtimmungen bleiben indeſſen die Inſtrumente immer nothwendig, weil in ſolchen Fällen ohngefähre Angaben nichts nützen.

Acht Perſonen von der oben angezeigten Anzahl, erhalten eine Menge Nägel von Birkenholze, wovon jeder ungefähr 4 Zoll lang und wie einen Finger ſtark seyn muß. Die Nägel ſelbſt erhalten nach dem Bedürfniß verſchiedene Farben, ſo daß ein Theil der geſammten Menge weiß, ein anderer Theil ſchwarz, grün, gelb ꝛc. wird. Durch die Farben bezeichnet man entweder die verſchiedenen Sorten der Bäume, als z. B. Rüſtſtangen mit weißen Röhrhölzer mit ſchwarzen, Sparren mit rothen ꝛc. oder die Bäume nach ihrer Stärke, ſo daß die weißen, Bäume bezeichnen von 6 bis 9 Zoll, die ſchwarzen, von 9 bis 12 Zoll, die rothen von 12 - 15 Zoll, die grünen von 15 - 18 Zoll, die gelben von 18 bis 21 Zoll, und die blauen von 21 bis 24 Zoll im Durchmeſſer. Oder ſollten ſich keine Bäume von der erſten Art in den kleinern Abtheilungen des Reviers finden, und wäre überdies die Holzart ſtärker, als die angegebene letztre von 21 bis 24 Zoll im Durchmeſſer, ſo läßt man die Nägel nach Umſtänden eine Stufe höher gelten, das iſt, Bäume von größerm Durchmeſſer bezeichnen. Man nehme daher z. B. für die Bäume von 15 — 18 Zoll die weißen Nägel, für die von 18 — 21 die ſchwarzen, und ſo fort, die blauen für Bäume von 30 — 33 Zoll im Durchmeſſer.

Iſt man mit dieſen Vorausſetzungen und willkürlichen Beſtimmungen der Nägel zu Stande; ſo ſtelle man die gedachten acht Mann 10 bis 20, und wenn das Holz ſehr dünne ſteht, auch wohl noch mehrere Schritte auseinander, ſo daß entweder der rechte oder linke Flügelmann die Gränze des Reviers berühre; der Holzhauer erhält ſeine Stelle auf dem andern Flügel, wo keine Gränze iſt, und markirt die daſelbſt angeſtekten Bäume mit dem Beile, damit die gedachten acht Perſonen, wenn ſie den erſten Gang

in einer Abtheilung des Reviers vollendet, auf ihrem Rückwege, durch eine Schwenkung rechts oder links, ſich darnach richten, und an den durch den Holzhauer angepflöckten Bäumen die Abtheilungsgränze erkennen.

Hinter dieſen 8 Mann läßt man in einer Entfernung von 5 bis 10 Schritten die übrigen 4 Mann ſo folgen, daß dieſe noch einmal ſo weit von einander, der Breite nach, entfernt gehen. Dieſe läßt man die in die verſchiedenen Arten der Bäume eingeſteckten Nägel abnehmen oder zuſammen ſammlen, und zugleich zerſtreut ſtehende Bäume auf dem Reviere, die nicht zu den Hauptarten des Holzbeſtandes gehören, als z. B. in Fichtenwäldern, die Eichen, Buchen, Birken, Ellern ꝛc. Stück für Stück, nach Höhe und Stärke markiren, und in die bei ſich führende Tabelle in eine eigene Rubrike eintragen; ſo daß alſo in einem Schwarzholzreviere die erſten 8 Perſonen, bloß allein ſich mit Zählung des Schwarzholzes, die nachkommenden 4 Perſonen aber, mit Zählung des Laubholzes und Abnehmung der Nägel beſchäftigen. Auf dieſe Art kann man auch in Laubholzrevieren, den erſten 8 Perſonen die Anweiſung zur Zählung des Laubholzes, und den nachkommenden 4 Perſonen die Zählung des Schwarzholzes auftragen.

Wären die verſchiedenen Hölzer, nämlich Schwarzholz und Laubholz, zu gleichen Theilen gemiſcht, ſo müßte man auch die Baumzähler in gleicher Anzahl abtheilen, und ſie gehörig dazu inſtruiren, was man durch ihre Bemühungen erwartet.

Hat die vordere Abtheilung der 12 Perſonen, nämlich die Abtheilung von 8, den erſten Gang durch das Revier vollendet, ſo fordert dieſen der das Taxationsgeſchäft dirigirende Förſter, einer jeden Perſon die noch übrigen Nägel ab. Der Reſt der Nägel wird durchgezählt und von der erhaltenen Summe ſubtrahirt. Auf dieſe Art erhält der Förſter die richtige Anzahl von einer jeden Sorte

von

von Nägel, die verbraucht worden iſt, um Bäume im Reviere zu markiren. Dieſe vom erſten Gange erhaltenen Reſultate werden in ein Manual nach ihren Klaſſen gehörig eingetragen, oder in Tabellen notirt.

Unter dieſer Zeit ſind die Einſammler der Nägel ebenfalls mit ihren Geſchäften fertig. Die durch ſie aufgefundenen Laubhölzer werden nun auch ins Manual, oder in Tabellen, eingetragen, die Nägel nachgezählt, und nachdem ſie richtig befunden worden, aufs neue an die erſten 8 Perſonen vertheilt.

Der zweite Gang wird nun eben ſo wie der erſte angeordnet und vollendet, und die gefundenen Reſultate werden auf dieſelbige Art ins Manual oder in Tabellen eingetragen, und ſo wird das ganze Revier von einer Gränze bis zur andern durchgegangen, und die Zählung der Bäume vorgenommen.

Zuletzt erhält der Förſter die Summe von Stämmen jeder Art durch das ganze Revier. Hiernach kann die Berechnung des Holzbeſtandes auf das genaueſte vorgenommen, die Bewirthſchaftung des Reviers darnach angeordnet, und ſo die ganze Forſtpflege nach der Natur und Beſchaffenheit der Waldungen eingerichtet, und durch vorgeſchriebene Ordnungen die Waldung erhalten werden.

Hierbei ſind noch folgende Regeln zu merken:

1) Es iſt zweckmäßig, wenn der Förſter, unter deſſen Leitung die Holzbeſtände eines Reviers gezählt werden ſollen, die Aufſicht über dieſes Revier hat, weil er durch dieſe Arbeit mit dem Reviere und ſeiner Beſchaffenheit genau bekannt worden iſt. Vermöge ſeiner genauen Kenntniß vom Reviere, kann ein Förſter am ſchicklichſten Flügel und kleine Abtheilungen angeben, und die keinen Namen haben, nach den bekannten Gegenden und Gränzen benennen. Ferner weiß er auch, mit welcher Art von Holz ſeine Forſt beſtanden iſt, und

mithin kann er zum voraus den Holzzählern die gehörige Anleitung geben, und ſie auf die Gegenſtände aufmerkſam machen, die in dieſem oder jenem Theile des Reviers vorkommen. Auch kann der des Reviers kundige Förſter die Menge und Sorten der Nägel im Allgemeinen am ſicherſten beſtimmen, und die benöthigte Anzahl derſelben vorläufig ohngefähr angeben.

2) Alle unterdrückten Bäume, und überhaupt ſolche, die kein gutes Wachsthum verſprechen, weil ſie von den darüber gewachſenen erſtickt werden und endlich ausgehen müſſen, werden weder mitgezählt noch in Anſchlag gebracht. Vorzüglich iſt dieſe Regel in Gehauen zu befolgen, die erſt nach 20 bis 30 Jahren ſchlagbar werden. Daher muß bei der Zählung der Bäume auch zugleich mit auf das Wachsthum geſehen werden, und es müſſen alſo vorzüglich alle die Stämme gezählt werden, die mit der äußerſten Spitze über andere herauswachſen und zum fernern Fortwuchſe Hofnung geben.

3) Stangendickige, deren Stangen unter 6 Zoll im Durchmeſſer halten, werden zwar auch durchgezählet, und zwar ſo, daß die zum Durchzählen gewählte Perſonen, nur etwa 5 bis 6 Schritte, je nachdem die Stangen dicke ſtehen, von einander entfernt angeſtellt werden und ſo fort gehen, daß ſie alſo die bis zum nächſten Zähler rechts und links ſtehenden Stangen merken, und für jede zehn Stück einen Punkt in die dazu verfertigte Tabelle eintragen. Iſt auf dieſe Art das Dickig durchgezählt worden, ſo werden die von jeder Perſon angemerkten Punkte zuſammen addirt, und mit 10 multiplicirt, um auf dieſe Art die Anzahl aller Stangen zu erhalten. Um dieſe zu erhalten, nimmt der die Zählung dirigirende Förſter die Summe aller einzelnen Zähler zuſammen, behandelt ſie auf die angezeigte Art, und bringt alle gefundenen einzelnen Summen in eine Hauptſumme. Da aber auch hier manche Unrichtigkeit im

im Zählen vorgehen kann, ſo iſt es gut, wenn auch nur ein Morgen oder eine Quadratruthe dieſes Stangendickigs durchgezählt wird, und zwar von jeder Art einer, nämlich an Orten, wo das Dickig gleich, und an Orten wo daſſelbe ungleich beſtanden, um daraus das Mittel eines Probemorgens, oder einer Proberuthe zu erhalten. Hat man eine ſolche Probefläche, ſo kann man den Inhalt des Dickigs ſuchen, durch die Anzahl der Stangen im Probemorgen oder in der Proberuthe dividiren, und man erhält in einer Mittelzahl die Anzahl der Stangen im Dickige.

Man habe z. B. auf einer Quadratruthe 25 Stück Stangen gefunden, (mit der Vorausſetzung, daß man auf jede Quadratruthe des Dickigs, im Mittel 25 Stück Stangen rechnen kann) und die ganze Fläche des Dickigs halte 340 Quadratruthen, ſo hat man

$$25 \cdot 340 = 8500 \text{ Stück Stangen.}$$

Nimmt man mehrere mit ungleich viel Stangen beſtandene Quadratruthen zum Durchzählen, ſo kann man auch die Berechnung des ganzen Dickigs durch Hülfe der Regel detri vornehmen.

Es ſind z. B. 24 Quadratruthen durchgezählt worden. Auf dieſer Fläche hat man zuſammen genommen 576 Stangen gefunden; das Dickig aber halte 6422 Quadratruthen, die Frage iſt, wie groß man die Anzahl von Stangen wohl annehmen könne? Man ſetze:

$$24^{\circ} : 576 \text{ Stangen} = 6422^{\circ} : x$$

und es iſt $x = \frac{576 \cdot 6422}{24} = 154128$ Stangen. Dickige, die noch mit kleinem Anfluge beſtanden, werden nur ausgemeſſen oder nach ihrem Inhalte berechnet, um ſie nach dem Alter, der Güte und dem Beſtande durch eine Morgen- oder Quadratruthenanzahl in einen Anſchlag zu bringen; wie dies alles möglich wird, kann man aus den vorher bemerkten Regeln leicht abnehmen.

Nach dieſen vorangeſchickten Bemerkungen wird es nicht unnütz ſeyn, das, was von der Zählung der Bäume oder von der Taxation eines Waldes iſt bemerkt worden, durch ein Beiſpiel zu erläutern.

Man nehme zu dieſem Zwecke das Freudenberger Forſtrevier, Tab. III. noch einmal vor. Dieſes Revier theilt ſich vermöge natürlicher Abtheilungen durch die Wege ꝛc. die daſſelbige durchſchneiden, in ſieben kleinere Reviere oder Unterabtheilungen, welche mit den Zahlzeichen 1, 2, 3, 4 ꝛc. bemerkt ſind.

Nach Anzeige des Förſters, der über dieſen Forſt die Aufſicht und Verwaltung hat, iſt die Beſchaffenheit dieſer Abtheilungen folgende:

N. 1. Hat die Gottesgabiſchen Felder und ein Potaſchewerk auf der einen Seite, auf der andern aber den Weg von Franken nach Lobethal, der das ganze Holz durchſchneidet, zur Gränze, und geht bis an den neuen Weg von Gottesgabe nach Heilsbrunn. Dieſes Revier iſt mit Mittelholze von 6 bis einige 20 Zoll ſtark im Durchmeſſer, und mit einem Stück Birken beſtanden, und faſſet zugleich das Dickig A in ſich, welches Stangen von 3 bis 5 Zoll im Durchmeſſer, und von 30 bis 36 Fuß Höhe enthält. Dieſes Dickig hat 1900 Quadratruthen am Inhalt, deren eine in die andere gerechnet, 21 Stangen hat, ſo daß alſo für den Beſtand des Dickigs mit Zuverläßigkeit 39900 Stück Stangen angeſetzt werden können.

N. 2. Läuft am fränkiſchen Wege hin bis an die Straße von Gottesgabe nach Heilsbrunn, und wird auf der andern Seite von den Heilsbrunner und fränkiſchen Feldern umgeben. Es iſt mit altem Kihnenholze, deſſen Durchmeſſer in den kleinſten Stämmen wenigſtens 20 Zoll beträgt, und überdies mit größtentheils ſchönen Eichen, Buchen, Rüſtern und Ellern nach

der

der Lache zu, und endlich mit einigen Birken beſtanden. Das Dickig F, welches hieher gehört, iſt ziemlich gut, und mit Stangen von 4 bis 5 Zoll Stärke, und 30 — 40 Fuß Höhe bewachſen. Es hält 496 Quadratruthen Fläche und nach richtiger Berechnung 9920 Stangen in der Summe der Anzahl.

N. 3. Hat Mittelkihnenholz, von wenigſtens 9 bis 20 Zoll Stärke, und 50 bis 70 Fuß Höhe. Das dazu gehörige Dickig C faſſet 430 Quadratruthen und an 10750 Stangen von 3 bis 4 Zoll Stärke in ſich. Die Gränzen dieſer Abtheilung ſind die gerade Straße von Gottesgabe nach Heilsbrunn, und der alte krummlinige Weg, der eben dahin gehet, nebſt der Gnadenwieſe, welche an die große Lache anſtößt.

N. 4. Iſt nur ein kleiner Strich des Waldes, mit Eichen, Buchen, Rüſtern, Birken und etwas wenigen alten kihnen Holze, was bereits 20 Zoll ſtark iſt, beſtanden. Er hat eben die vorigen Gränzen, und geht gegen Süden an die Heilsbrunner Felder.

N. 5. Gränzt an die Gottesgabiſchen Felder, an das Lobethaliſche Revier, und wird im Holze von dem alten Heilsbrunner Wege und dem Wege nach Liebegrün abgeſchnitten. Es hat größtentheils Mittelholz von 9 bis 20 Zoll ſtark, und 40 bis 70 Fuß hoch, ohne Vermiſchung einer andern Holzart.

N. 6. Hat zur Gränze das Lobethaliſche Revier und deſſen Weg nach Gottesgabe. Es iſt mit Mittelholze wie N. 5. und einigen Eichen und Buchen beſtanden, und begreift das Dickig B und D in ſich, davon das erſtere 470, das andere aber 590 Quadratruthen in der Fläche hält. Jenes iſt mit Stangen von 4 bis 5 Zoll, und dieſes von 3 bis 4 Zoll ſtark, bewachſen. Beide ſtehen gut, B enthält 11280 und D 14160 Stangen, wenn ſie nach dem Flächeninhalte berechnet

werden, weil man auf jede Quadratruthe 24 Stück gezählt hat, welche ohngefähr ein Alter von 20 Jahren zeigen.

No. 7. Wird von den Lobethaliſchen und Liebengrüniſchen Wege, davon der letztere nach Heilsbrunn geht, und den Heilsbrunner und Friedrichſteiner Feldern umgeben. Es iſt mit lauter altem Holze von 18 bis 35 Zoll im Durchmeſſer, mit Eichen, Birken, und an der Friedrichsſteiner Gränze hinauf, auch mit Ellern beſtanden. In ſich enthält es noch überdies das Dickig E, welches 900 Quadratruthen in der Fläche hat, und mit 18000 Stangen, die bereits 5 Zoll Stärke und 40 Fuß Höhe erreicht haben, beſtanden iſt.

Und dieſe Gegend iſt es, deren Bäume gezählt und deren Holzbeſtand, ſo viel wie möglich, genau beſtimmt werden ſoll. Hierzu wird mit der Abtheilung No. 1. der Anfang gemacht. Man ſtelle den rechten Flügel der Durchzähler oder der Taxatoren an den fränkiſchen Weg, der nach Lobethal geht, und den linken nach der Zeichnung Tab. III. in die Gegend gf. Jeder Perſon, deren Anzahl 12 ſeyn mag, gebe man im erſten Gliede, das zum Durchzählen bereits angeſetzt worden iſt, und aus 8 Perſonen beſteht, von jeder Gattung der Nägel etwa 300 Stück, und den 4 Perſonen im zweiten Gliede, welche die angeſteckten Nägel abnehmen, eine Tabelle, in welcher die Laubholzarten verzeichnet, und oben die verſchiedenen Durchmeſſer der Stämme angeführt enthalten, damit ſie in die darunter ſtehenden leeren Fächer, die auf der Fläche des Forſts befindlichen Laubholzarten, und zwar jeden Stamm an ſeinen Ort, nur mit einem Punkte, eintragen können.

Auf

Auf dieſe Art laſſe man dieſe erſte Abtheilung, als ein kleines Revier, in 2 bis 3 Gängen durchgehen. Nach Endigung dieſes Geſchäfts werde gefunden, daß

a) Fr. Wilhelm Nauck

von d. erſt. Sort.	44 Näg.	behalten,	u. alſo	256 St.	angeſteckt.	
zweit. —	110	—	—	190	—	—
dritt. —	29	—	—	271	—	—
viert. —	290	—	—	10	—	—
fünft. —	292	—	—	8	—	—

b) Caſpar Julius

hat v. d. weißen	77 St.	behalten,	u. alſo	223 St.	angeſteckt.	
ſchwarz.	82	—	—	218	—	—
rothen	104	—	—	196	—	—
grünen	276	—	—	24	—	—
gelben	294	—	—	6	—	—

c) Michael Honig

hat von weißen	18 St.	behalten,	u. alſo	282 St.	angeſteckt.	
ſchwarz.	64	—	—	236	—	—
rothen	177	—	—	123	—	—

d) Sam. Heinr. Sauerbrey

hat von weißen	96 St.	behalten,	u. alſo	204 St.	angeſteckt.	
ſchwarz.	14	—	—	286	—	—
rothen	20	—	—	280	—	—

e) Joh. George Süßteig

hat von weißen	45 St.	behalten,	und alſo	255 St.	angeſteckt.	
ſchwarz.	218	—	—	82	—	—
rothen	109	—	—	191	—	—
blauen	290	—	—	10	—	—

f) Wolfg. Grundmann

hat von weißen 43 St. behalten, u. alſo 257 St. angeſteckt.

ſchwarz.	45	—	—	255	—	—
rothen	96	—	—	204	—	—
grünen	282	—	—	18	—	—

g) Hans Jungnickel

hat von weißen 27 St. behalten, u. alſo 273 St. angeſteckt.

ſchwarzen	9	—	—	291	—	—
rothen	10	—	—	290	—	—

h) Nickel Friedemann

hat von weißen 11 St. behalten, u. alſo 289 St. angeſteckt.

ſchwarzen	19	—	—	281	—	—
rothen	79	—	—	221	—	—
gelben	280	—	—	20	—	—

Hiernächſt kommen nun auch die übrigen vier Mann, welche die verſteckten Nägel wiederum abgenommen, und die Laubholzarten, welche hier nur in Birken beſtehen, in ihren Tabellen angemerkt.

a) Jacob Dölpſch

bringt 56 St. deren Stärke 6 Zoll, die Höhe aber 30′ beträgt.

17	—	—	9″	—	—	30′	—
77	—	—	15″	—	—	40′	—

b) George Demens

bringt 12 St. deren Stärke 6″, die Höhe aber 30′ beträgt.

9	—	—	9″	—	—	33′	—
49	—	—	12″	—	—	40′	—

c) Andreas Waldmann

bringt 81 St. deren Stärke 6″, die Höhe aber 30′ beträgt.

24	—	—	9″	—	—	30′	—
36	—	—	15″	—	—	40′	—

d) Benj.

d) Benj. Lobgeſang

bringt 5 St.	deren Stärke	6″,	die Höhe aber	30′	beträgt.
19 —	—	9″	—	— 30′	—

Ueber dieſes gehöret auch noch das Dickig A hierher, welches durchgehends ein gutes Wachsthum zeiget, und wie vorhin angemerket worden, 39900 Stangen von 3 bis 5″ im Durchmeſſer in ſich faſſet.

Dieſes alles nimmt der die ganze Sache dirigirende Förſter zuſammen, und träget es in eine dazu bereits verfertigte Tabelle, welche ohngefähr alſo ausfallen könnte:

Taxations-Tabelle A.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier
den 26. May 1766.

Die erſte Abtheilung, welche zwiſchen dem Fränkiſchen Wege und den Gottesgaber Feldern liegt, und mit No. 1. bezeichnet iſt.

1) Kiefern oder Kihnen Mittelholz. 2) Laubholz an Birken.

Namen der Taxatoren	Höhe / Durchmeſſer	40′ bis 60′ 6″ weiß	40′ bis 60′ 9″ ſchwarz	40′ bis 60′ 12″ roth	40′ bis 60′ 15″ grün	40′ bis 60′ 18″ gelb	40′ bis 60′ 21″ blau	30′ bis 40′ 6″	30′ bis 40′ 9″	30′ bis 40′ 12″	30′ bis 40′ 15″	30′ bis 40′ 18″
Friedr. Wilh. Nauck		256	190	271	110	98	—	—	—	—	—	—
Caſpar Julius		223	218	196	124	96	—	—	—	—	—	—
Michael Honig		282	236	123	—	—	—	—	—	—	—	—
Sam. Heinr. Sauerbrey		204	286	280	150	2	—	—	—	—	—	—
Joh. George Süßteig		255	182	191	50	7	10	—	—	—	—	—
Wolfgang Grundmann		257	255	204	118	9	—	—	—	—	—	—
Hans Jungnickel		273	291	290	—	2	—	—	—	—	—	—
Nickel Friedemann		289	281	221	—	20	—	—	—	—	—	—
Beträgt in der Summe		2039	1939	1676	552	234	10	—	—	—	—	—
Jacob Dölpſch		—	—	—	—	—	—	56	17	1	77	—
Caſpar Demens		—	—	—	—	—	—	12	9	49	—	—
Andreas Waldmann		—	—	—	—	—	—	81	24	—	36	—
Benjamin Lobgeſang		—	—	—	—	—	—	5	19	—	—	—
Beträgt in der Summe		—	—	—	—	—	—	154	69	50	113	—

Wird

Wird auf dieſe Weiſe fortgefahren, ſo entſtehen daraus folgende Tabellen über das ganze Forſtrevier, welche der Ordnung nach alſo folgen.

Taxations-Tabelle B.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier den 27. May 1766.

Die zweite Abtheilung, welche zwiſchen dem Fränkiſchen Wege und den Heilbrunner und Fränkiſchen Feldern liegt und mit No. 2. bezeichnet iſt.

1) Alt Kiefern Holz.

Namen der Taxatoren	Höhe / Durchmeſſer	50′ — 60′ — 70′ — 80′						
		18″ weiß	21″ ſchwarz	24″ roth	27″ grün	30″ gelb	33″ blau	36″
Friedrich Wilhelm Nauck		277	154	24	126	50	—	—
George Haberkorn		212	215	109	210	125	—	2
Michael Schimmelmann		264	220	25	110	108	—	—
Hans George Rabe		233	223	26	212	204	12	—
Hans Jungnickel		276	207	52	203	110	1	5
Nickel Friedemann		120	115	45	207	112	—	—
Beträgt in der Summe		1382	1134	281	968	709	13	7

2) Laub-

2) Laubholz.

Namen der Taxatoren	Eichen. 40′ — 50′					Buchen. 36′ — 48′				Rüſtern. 40′ — 50′					Birken. 30′ — 40′				Ellern. 24′ — 36′			
Höhe / Durchmeſſer	21″	24″	27″	30″	33″	12″	15″	18″	21″	15″	18″	21″	24″	27″	6″	9″	12″	15″	9″	12″	15″	18″
Andr. Waldmann	109	79	—	10	—	70	101	50	1	18	4	30	10	—	70	10	141	6	113	86	50	—
Jacob Dölpſch	217	10	18	—	—	120	80	31	1	16	—	90	—	—	60	7	—	1	209	57	70	3
Wolfg. Grundmañ	98	34	7	—	10	90	70	22	9	7	—	—	19	1	10	8	40	—	311	109	—	11
Samuel Froſt	191	12	9	20	—	81	61	40	1	9	12	40	—	—	121	14	31	1	99	—	191	4
Hans Vollwitz	24	50	1	—	—	41	20	—	2	10	—	11	20	—	—	7	50	—	18	13	—	—
Beträgt in der Summe	639	185	35	30	10	402	331	143	14	60	16	171	49	1	261	46	272	8	750	265	311	18

Taxations-Tabelle C.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier den 28. May 1766.

Die dritte Abtheilung, welche zwiſchen dem alten und neuen Wege von Gottesgabe nach Heilsbrunn und der Gnadenwieſe liegt, und mit No. 3. bezeichnet iſt.

Kiefern Mittelholz.

Namen der Taxatoren	Höhe / Durchmeſſer	50′ — 60′ — 70′					
		9″ weiß	12″ ſchwarz	15″ roth	18″ grün	21″ gelb	24″ blau
Michel Kranich		17	227	147	254	6	—
Benjamin Lobgeſang		23	236	209	144	33	—
Caſpar Demens		69	275	96	179	77	1
Johann George Süßteig		7	216	24	278	—	—
Friedrich Wunderlich		8	279	110	257	9	—
Heinrich Leberecht		6	218	169	248	—	2
Wolfgang Saumſelig		19	246	144	200	—	—
Beträgt in der Summe		149	1697	899	1560	125	3

Taxa-

Taxations-Tabelle D.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier

den 29. May 1766.

Die vierte Abtheilung, welche zwiſchen der alten und neuen Straße von Gottesgabe und den Heilsbrunner Feldern liegt, und mit No. 4. bezeichnet iſt.

1) Alt Kiefern Holz hat

Samuel Biſchof allein gezählet und angegeben
282 Stämme von 18″, 256 Stämme von 21″ und 116 Stämme von 24″.

Die Höhe dieſes Holzes iſt 60 bis 70 Schuh.

2) Laubholz, und zwar

	Eichen.				Buchen.			Rüſtern.			Birken.	
Höhe	40′ — 50′				40′ — 50′			36′ — 48′			40′—50′	
Namen der Taxatoren / Durchmeſſer	21″	24″	27″	30″	21″	24″	27″	12″	15″	18″	18″	21″
Sauerbrey	49	77	73	10	24	19	4	70	86	—	37	7
Maßte	107	71	37	21	33	—	7	91	97	52	43	4
Süßteig	94	34	16	—	—	88	6	150	149	47	27	3
Julius	66	—	—	80	106	7	1	66	5	—	86	—
Beträgt in der Summe	316	192	126	111	163	114	18	377	337	99	193	14

Taxa-

Taxations=Tabelle E.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier den 30. May 1766.

Die fünfte Abtheilung, welche zwiſchen dem Gottesgaber- und Lobethaliſchen Revier, und dem Liebegrüniſchen und alten Heilsbrunner Wege liegt, und mit No. 5. bezeichnet iſt.

Kiefern Mittelholz.

Namen der Taxatoren	Höhe / Durchmeſſer	50′ — 60′						
		9″ weiß	12″ ſchwarz	15″ roth	18″ grün	21″ gelb	24″ blau	27″
Daniel Fuchs		196	271	296	117	127	2	—
Caſpar Julius		97	219	287	296	4	—	—
Michael Honig		89	242	124	203	203	—	—
Nickel Friedemann		177	179	297	204	102	—	—
Jacob Dölpſch		289	204	286	216	—	—	—
Samuel Spielmagen		124	97	217	232	110	—	—
Hans George Pollack		72	63	181	296	214	—	—
Friedr. Wilh. Nauck		118	145	225	117	—	—	—
Beträgt in der Summe		1162	1420	1913	1681	760	2	—

Vom Laubholze

iſt nichts gefunden worden, als 33 Eichen von 27″ im Durchmeſſer, und 9 Stück dergleichen von 30″ Stärke, und nächſt dieſen hat Martin Funke auch noch 7 Ellern von 21″ und drüber aufgezeichnet.

Taxa-

Taxations-Tabelle F.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier
den 2. Junii 1766.

Die ſechſte Abtheilung, welche zwiſchen dem Lobethaliſchen Revier und deſſen Wege nach Gottesgabe liegt, und mit No. 6. bezeichnet iſt.

Namen der Taxatoren	1) Kiefern Mittelholz. Höhe: 50′ — 60′					2) Eichen, Buchen. Höhe: 40′—50′		Höhe: 40′ — 50′		
Durchmeſſer	9″ weiß	12″ ſchwarz	15″ oth	18″ grün	21″ gelb	21″	24″	18″	21″	24″
Hans Jacob Böhme	217	203	296	87	4	—	—	—	—	—
Wolfgang Grundmann	283	264	100	79	—	—	—	—	—	—
Caſpar Julius	194	24	124	12	—	—	—	—	—	—
Caſpar Demens	187	119	283	19	3	—	—	—	—	—
Haus Jungnickel	217	234	272	7	2	—	—	—	—	—
Martin Vogel	109	243	155	—	—	—	—	—	—	—
Martin Meerkatze	97	73	214	14	1	—	—	—	—	—
Reinicke Fuchs	173	247	136	—	2	—	—	—	—	—
Beträgt in der Summe	1477	1407	1580	218	12	—	—	—	—	—
Jacob Döipſch	—	—	—	—	—	74	6	140	7	61
Benjamin Lobgeſang	—	—	—	—	—	17	37	—	36	—
Nickel Friedemann	—	—	—	—	—	38	—	40	74	12
Michael Honig	—	—	—	—	—		71	61		71
Beträgt in der Summe	—	—	—	—	—	129	114	241	117	144

Taxa-

Taxations-Tabelle G.

Ueber das Freudenberger Forſtrevier den 3. Junii 1766.

Die ſiebente Abtheilung, welche zwiſchen den Lobethaliſchen und Liebegrüniſchen Wegen, und den Heilsbrunner und Friedrichſteiner Feldern liegt, und mit No. 7. bezeichnet iſt.

1) Alt Kiefern Holz.

Namen der Taxatoren	Höhe	60′	—	70′	—	80′		
	Durchmeſſer	18″ weiß	21″ ſchwarz	24″ roth	27″ grün	30″ gelb	33″ blau	36″
Hans Rothbart		276	239	174	263	124	96	7
Benjamin Eigenſinn		243	108	252	273	387	9	2
Peter Krug		290	43	97	—	103	7	—
Jacob Dölpſch		209	281	273	139	205	2	6
Peter Riman		276	143	239	—	224	1	—
Michael Honig		223	77	283	277	263	—	—
Beträgt in der Summe		1517	891	1318	952	1206	115	15

2) Laubholz.

Namen der Taxatoren	Höhe	Eichen. 60′ — 70′				Birken. 30′ — 40′ — 50′					Ellern. 30′ — 40′ — 50′			
	Durchmeſſer	21″	24″	27″	30″	12″	15″	18″	21″	24″	6″	9″	12″	15″
Hans Ge. Fuchs		66	96	4	21	23	17	92	6	2	124	14	70	—
Michael Haaſe		23	—	7	—	42	18	7	—	—	136	83	60	21
George Sommer		14	39	27	32	4	—	9	7	1	94	17	31	—
Paul Garaus		24	17	—	41	16	8	—	4	—	67	9	—	51
Beträgt in der Summe		127	152	38	94	85	53	108	17	3	421	123	161	72

Iſt

Iſt auf dieſe Art das ganze Revier durchgezählt und alles genau in die vorſtehenden Tabellen eingetragen worden, ſo bleibt nichts übrig, als aus dieſen einzelnen Tabellen eine Haupttabelle zu entwerfen, woraus man den ganzen Beſtand des auf dem Reviere beſindlichen Holzes mit einem Blicke überſehen kann. Eine ſolche Tabelle dient nun in der Folge zur Grundlegung einer genauen Bewirthſchaftung des Reviers, und gehört demnach eigentlich zum Forſthaushalte.

Als eine ſolche dient nun die beigefügte Haupt-Tabelle des Freudenberger Forſtreviers, die aber nach Zweck und Umſtänden verändert, erweitert und verkürzt werden kann. Sie ſoll bloß zeigen, wie es möglich iſt, den Zuſtand und den gegenwärtigen Beſtand eines Reviers in einer gewiſſen Ordnung zu überſehen und beſtimmt anzugeben.

Haupt-

Haupt-Tabelle des Freudenberger Forſtreviers

von dem,

was den daſelbſt befindlichen Holzbeſtand betrifft, welches den 26. May bis zum 4. Junius 1766. ausgezählet, berechnet, und, wie folget, an weſentlichem Vorrath befunden worden.

1) Schwarzholz.

Die Gegend des Reviers, wo gezählet worden, ſiehe	Die Zeit, in welcher ſolches geſchehn, ſammt der Anzahl der Perſonen	Alt Holz. Kiefern. Höhe 50′ — 60′ — 70′ — 80′ Durchmeſſer 18″	21″	24″	27″	30″	33″	36″
Tab. A.	am 26 May mit 12 Perſonen	—	—	—	—	—	—	—
— B.	— 27 — — 11 —	1382	1134	281	968	709	13	7
— C.	— 28 — — 7 —	—	—	—	—	—	—	—
— D.	— 29 — — 1 —	282	256	116	—	—	—	—
— E.	— 30 — — 8 —	—	—	—	—	—	—	—
— F.	— 2 Jun. — 12 —	—	—	—	—	—	—	—
— G.	— 3 — — 10 —	1517	891	1318	952	1206	115	15
Die Hauptſumme von jeder Art		3181	2281	1715	1920	1915	128	22

Die Gegend des Reviers, wo gezählet worden, ſiehe	Mittel Kiefern. 50′ — 60′ — 70′ 6″	9″	12″	15″	18″	21″	24″	Stangendickige. halten im Dickige	an Stangen	deren Höhe	und deren Durchmeſſer.
Tab. A.	2039	1939	1676	552	234	10	—	A.	39900	30′ — 36′	3″ — 5″
— B.	—	—	—	—	—	—	—	B.	11280	30′ — 40′	4″ — 5″
— C.	—	149	1697	899	1560	125	3	C.	10750	30′ — 36′	3″ — 4″
— D.	—	—	—	—	—	—	—	D.	14160	30′ — 36′	3″ — 4″
— E.	—	1162	1420	1913	1681	760	2	E.	18000	— — 40′	— — 5″
— F.	—	1477	1407	1580	218	12	—	F.	9920	30′ — 40′	4″ — 5″
— G.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Die Hauptſumme von jeder Art	2039	4727	6200	4944	3693	907	5	und	104,010	Stangen.	

2) Laubholz.

Die Gegend des Reviers, wo gezählet worden, ſiehe	Die Zeit, in welcher ſolches geſchehen, ſammt der Anzahl der Perſonen	Eichen. Höhe 40′ — 50′ — 60′ Durchmeſſer 21″	24″	27″	30″	33″	Buchen. 40′ — 50′ — 60′ 12″	15″	18″	21″	24″	27″
Tab. A.	am 26 May mit 4 Perſonen	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— B.	— 27 — — 5 —	639	185	35	30	10	402	331	143	14	—	—
— D.	— 29 — — 4 —	316	192	126	111	—	—	—	—	163	114	18
— E.	— 30 — — 4 —	—	—	33	9	—	—	—	—	—	—	—
— F.	— 2 Jun. — 4 —	129	114	—	—	—	—	—	241	117	144	—
— G.	— 3 — — 4 —	127	152	38	94	—	—	—	—	—	—	—
Die Hauptſumme von jeder Art		1211	643	232	244	10	402	331	384	294	258	18

Die Gegend des Reviers, wo gezählet worden, ſiehe	Rüſtern. 40′ — 50′ 12″	15″	18″	21″	24″	27″	Birken. 30′ — 40′ — 50′ 6″	9″	12″	15″	18″	21″	24″	Ellern. 30′ — 40′ — 50′ 6″	9″	12″	15″	18″	21″
Tab. A.	—	—	—	—	—	—	154	69	49	113	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— B.	—	60	16	171	49	1	261	46	272	8	—	—	—	—	750	265	311	18	—
— D.	377	337	99	—	—	—	—	—	—	—	193	14	—	—	—	—	—	—	—
— E.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7
— F.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
— G.	—	—	—	—	—	—	—	—	85	53	108	17	3	421	123	161	72	—	—
Die Hauptſumme von jeder Art	377	397	115	171	49	1	415	115	406	174	301	31	3	421	873	426	383	18	7

Allgemeine Anmerkung über die Zählung der Bäume eines Forſtreviers oder über die Forſt-Taxationsmethoden.

Seit der Zeit, als Vierenklee ſeine Anfangsgründe der Forſt-Arithmetik und Geometrie ſchrieb, iſt man in dieſem Fache der Forſtwirthſchaft ungemein weit vorgerückt. Um indeß nicht vorzugreifen und irgend eine Methode, die Bäume zu zählen, oder überhaupt die Forſten zu taxiren, als die beſte zu empfehlen, iſt die Vierenkleeſche beibehalten worden, die doch in der That manches Gute und brauchbare in ſich begreift. Da wir jetzt eine Menge von Schriften über dieſen Gegenſtand haben, welche das Taxationsgeſchäft nicht bloß berühren, ſondern vollſtändig abgehandelt enthalten, ſo iſt es nur noch nöthig, einige der wichtigſten Schriften dieſer Art anzuzeigen, weil ſich ein jeder Förſter ſehr leicht mit ihrem Inhalte bekannt machen, das für Ort und Umſtände Brauchbare daraus entlehnen, oder ſich zu dieſer oder jener Methode ſchlagen und darnach ſeine Geſchäfte einrichten kann. Indeß wird auch dieſe Anzeige und das Studium dieſer Schriften nur den Nutzen haben können, mehrere Methoden mit einander zu vergleichen, weil in jeder Provinz eigene Vorſchriften zu dieſen Geſchäften ertheilt und gewöhnlich Tabellen vorgeſchrieben werden, nach welchen bei der Taxation verfahren werden muß.

Unter die wichtigſten Schriften dieſer Art gehören unſtreitig folgende:

Das von Burgsdorfiſche mehrmals erwähnte Forſthandbuch, worin die allgemeinen Vorſchriften enthalten ſind, auf welche Art das Taxationsgeſchäft der Forſten im Preußiſchen vorgenommen werden muß.

Anweiſung zur Taxation der Forſten nach den hierüber ergangenen und bereits bei vielen Forſten in Ausübung gebrachten Königl. Preuß. Verordnungen, mit Genehmigung des Königl. Preuß. Forſt-Departements, Eines hohen General-Direktorii herausgegeben, von C. W. Hennert. K. Pr. Geh. Forſt-Rathe. Erſter Theil, mit zwei illuminirten Kupfern. Berlin und Stettin 1791. Zweiter Theil 1795.

Dieſes Werk iſt unſtreitig das Hauptwerk über das Taxationsgeſchäft, und enthält alles, was ein Preuß. Forſtoffiziant davon zu wiſſen nöthig hat. Die vielen Tabellen, die eine deutliche Ueberſicht, theils über einzelne Gegenſtände, theils über das ganze Geſchäft geben, machen es für jeden Geſchäftsmann dieſes Faches brauchbar. Demnach findet man in dieſem Werke wenigſtens die Taxationsmethode, ſo wie die Eintheilung und Bewirthſchaftung der Preußiſchen Forſten vollſtändig beiſammen.

Ein Auszug dieſes großen Werks iſt in der Kürze nicht möglich und nicht rathſam, weil das Ganze durchaus in den Händen eines jeden Forſtoffizianten ſeyn ſollte, er mag nun im Preuß. oder in irgend einem andern Staate dienen.

Als einen Auszug des erſten Theils dieſes Werks kann man folgende nützliche Schrift anſehen: Ueber Forſttaxirung und Ausmittelung des jährlichen nachhaltigen Ertrags zum Gebrauche oberdeutſcher Taxatoren, Geometer und Förſter. Von G. A. Dätzel. München 1793.

In gleichem Werthe und in einigen Stücken mit Vorzügen verſehen, ſteht das folgende Buch mit dem angeführten: Anweiſung zur Taxation der Forſte oder Beſtimmung des Holzertrags der Wälder. Von Georg Ludwig Hartig, Fürſtl. Solmſiſchen Forſtmeiſter. Nebſt einer illuminirten

Forſt-

Forſt=Charte und mehreren Tabellen. Gieſſen 1795.

In dieſem leicht und gründlich bearbeiteten Werke wird vorzüglich auf den Zuwachs des Holzes Rückſicht genommen, die Zwiſchenbenutzung der Reviere gezeigt, und die Eintheilung der Wälder in gleich große Schläge oder Gehaue nach dem Flächeninhalte verworfen.

Beide Werke ſind ſo eingerichtet, daß ſie derjenige auch verſtehen kann, der nur mit den Anfangsgründen der gemeinen Arithmetik bekannt iſt, wenn auch im erſtern einige Formeln aus der allgemeinen Arithmetik vorkommen.

Endlich gehören noch hierher die oben (Abtheilung 2.) genannten Schriften über Taxation oder Schäzzung der Forſten von Reitter und Wieſenhaver.

Die Gründe der Waldtaxation hat Hr. Prof. Späth in der mehrmals erwähnten Anleitung die Mahematik und Phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen nützlich anzuwenden ꝛc. §. 16. ſehr deutlich auseinandergeſetzt.

Die Forſtordnungen, in welchen gewöhnlich alle diejenigen Methoden angezeigt werden, nach welchen bei Forſtgeſchäften eines jeden Orts zu verfahren iſt, findet man nach alphabetiſcher Ordnung der Länder und Orte, im allgemeinen Repertorium der Forſtwiſſenſchaftlichen Litteratur, von D. Ch. W. J. Gatterer Theil I. Abſchn. II. §. 43. S. 199. ff.

XI.

Von der Berechnung des Holzbeſtandes auf einem Reviere, deſſen Bäume gezählt worden ſind.

§. 80.

Nachdem aus den vorhergehenden Unterſuchungen gefunden worden iſt, mit was für Arten Holz das Forſterrevier

revier beſtanden, wie viel Stämme von ſtarkem, mittlerm und ſchwachem Holze vorhanden, auch was an Stangen und Dickige bereits zur fernern Benutzung herangewachſen iſt; ſo hat der Forſtoffiziant nur noch dafür zu ſorgen, aus dem Beſtande zu finden, wie viel Klaftern oder Malter der Holzbeſtand enthält, um darnach jährliche Gehaue ſo anzulegen, daß ſie mit dem Holzbeſtand in einem ſolchen Verhältniſſe ſtehen, daß das Holz nicht auf einmal verwüſtet, ſondern ſo bewirthſchaftet werde, daß auch die Nachkommen keinen Mangel, weder an Bau- noch Nutz- und Feuerholz haben. Und dieſes Geſchäft macht die gegenwärtigen Aufgaben nöthig.

§. 81.

Aufgabe.

Zu finden, wie viel Klaftern oder Malter an Holze ein ganzes Revier oder ein Forſt oder ein anders Gehölze gebe, wenn der Holzbeſtand durch Zählung oder Taxation geſucht worden iſt.

Auflöſung.

Man unterſuche in den Taxationstabellen, was für Holzarten, und von welcher Beſchaffenheit jede derſelben, auf dem gegebenen Revier vorhanden ſind. Von jeder Gattung nehme man einen Stamm, und berechne ſeinen körperlichen Inhalt (§. 61.). Dieſen Inhalt multiplicire man mit der Anzahl ſeiner Gattung, und addire alle dieſe Produkte zuſammen. Die gefundene Hauptſumme giebt den Beſtand des ganzen Holzes in Kubikfußen und Kubikzollen, welche man in Klaftern oder Malter nach Gefallen verwandeln kann.

Nimmt man z. B. das durchgezählte oder taxirte Freudenberger Forſtrevier, und zwar nur das darin befindliche Nadel- oder Schwarzholz, ſo findet man

eilfer-

eilferlei Arten in Anſehung der Stärke und Höhe auſſer den Stangen, die aus der gegenwärtigen Rechnung wegbleiben ſollen. Man beſtimme die Stämme nach dem mittlern Durchmeſſer, welcher bei der Berechnung des Inhalts zum Grunde gelegt wird.

2039	Stāme,	deren	mittlerer	Durchm.	5″,	die	Höhe aber	40′
4727	—	—	—	—	7″	—	—	48′
6200	—	—	—	—	8″	—	—	48′
4944	—	—	—	—	10″	—	—	60′
6874	—	—	—	—	11″	—	—	60′
3188	—	—	—	—	13″	—	—	68′
1715	—	—	—	—	15″	—	—	72′
1920	—	—	—	—	16″	—	—	76′
1915	—	—	—	—	18″	—	—	80′
128	—	—	—	—	19″	—	—	84′
22	—	—	—	—	20″	—	—	84′

Was erhält man aus dieſem Holzvorrathe in Klaftern, deren Scheitlänge 4 Fuß iſt, oder in Maltern, welche 4′ hoch, 4′ breit und 4′ tief geſetzt werden?

Die gegenwärtige Aufgabe wird nach den bekannten Regeln aufgelöſt, und ſoll bloß als Muſter zu ähnlichen Rechnungen dienen.

a) Die erſte Art der angemerkten und gezählten Bäume, deren mittlerer Durchmeſſer 5 Zoll, folglich das Quadrat davon 25, und deren Höhe 40 Fuß beträgt, betragen 2039 Stück. Dieſe zu berechnen verfährt man auf folgende Art:

$$1000 : 785 = 25 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 25}{1000} = 19\, Z^2\ 62\, L^2\ 50\, S^2$;

als die Grundfläche eines ſolchen Stammes. Nun beträgt die Höhe 40′ oder 400″ oder 4000‴ oder 40000⁗; folglich

 196250

$$\begin{array}{r} 196250 = \text{Grundfläche} \\ 40000 = \text{Höhe} \\ \hline 7850000000, \end{array}$$ d. i.

7 Kubikfuß und 850 Kubikzoll körperlicher Inhalt eines Stammes dieſer Art. Wird dieſe Zahl mit der Anzahl aller Bäume dieſer Art multiplicirt, ſo erhält man 2039 . 7850 = 16026 Kubikfuß und 150 Kubikzolle, körperlicher Inhalt aller Bäume dieſer erſten Art.

b) Die zweite Art der Stämme hat 7″ Stärke, alſo das Quadrat davon iſt 49, und 48 Fuß Höhe, und ihrer ſind 4727 Stück an der Zahl. Man ſetze auch hier

$$1000 : 785 = 49 : x$$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 49}{1000} = 38\,Z^2\,46\,L^2\,50\,S^2$.

Die Höhe iſt 48′ oder 48000‴′, folglich 384650 × 48000 = 18 Kubikfuß 463 Kubikzoll 200 Kubiklinien, körperlicher Inhalt eines Stammes. Die Kubiklinien kann man ohne einen beträchtlichen Unterſchied zu veranlaſſen, wegnehmen, und dadurch die Rechnung abkürzen. Multiplicirt man dieſe gefundene Zahl mit der Anzahl der Bäume dieſer Art, ſo hat man 18463 . 4727 = 87274 Kubikfuß und 601 Kubikzoll als den körperlichen Inhalt aller Bäume der zweiten Art.

c) Die dritte Art Bäume hat 8″ Stärke, das Quadrat iſt daher 64, und 48′ Höhe und ihre Zahl beträgt 6200 Stämme.

Um die Rechnung abzukürzen, bediene man ſich der zu Ende des Buchs befindlichen Tafeln, nämlich Tab. 3. welche vom Herrn Förſter Kröhne nach dieſem Schlage berechnet worden ſind, und wodurch man zugleich den Gebrauch derſelben erlernt.

In der erſten Reihe Tab. 3. ſtehen die Zahlen, welche die Höhe der Bäume in Decimalfu-

ßen

ßen ausdrücken; in der zweiten Reihe die mittleren Durchmeſſer in Zollen; in den letzten Reihen aber die Zahlen für den körperlichen Inhalt der Bäume in Kubikfußen, Zollen und Linien. Man ſucht zur gegenwärtigen Abſicht in der zweiten Reihe die Zahl der gegebenen Zolle des Durchmeſſers, das ſind hier 8″, und in der erſten die Zahl der Höhe, hier 48′. In der dritten Reihe findet man dazu 24 F^3 115 Z^3 für den körperlichen Inhalt des Baums. Dieſen multiplicirt man mit der Anzahl der Bäume dieſer Art und man bekommt den körperlichen Inhalt aller zur Gattung gehörigen Bäume alſo:

24115″ . 6200 = 149513 Kubikfuß Inhalt aller Stämme von der dritten Art.

d) Die vierte Art enthält 4944 Stämme von 10″ Stärke und 60′ Höhe. Der Inhalt eines ſolchen Stamms iſt nach Tab. 3. 47 L^3 100 Z^3; daher

4944 . 47100 = 232862 Kubikfuß und 400 Kubikzoll der körperliche Inhalt aller Stämme der vierten Art.

e) Die fünfte Art hat Bäume von 11″ Durchmeſſer und 60′ Höhe, und von Inhalt nach Tab. 3. 56 F^3 991 Z^3 und ſolcher Bäume ſtehen 6874 Stück auf dem Reviere. Ihr körperlicher Inhalt iſt 56991 . 6874 = 391776 Kubikfuß 134 Kubikzolle.

f) Die ſechste Art hat im Durchmeſſer 13″ und 68′ Höhe, und der Inhalt iſt 90 F^3 212 Z^3. Solcher Stämme giebt es 3188; folglich iſt der Inhalt aller zuſammen genommen 90212 . 3188 = 287595 Kubikfuße 856 Kubikzoll.

g) Die ſiebente Art beſteht in 1715 Stück, deren Durchmeſſer 15″, die Höhe 72′, der Inhalt aber 127 F^3 170 Z^3 beträgt. Demnach iſt der Inhalt ſämmtlicher Bäume dieſer Art 127170 . 1715 = 218096 Kubikfuß 550 Kubikzoll.

h) Die

h) Die achte Art begreift 1920 Stück, von 16″ Durchmeſſer und 76′ Höhe. Jeder hat 152729 Z^3 körperlichen Inhalt, und alle zuſammen 152729 . 1920 = 293239 Kubikfuß 680 Kubikzoll.

i) Die neunte Art iſt 1915 Stück ſtark. Jeder von 18″ Durchmeſſer, 80′ Höhe und 203472 Z^3 Inhalt. Zuſammen genommen aber beträgt der Inhalt 203472 . 1915 = 389648 Kubikfuß 880 Kubikzoll.

k) Die zehnte Art, deren Anzahl 128 Stämme beträgt, welche 19″ Durchmeſſer, 84′ Höhe und 238 F^3 043 Z^3 haben. Zuſammen macht ihr körperlicher Inhalt 238043 × 128 = 30469 Kubikfuß 604 Kubikzoll.

l) Die eilfte und letzte Sorte des Schwarzholzes auf dem gedachten Reviere beträgt 22 Stämme, jeder von 20″ im Durchmeſſer und 84′ in der Höhe. Der Inhalt eines Stammes iſt 263 F^3 760 Z^3; mithin der ſämmtliche Inhalt 263760 . 22 = 5802 Kubikfuß 720 Kubikzoll.

Die Inhalte jeder Art bringe man nun in eine Summe:

a	=	16026150	Kubikzoll
b	=	87374601	—
c	=	149513000	—
d	=	232862400	—
e	=	391776134	—
f	=	287595856	—
g	=	218096550	—
h	=	293239680	—
i	=	389648880	—
k	=	30469604	—
l	=	5802720	—

2102405575″, oder 2102405 Kubikfuß und 575 Kubikzoll, die Hauptſumme des körperlichen Inhalts aller gezählten Stämme des Schwarzholzes, außer den Stangen,

gen, wie ſolches auf dem Freudenberger Revier, den 3. Jun. 1766 gefunden und berechnet worden iſt.

Nun ſoll dieſer Inhalt aber nicht in dem angegebenen Körpermaße ſtehen bleiben, ſondern in Klaftern und Malter verwandelt werden. Man dividire daher mit der Anzahl der Kubikfuße, die auf eine Klafter oder auf einen Malter gerechnet werden, in die gefundene Zahl des ſämmtlichen Holzbeſtandes. Nimmt man dazu eine Klafter von 4′ Scheitlänge, ſo enthält dieſe 130 Kubikfuß (§. 57.) und einen Malter von 4′ Tiefe, Breite und Höhe, ſo hat dieſer $57\frac{7}{9}$ Kubikfuß Inhalt (§. 58.). Dieſe Zahlen ſind die Diviſoren, welche in den Kubikinhalt des ſämmtlichen Holzbeſtandes dividirt, im Quotient den Klafter- oder Malterbeſtand des ganzen Schwarzwaldes des Reviers angeben. Man ſetze, um die Anzahl der Klaftern zu erhalten:

$$\frac{130'}{130000''} : 1 \text{ Klafter} = 2102405575'' : x$$

$$\text{und es iſt } x = \frac{2102405575}{130000} = 16172,$$

d. i. der Holzbeſtand beträgt 16172 Klaftern von 4 Fuß Scheitlänge, und etwa noch 45 Kubikfuß und 575 Kubikzoll.

Um die Anzahl der Malter zu erhalten, verfahre man auf eben die Art; oder man ſuche die Malter durch Vergleichung mit der Anzahl der Klaftern, nach der am Ende des Buchs angehängten Vergleichungstabelle unter Tab. 5. Die Vergleichung gründet ſich auf das oben gefundene Reſultat, daß 4 Klaftern Holz von 4 Fuß Scheitlänge, 9 Malter von 4 Fuß Höhe, Breite und Tiefe geben; oder kurz, daß 4 Klaftern 9 Malter enthalten.

Nach der vorigen Regel, nach welcher die Klaftern berechnet worden ſind, ſetzt man ſo:

$$\begin{array}{ll} 57\tfrac{7}{9} : 1 = 2102405575 : x \\ 520' \qquad\qquad\quad 9 \\ \overline{520000''} \qquad \overline{18921650175} \end{array}$$

demnach wäre $x = \frac{18921650175}{520000} = 36387$ Malter, 45 Kubikfuß, 575 Kubikzoll der Holzbeſtand.

Oder durch Vergleichung der Klaftern mit den Maltern:

$$4 : 9 = 16172 \text{ Kl.} + 45' 575'' : x$$

und es iſt $x = \frac{16172 \cdot 9}{4} = 36387$ Malter und 45 Kubikfuß, 575 Kubikzoll, welches mit dem vorigen Reſultate übereinſtimmt.

Anmerkung.

Bei der Berechnung des wahren Holzbeſtandes in Klaftern oder Maltern kommt alles darauf an, daß die Bäume auf den Revieren richtig gezählt, und ihr Umfang ſowohl, als ihre Höhe, genau beſtimmt werden, oder überhaupt: die gegenwärtige Berechnung beruht auf einer ganz ſichern Taxation.

Da man dieſe ſo vollkommen, als ſie hierzu nöthig iſt, wohl nie erwarten kann, ſo bleibt der auf die vorgeſchriebene Art ausgemittelte Holzbeſtand auch nur eine ungefähre Angabe, und kann höchſtens als eine Mittelzahl angeſehen werden, worauf ſich ein Etat bauen läßt, der mit dem Zuſtande der Forſten in ungefährem Verhältniſſe ſteht.

XII.

Von dem jährlichen Zuwachſe des Holzes.

§. 82.

Fichten, Kihnen oder Kiefern und Tannen aben, nach Beſchaffenheit des Bodens, in welchem ſie ſtehen,

ſtehen, und der für jede Art insbeſondere zuträglich iſt, faſt einerlei Wachsthum. Dieſe Holzarten wachſen, nach der Erfahrung, in gutem, für ihre Natur zuträglichem Erdreiche in 70 Jahren, in mittelmäßig gutem in 90, und in ſchlechtem Boden in 110 Jahren etwa 25 bis 30 Zoll einer Dresdner Werkelle im Durchmeſſer ihrer untern Grundfläche, und 80 Fuß und drüber an Höhe. Dieſe Wachsthumszunahme hat der Herr von Zanthier im Leipz. Intelligenzbl. von 1763 Blatt 10. in Tabellen bekannt gemacht, und bis auf das 150ſte Jahr ihres Alters fortgeführt, unter der Vorausſetzung, daß keine äußern Hinderniſſe das Wachsthum ſtören. Werden die genannten Arten von Bäumen älter, so fällt das augenſcheinliche Wachsthum immer mehr und mehr weg, und wird endlich wegen der allzuzarten Jahrringe dem Auge unerkenntlich, bis ſie ihr höchſtes Alter von 200 Jahren erreicht haben, in welchem ſie wieder allmählich abſterben.

Die Laubhölzer wachſen, jede Art nach ihrer Natur, theils ſtärker, theils ſchwächer. So ſetzt z. B. eine Eiche einen Zoll im Durchmeſſer an, indeß die Buche 1½ Zoll, der Ahorn, die Eller und Eſche 2 Zoll anſetzt. Linden, Rüſtern und Birken haben mit der Eiche beinah einerlei Wachsthum. Dieſer Fortwuchs dauert bei den Eichen etwa 300, bei den Buchen 150, bei Linden, Ahorn und Rüſtern 200, bei den Birken 50, bei den Ellern 30, und bei den Eſchen etwa 100 Jahre. Sind dieſe guten Wachsthumsjahre verſtrichen, ſo wird ihr Wachsthum nach und nach vermindert, und es erreicht unter geringem Fortwachſen die Eiche etwa in 600, die Buche in 300, die Linde, der Ahorn und die Rüſter in 400, die Birke in 80, die Eller in 60, und die Eſche etwa in 200 Jahren ihr höchſtes Ziel.

Will man auf den jährlichen Zuwachs der Laubhölzer einen Etat gründen, ſo muß jede der genannten Arten nach

$$57\tfrac{7}{9} : 1 = 2102405575 : x$$

520′	9
520000″	18921650175

demnach wäre $x = \frac{18921650175}{520000} = 36387$ Malter, 45 Kubikfuß, 575 Kubikzoll der Holzbeſtand.

Oder durch Vergleichung der Klaftern mit den Maltern:

$$4 : 9 = 16172 \text{ Kl.} + 45' 575'' : x$$

und es iſt $x = \frac{16172 \cdot 9}{4} = 36387$ Malter und 45 Kubikfuß, 575 Kubikzoll, welches mit dem vorigen Reſultate übereinſtimmt.

Anmerkung.

Bei der Berechnung des wahren Holzbeſtandes in Klaftern oder Maltern kommt alles darauf an, daß die Bäume auf den Revieren richtig gezählt, und ihr Umfang ſowohl, als ihre Höhe, genau beſtimmt werden, oder überhaupt: die gegenwärtige Berechnung beruht auf einer ganz ſichern Taxation.

Da man dieſe ſo vollkommen, als ſie hierzu nöthig iſt, wohl nie erwarten kann, ſo bleibt der auf die vorgeſchriebene Art ausgemittelte Holzbeſtand auch nur eine ungefähre Angabe, und kann höchſtens als eine Mittelzahl angeſehen werden, worauf ſich ein Etat bauen läßt, der mit dem Zuſtande der Forſten in ungefährem Verhältniſſe ſteht.

XII.

Von dem jährlichen Zuwachſe des Holzes.

§. 82.

Fichten, Kihnen oder Kiefern und Tannen aben, nach Beſchaffenheit des Bodens, in welchem ſie ſtehen,

ſtehen, und der für jede Art insbeſondere zuträglich iſt, faſt einerlei Wachsthum. Dieſe Holzarten wachſen, nach der Erfahrung, in gutem, für ihre Natur zuträglichem Erdreiche in 70 Jahren, in mittelmäßig gutem in 90, und in ſchlechtem Boden in 110 Jahren etwa 25 bis 30 Zoll einer Dresdner Werkelle im Durchmeſſer ihrer untern Grundfläche, und 80 Fuß und drüber an Höhe. Dieſe Wachsthumszunahme hat der Herr von Zanthier im Leipz. Intelligenzbl. von 1763 Blatt 10. in Tabellen bekannt gemacht, und bis auf das 150ſte Jahr ihres Alters fortgeführt, unter der Vorausſetzung, daß keine äußern Hinderniſſe das Wachsthum ſtören. Werden die genannten Arten von Bäumen älter, ſo fällt das augenſcheinliche Wachsthum immer mehr und mehr weg, und wird endlich wegen der allzuzarten Jahrringe dem Auge unerkenntlich, bis ſie ihr höchſtes Alter von 200 Jahren erreicht haben, in welchem ſie wieder allmählich abſterben.

Die Laubhölzer wachſen, jede Art nach ihrer Natur, theils ſtärker, theils ſchwächer. So ſetzt z. B. eine Eiche einen Zoll im Durchmeſſer an, indeß die Buche 1½ Zoll, der Ahorn, die Eller und Eſche 2 Zoll anſetzt. Linden, Rüſtern und Birken haben mit der Eiche beinah einerlei Wachsthum. Dieſer Fortwuchs dauert bei den Eichen etwa 300, bei den Buchen 150, bei Linden, Ahorn und Rüſtern 200, bei den Birken 50, bei den Ellern 30, und bei den Eſchen etwa 100 Jahre. Sind dieſe guten Wachsthumsjahre verſtrichen, ſo wird ihr Wachsthum nach und nach vermindert, und es erreicht unter geringem Fortwachſen die Eiche etwa in 600, die Buche in 300, die Linde, der Ahorn und die Rüſter in 400, die Birke in 80, die Eller in 60, und die Eſche etwa in 200 Jahren ihr höchſtes Ziel.

Will man auf den jährlichen Zuwachs der Laubhölzer einen Etat gründen, ſo muß jede der genannten Arten nach

ihrem Boden, Jahren und Durchmeſſer unterſucht und ausgemeſſen werden.

Wird durch Verſuche mit mehrern Stämmen von einerlei Art eine mittlere Zahl ausgemacht, ſo erhält man wenigſtens eine ungefähre Kenntniß vom zu erwartenden jährlichen Zuwachſe der genannten Holzarten. Da es aber noch an ſolchen mittlern Zahlen für alle Arten von Laubholz fehlt, ſo wird es hier genügen, aus dem angeführten Wachsthume des Nadel- oder Schwarzholzes einige Sätze zu ziehen, nach welchen man den ungefähren Zuwachs dieſes Holzes berechnen kann.

Man nehme nach vorhergegangenen Unterſuchungen den Zuwachs eines Baumes im Durchmeſſer ſo an, wie er aus vielfachen Erfahrungen in mittlern Zahlen gefunden wird, und ſetze z. B. daß ein Baum in

gutem	Boden	$3\frac{1}{2}$ Zoll	oder	$35'''$
mittelmäßigem	—	$2\frac{7}{10}$ —	—	$27'''$
ſchlechtem	—	$2\frac{1}{5}$ —	—	$22'''$

an ſeinem Durchmeſſer zunehme.

Nach dem Forſtmagazine Band 3. S. 9. §. 13. ſoll der Zuwachs des Holzes ein Jahr ins andere gerechnet

in gutem	Boden in	3 Jahren	1	Zoll
mittelmäßigem	— —	4 —	1	—
ſchlechtem	— —	5 —	1	—

betragen. Dürre, kalte und brüchige Waldörter machen auch hiervon noch Ausnahmen.

§. 83.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt des Zuwachſes eines Baums für einige Jahre zu berechnen.

Auflö-

Aufloſung.

Man ſuche den Inhalt des Baums, ſo wie er gegeben, und zwar ſo, daß er wie ein Kegel betrachtet wird (§. 61.). Dieſen Baum berechne man alsdenn nach dem Zuwachſe des Durchmeſſers für die Jahre, die er noch ſtehen ſoll, auf eben die Art. Zieht man nun den erſt gefundenen Inhalt von dem letztern ab, ſo giebt der Reſt den Zuwachs für die Jahre an, die er noch ſtehen ſoll. Dieſen Zuwachs kann man entweder in Kubikfußen, Zollen ꝛc. oder in Klaftern oder Maltern ausdrücken.

Z. B. Es ſei ein Baum gegeben, deſſen unterer Durchmeſſer 36 Zoll iſt, und der 90 Fuß Höhe hat. Er ſtehe auf mittelmäßigem Boden, und wachſe in 5 Jahren $1\frac{1}{2}$ Zoll oder 15‴ im Durchmeſſer.

Wenn dieſer Baum erſt nach 10 Jahren geſchlagen werden ſoll, wie viel wird er unter dieſer Zeit an Holze Zuwachs erhalten?

Man ſetze $1000 : 785 = 36^2$ oder $1296 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 1296}{1000} = 101736$ Quadratlinien der Grundfläche des Baums.

Da nun die Höhe 90′ oder 9000‴ beträgt, und der Baum als ein Kegel berechnet wird, ſo iſt $\frac{1}{3}$ von 9000 oder $3000 \cdot 101736 = 305$ Kubikfuß 208 Kubikzolle der körperliche Inhalt.

Nun ſoll er noch 10 Jahre ſtehen, und während dieſer Zeit 3″ Zuwachs am Durchmeſſer haben, ſo daß er nach 10 Jahren 39″ ſtark iſt, und an der Höhe 6″ gewinnen, ſo daß dieſe nach 10 Jahren 906″ beträgt, und man erhält

$1000 : 785 = 39^2$ oder $1521 : x$

und es iſt $x = \frac{785 \cdot 1521}{1000} = 1193985$ Quadratſkrupel = der Grundfläche des Baums.

Da nun hier die Höhe 906″ oder 90600‴ beträgt, und der Baum als ein Kegel berechnet wird, ſo iſt $\frac{1}{3}$ von 90600 oder 30200. 11939850 = 360 Kubikfuß 583 Kubikzoll und 470 Kubiklinien der körperliche Inhalt des Baums nach 10 Jahren.

Der letztere Inhalt iſt = 360583470‴
Der erſtere Inhalt war = 305208000‴

folglich der Zuwachs = 55375470‴, d. i. der Baum hat innerhalb 10 Jahren 55 Kubikfuß und 375 Kubikzolle Zuwachs erhalten. Die noch übrigen Linien, die noch keinen halben Kubikzoll betragen, können weggelaſſen werden.

§. 84.

Aufgabe.

Den Zuwachs des Holzes auf einem Revier auf einige Jahre zu berechnen.

Auflöſung.

Man berechne zuvörderſt den körperlichen Inhalt einer jeden Holzart ohne, und hiernächſt mit dem Zuwachſe, in einem einzigen Stamme von jeder Art, und multiplicire dieſen durch die Anzahl der gegebenen Stämme. Auf dieſe Art verfahre man durch alle Holzarten, und bringe zuletzt alles in eine Hauptſumme.

Zieht man die Hauptſumme des Inhalts des gegenwärtigen Holzes, von der Hauptſumme des Inhalts des Holzes mit dem Zuwachſe auf einige Jahre ab, ſo zeigt der Reſt die Größe des zu hoffenden Zuwachſes innerhalb der gegebenen Jahre.

Anmerkung.

Da dieſe Berechnung alle Aehnlichkeit mit der vorigen hat, ſo iſt in Zahlen Beiſpiele hier zu geben unnöthig.

§. 85.

Aufgabe.

Den jährlichen Zuwachs auf 100 Klaftern Holz zu finden.

Auflöſung.

Man nehme den gefundenen Zuwachs (§. 84.) dividire denſelben durch die Anzahl der Jahre, binnen welcher er erfolgt iſt, ſo hat man denſelben für den gegebenen Holzbeſtand auf ein Jahr. Nun berechne man ſo wohl den geſammten Holzbeſtand, als auch den auf ein Jahr gefundenen Zuwachs nach Klaftern, und ſetze endlich: Wie ſich der Holzbeſtand an Klaftern zu dem einjährigen Zuwachſe des Holzes verhält; ſo verhalten ſich 100 Klaftern zu ihrem jährlichen Zuwachſe.

Anmerkung.

Dieſe letzte Aufgabe wird nach den Königl. Preußl. Forſtverordnungen nach folgendem Satze zu berechnen befohlen:

Der Zuwachs auf eine gewiſſe Anzahl Klaftern kann durch Vergleichung zweier Probemorgen im jungen und im alten haubaren Holze von gleichem Beſtande beſtimmt, und hiernach der jährliche Zuwachs auf eine gewiſſe Anzahl Klaftern ausgemittelt werden. Die Berechnung ſelbſt des während des Haues in geometriſcher Progreſſion abnehmenden Zuwachſes geſchieht durch die Summirung einer geometriſchen Progreſſion.

Allgemeine Anmerkung über den Zuwachs des Holzes überhaupt.

Dieſes gegenwärtige XIIte Stück iſt aus folgenden Urſachen abgekürzt worden. Einmal iſt darin der Zu-

wachs des Holzes nicht genau genug ausgemittelt, und dann die Art des Zuwachſes gegen Gründe der Phyſik angenommen worden.

Daß ein Holzſtamm in 10 Jahren 6 Zoll in der Höhe wachſe, iſt ein bloßer willkührlicher Satz, und daß die Jahrringe, welche gegenwärtig im Splinte liegen, wenn dieſer ſich durch das Verhärten und das dichtere Anlegen der Holzfaſern zu Holz bildet, alsdenn noch dieſelbe Breite behalten ſollten, welche ſie als Splint halten, ſtreitet gegen die Natur des Wuchſes; beides aber müßte wahr ſeyn, wenn die kubiſche Berechnung des Zuwachſes nach Vierenklee mit der Erfahrung zutreffen ſollte.

In neuern Zeiten iſt die gegenwärtige Materie von allen Seiten näher unterſucht, und beſtimmt worden, woraus ſich denn auch ſichere Methoden zur Berechnung des Zuwachſes haben herleiten laſſen. Da dieſe Methoden aber über die Elemente des gegenwärtigen Unterrichts hinausreichen, ſo kann davon kein Gebrauch gemacht werden. Wäre die Anlage des Ganzen aber ſo gemacht worden, daß die Gründe zu dieſen Berechnungen mit gehöriger Deutlichkeit hätten entwickelt werden können, ſo wäre der Vierenklee ein ganz anderes Buch geworden, welches aber nicht ſeyn ſollte. Da ferner die Vorausſetzungen zu dieſen Berechnungen ſelbſt ſo weitumfaſſend ſind, und dieſe Lehre in eigenen Schriften vorgetragen iſt, ſo konnte hier in der Kürze eine ſo wichtige Lehre nicht in ihrer ganzen Vollſtändigkeit aufgenommen werden, wenn ſie nicht von ihrer Eigenthümlichkeit verlieren, oder durch Buchſtabenrechnung abgekürzt werden ſollte.

Für diejenigen, die ſich dem Forſtweſen ganz widmen wird es hinreichend ſeyn, auf die Schriften aufmerkſam zu machen, welche unter andern auch dieſe Materie in ihrem ganzen Umfange ausgeführt enthalten.

Hierzu

Hierzu gehören: des K. Pr. Geh. Forſtrath C. W. Hennerts Anweiſung zur Taxation der Forſten, 1r und 2r Theil. Mehrere Abtheilungen oder §§. des erſten Theils mit den dazu gehörigen Tabellen; ferner die Nachträge §. 81. ꝛc. im zweiten Theile, ebenfalls mit Tabellen, worin man beſtimmtere und der Natur der Sache angemeſſenere Reſultate für den Zuwachs des Schwarz- und Laubholzes findet, mit allen dazu nöthigen Rechnungsformen. Des Fürſtl. Solmſiſchen Forſtmeiſters G L. Hartigs Anweiſung zur Taxation der Forſte ꝛc. Kap. 4. Abtheil. 1. Von Unterſuchung des Holzzuwachſes in Hochwäldern S. 24 fg. Berechnung des Zuwachſes an dem Eichen- Buchen- und Nadelholze. Abtheil. 2. Kap. 2. S. 151 ff.

Da dieſe letztern Berechnungen leicht ſind, ſo können ſie Anfängern vorzüglich empfohlen werden.

Sie beſtehen im Weſentlichen darin:

A. Wie erfährt man den jährlichen Zuwachs an haubarem Holze?

Dieſen Zuwachs findet man auf verſchiedene Art.

1) Man berechne z. B. einen buchenen Stamm von 120jährigem Alter, (denn das Alter der Bäume kann man durch Zählung der Jahrringe finden), und bemerke ſeinen körperlichen Inhalt mit Einbegriff des zu Prügelholz (Klippelholz) dienlichen Aſtholzes. Hierauf ziehe man vom ganzen Durchmeſſer eines jeden beſonders berechneten Cylinderſtückes den doppelten Betrag der äußerſten 20 Jahrringe ab, welches man leicht thun kann, wenn ſo tief auf einer Seite perpendikuläre Kerben in den Stamm gehauen werden, daß ſich 20 Jahrringe zurück zählen laſſen, und berechne den Stamm nach der Dicke, welche er im hundertſten Jahre hatte. Dieſe letzte Summe ziehe man von der erſten ab, ſo wird man finden, wie viel Holzzuwachs der Stamm in ſeinen letzten 20 Jahren erhalten hat. Auch

kann man durch die Diviſion mit 20 erfahren, wie hoch ſich der jährliche Zuwachs vom 100ſten bis 120ſten Jahre im Durchſchnitt belaufe. Geſetzt, der 120jährige Stamm enthielte 60 Kubikfuße, nach Abzug der äußerſten 20 Jahrringe aber blieben nur 40 Kubikfuße, ſo hat natürlich der Stamm in den letzten 20 Jahren überhaupt 20 Kubikfuße, oder jährlich einen Kubikfuß im Durchſchnitte zugenommen. Man könnte daher auf jeden haubaren Stamm im Forſt einen Kubikfuß Holz jährlich Zuwachs rechnen, wenn alle Stämme in gleich ſtarkem Zuwachs ſtänden.

Da dieſes aber wegen der Verſchiedenheit der Holzarten, des Bodens, der Lage des Waldes und des oft zu hohen Alters nicht möglich iſt; ſo müſſen dieſe Verſuche für jede Holzart, auf verſchiedenen Boden, bei geſchloſſenem und lichtem Stande, und bei merklich verſchiedenem Alter angeſtellt, oft wiederholt, und es muß aus allen Reſultaten ein Mittelſatz für jede Holzart genommen, überhaupt aber lieber etwas zu wenig als zu viel angeſetzt werden, weil es beſſer iſt, einigen Ueberſchuß beim Hauen zu finden, als mit dem Vorrathe nicht auszukommen.

Oder:

2) Man berechne z. B. eine Kihne oder Kiefer von 100 Jahren und eine von 80 Jahren, welche beide auf gleich gutem Boden und an gleichen Waldörtern geſtanden, und ziehe den körperlichen Inhalt der letztern vom Inhalte der erſtern ab; ſo wird man erfahren, wie viel Kubikfuße an der hundertjährigen Kiefer in den letzten 20 Jahren zugewachſen ſind. Man kann folglich auch finden, wie hoch ſich der jährliche Zuwachs an einem Kieferſtamme vom 80ten bis zum 100ten Jahre belaufe. Geſetzt die 100jährige Kiefer enthielte 100 Kubikfuß und die 80jährige 60 Kubikfuße; ſo würde der Zuwachs der erſtern in den letzten 20 Jahren 40 Kubikfuße betragen; folglich im Durchſchnitte jährlich 2 Kubikfuße. Um alſo den jährlichen Zuwachs des ſämmtlichen haubaren Holzes zu erfahren,

ren, muß man die Anzahl der haubaren Stämme mit der im Durchſchnitt gefundenen Zuwachsmaſſe multipliciren, und zu dem Ende die Anzahl der haubaren Stämme aus der gemachten Taxationstabelle berechnen, worin zugleich angemerkt werden muß, wie viel Zuwachs auf jeden Stamm, nach Verſchiedenheit der Holzarten und der Klaſſen, jährlich gerechnet werden kann. Man darf alſo den jährlichen Zuwachs nicht nach der Maſſe, ſondern nach der Anzahl der haubaren Bäume berechnen, in welchen Fehler man fällt, wenn man den jährlichen Zuwachs des ſämmtlichen haubaren Holzvorraths ſo berechnete, daß man nach der Regel Detri ſagte: an 60 Kubikfuße wachſen jährlich 2 Kubikfuße zu; wie viel werden an Kubikfußen des ſämmtlichen haubaren Holzvorrathes jährlich zuwachſen? Durch dieſes Verfahren würde man Zuwachs auf Zuwachs rechnen, welches aber nach der Natur der Sache nicht Statt finden darf.

Hat man z. B. in einem haubaren Buchendiſtrikte gefunden:

1) 1000 Stämme, wovon jeder 1 Klafter giebt, und jährlich 1 Kubikfuß zuwächſt.
2) 800 Stämme von $\frac{1}{2}$ Klafter Holzmaſſe, und $\frac{1}{2}$ Kubikfuß Zuwachs.
3) 600 Stämme von $\frac{1}{4}$ Klafter Holzmaſſe und $\frac{1}{4}$ Kubikfuß Zuwachs;

ſo betragen vorſtehende 2420 Stämme 1550 Klaftern, an welchen jährlich 1550 Kubikfuß zuwachſen. Der jährliche Zuwachs an einer Klafter iſt alſo ein Kubikfuß, oder für den Stamm im Durchſchnitt $\frac{31}{48}$ Kubikfuße. Soll nun aber dieſe jetzt gefundene Holzmaſſe und der davon zu hoffende Zuwachs ſo vertheilt werden, daß 6 Jahre lang jährlich eine gleich große Anzahl von Klaftern geſchlagen werden kann, ſo muß die ganze Klafterſumme des gegenwärtig gefundenen haubaren Holzes durch 6 dividirt, der Zuwachs, welcher bei Verminderung der Hauptmaſſe jährlich abnimmt, für

jedes Jahr beſonders ausgeworfen, die Hauptſumme ebenfalls durch 6 dividirt, dieſes letzte $\frac{1}{6}$ zum $\frac{1}{6}$ der Hauptmaſſe addirt, und ſo die jährlich zu ſchlagende Klafteranzahl, oder das Holzquantum beſtimmt werden.

Man rechne daher in gegenwärtigem Falle alſo: Aus 1550 Klaftern gegenwärtig taxirter haubarer Holzmaſſe, beträgt das $\frac{1}{6}$ jährlich $258\frac{1}{3}$ Klafter. Der jährliche Zuwachs iſt:

im 1ten Jahre	aus	1550 Klaftern		1550 Kubikfuß	
— 2ten	—	$1291\frac{2}{3}$	—	$1291\frac{2}{3}$	—
— 3ten	—	$1033\frac{1}{3}$	—	$1033\frac{1}{3}$	—
— 4ten	—	775	—	775	—
— 5ten	—	$516\frac{2}{3}$	—	$516\frac{2}{3}$	—
— 6ten	—	$258\frac{1}{3}$	—	$258\frac{1}{3}$	—
zuſammen in 6 Jahren				5425 Kubikfuß.	

Davon $\frac{1}{6}$, oder auf ein Jahr $904\frac{1}{6}$ Kubikfuß, oder 9 Klaftern, wobei vorausgeſetzt wird, daß eine Klafter von 4′ Scheitlänge, ſtatt 144, nur 100 Kubikfuß Holzmaſſe habe, alſo im Durchſchnitt der leere Raum 44 bis 46 Kubikfuß groß iſt. Dieſe 9 Klaftern zu den obigen $258\frac{1}{3}$ addirt, giebt die jährlich zu ſchlagende Holzmaſſe in $267\frac{1}{3}$ Klaftern. Hierbei iſt zu merken, daß wenn die Taxation im Herbſte gemacht iſt, und das nämliche Jahr fürs erſte gerechnet wird, kein Zuwachs angerechnet werden darf, weil er für dieſes Jahr ſchon in der Taxation begriffen iſt.

Dieſe Vergleichung des Zuwachſes iſt zwar nicht aufs äußerſte genau, weil ein weitläuftigerer Kalkul etwas mehr Zuwachs giebt; doch iſt ſie richtig genug für dieſe Berechnung, wodurch man nur der Wahrheit nahe kommen will, weil ſie in dieſem Falle vollkommen unmöglich erreicht werden kann.

B) Wie erfährt man den periodiſchen und totalen Holzertrag der jungen Waldungen?

Aus der Erfahrung iſt hinlänglich bekannt, daß die Nutzung aus den Hochwaldungen nicht auf einmal, ſondern nach und nach erfolgt, weil nämlich die jungen, anfangs ſehr dicht ſtehenden Waldungen, zu Beförderung ihres beſſern Wachsthums, von Zeit zu Zeit durchhauen, und die unterdrückten Stämme weggenommen werden müſſen.

Um alſo den periodiſchen Holzertrag eines Morgen Waldes und eines ganzen Forſts zu berechnen, und das Verhältniß des Holzbeſtandes im Forſt, in Rückſicht ſeines Alters überſehen zu können, iſt eine, nach den verſchiedenen Zwiſchenhauungen und nach der merklichen Verſchiedenheit des Alters eingerichtete Klaſſifikation jeder Holzſorte, nöthig.

Man bringt daher die eichene Baumwaldungen, welche 200 Jahre alt werden ſollen, von 40 zu 40 Jahren in 5 Klaſſen. Die buchene Hochwaldungen, welche 120 Jahre wachſen ſollen, werden von 30 zu 30 Jahren in 4 Klaſſen eingetheilt. Die Nadelholzwaldungen, welche 100 Jahre ſtehen bleiben ſollen, bringt man von 20 zu 20 Jahren in 5 Klaſſen. Niederwaldungen, welche in 30jährigen Umtrieb geſetzt werden, theilt man von 10 zu 10 Jahren in 3, Reiſerholzreviere aber, die alle 15 Jahre abgebuſchet werden, von 5 zu 5 Jahren, ebenfalls in 3 Klaſſen. Bei den Niederwaldungen iſt die Klaſſifikation deswegen nöthig, um das Verhältniß des Holzbeſtandes in einem Forſte darnach beurtheilen zu können.

Den Zuwachs oder künftigen Ertrag einer jeden Holzſorte zu erfahren, verfährt man auf folgende Art:

Man laſſe z. B. in einem 30 bis 40jährigen Buchenwalde von gutem Beſtande, Boden und Lage, einen Probemorgen ordnungsmäßig durchforſten (S. L. Hartigs

An-

wachs des Holzes nicht genau genug ausgemittelt, und dann die Art des Zuwachſes gegen Gründe der Phyſik angenommen worden.

Daß ein Holzſtamm in 10 Jahren 6 Zoll in der Höhe wachſe, iſt ein bloßer willkührlicher Satz, und daß die Jahrringe, welche gegenwärtig im Splinte liegen, wenn dieſer ſich durch das Verhärten und das dichtere Anlegen der Holzfaſern zu Holz bildet, alsdenn noch dieſelbe Breite behalten ſollten, welche ſie als Splint halten, ſtreitet gegen die Natur des Wuchſes; beides aber müßte wahr ſeyn, wenn die kubiſche Berechnung des Zuwachſes nach Vierenklee mit der Erfahrung zutreffen ſollte.

In neuern Zeiten iſt die gegenwärtige Materie von allen Seiten näher unterſucht, und beſtimmt worden, woraus ſich denn auch ſichere Methoden zur Berechnung des Zuwachſes haben herleiten laſſen. Da dieſe Methoden aber über die Elemente des gegenwärtigen Unterrichts hinausreichen, ſo kann davon kein Gebrauch gemacht werden. Wäre die Anlage des Ganzen aber ſo gemacht worden, daß die Gründe zu dieſen Berechnungen mit gehöriger Deutlichkeit hätten entwickelt werden können, ſo wäre der Vierenklee ein ganz anderes Buch geworden, welches aber nicht ſeyn ſollte. Da ferner die Vorausſetzungen zu dieſen Berechnungen ſelbſt ſo weitumfaſſend ſind, und dieſe Lehre in eigenen Schriften vorgetragen iſt, ſo konnte hier in der Kürze eine ſo wichtige Lehre nicht in ihrer ganzen Vollſtändigkeit aufgenommen werden, wenn ſie nicht von ihrer Eigenthümlichkeit verlieren, oder durch Buchſtabenrechnung abgekürzt werden ſollte.

Für diejenigen, die ſich dem Forſtweſen ganz widmen wird es hinreichend ſeyn, auf die Schriften aufmerkſam zu machen, welche unter andern auch dieſe Materie in ihrem ganzen Umfange ausgeführt enthalten.

Hierzu

Hierzu gehören: des K. Pr. Geh. Forſtrath C. W. Hennerts Anweiſung zur Taxation der Forſten, 1r und 2r Theil. Mehrere Abtheilungen oder §. §. des erſten Theils mit den dazu gehörigen Tabellen; ferner die Nachträge §. 81. ꝛc. im zweiten Theile, ebenfalls mit Tabellen, worin man beſtimmtere und der Natur der Sache angemeſſenere Reſultate für den Zuwachs des Schwarz- und Laubholzes findet, mit allen dazu nöthigen Rechnungsformen. Des Fürſtl. Solmſiſchen Forſtmeiſters G L. Hartigs Anweiſung zur Taxation der Forſte ꝛc. Kap. 4. Abtheil. 1. Von Unterſuchung des Holzzuwachſes in Hochwäldern S. 24 fg. Berechnung des Zuwachſes an dem Eichen- Buchen- und Nadelholze. Abtheil. 2. Kap. 2. S. 151 ff.

Da dieſe letztern Berechnungen leicht ſind, ſo können ſie Anfängern vorzüglich empfohlen werden.

Sie beſtehen im Weſentlichen darin:

A. Wie erfährt man den jährlichen Zuwachs an haubarem Holze?

Dieſen Zuwachs findet man auf verſchiedene Art.

1) Man berechne z. B. einen buchenen Stamm von 120jährigem Alter, (denn das Alter der Bäume kann man durch Zählung der Jahrringe finden), und bemerke ſeinen körperlichen Inhalt mit Einbegriff des zu Prügelholz (Klippelholz) dienlichen Aſtholzes. Hierauf ziehe man vom ganzen Durchmeſſer eines jeden beſonders berechneten Cylinderſtückes den doppelten Betrag der äußerſten 20 Jahrringe ab, welches man leicht thun kann, wenn ſo tief auf einer Seite perpendikuläre Kerben in den Stamm gehauen werden, daß ſich 20 Jahrringe zurück zählen laſſen, und berechne den Stamm nach der Dicke, welche er im hundertſten Jahre hatte. Dieſe letzte Summe ziehe man von der erſten ab, ſo wird man finden, wie viel Holzzuwachs der Stamm in ſeinen letzten 20 Jahren erhalten hat. Auch

kann man durch die Diviſion mit 20 erfahren, wie hoch ſich der jährliche Zuwachs vom 100ſten bis 120ſten Jahre im Durchſchnitt belaufe. Geſetzt, der 120jährige Stamm enthielte 60 Kubikfuße, nach Abzug der äußerſten 20 Jahrringe aber blieben nur 40 Kubikfuße, ſo hat natürlich der Stamm in den letzten 20 Jahren überhaupt 20 Kubikfuße, oder jährlich einen Kubikfuß im Durchſchnitte zugenommen. Man könnte daher auf jeden haubaren Stamm im Forſt einen Kubikfuß Holz jährlich Zuwachs rechnen, wenn alle Stämme in gleich ſtarkem Zuwachs ſtänden.

Da dieſes aber wegen der Verſchiedenheit der Holzarten, des Bodens, der Lage des Waldes und des oft zu hohen Alters nicht möglich iſt; ſo müſſen dieſe Verſuche für jede Holzart, auf verſchiedenen Boden, bei geſchloſſenem und lichtem Stande, und bei merklich verſchiedenem Alter angeſtellt, oft wiederholt, und es muß aus allen Reſultaten ein Mittelſatz für jede Holzart genommen, überhaupt aber lieber etwas zu wenig als zu viel angeſetzt werden, weil es beſſer iſt, einigen Ueberſchuß beim Hauen zu finden, als mit dem Vorrathe nicht auszukommen.

Oder:

2) Man berechne z. B. eine Kihne oder Kiefer von 100 Jahren und eine von 80 Jahren, welche beide auf gleich gutem Boden und an gleichen Waldörtern geſtanden, und ziehe den körperlichen Inhalt der letztern vom Inhalte der erſtern ab; ſo wird man erfahren, wie viel Kubikfuße an der hundertjährigen Kiefer in den letzten 20 Jahren zugewachſen ſind. Man kann folglich auch finden, wie hoch ſich der jährliche Zuwachs an einem Kieferſtamme vom 80ten bis zum 100ten Jahre belaufe. Geſetzt die 100jährige Kiefer enthielte 100 Kubikfuß und die 80jährige 60 Kubikfuße; ſo würde der Zuwachs der erſtern in den letzten 20 Jahren 40 Kubikfuße betragen; folglich im Durchſchnitte jährlich 2 Kubikfuße. Um alſo den jährlichen Zuwachs des ſämmtlichen haubaren Holzes zu erfahren,

ren, muß man die Anzahl der haubaren Stämme mit der im Durchſchnitt gefundenen Zuwachsmaſſe multipliciren, und zu dem Ende die Anzahl der haubaren Stämme aus der gemachten Taxationstabelle berechnen, worin zugleich angemerkt werden muß, wie viel Zuwachs auf jeden Stamm, nach Verſchiedenheit der Holzarten und der Klaſſen, jährlich gerechnet werden kann. Man darf alſo den jährlichen Zuwachs nicht nach der Maſſe, ſondern nach der Anzahl der haubaren Bäume berechnen, in welchen Fehler man fällt, wenn man den jährlichen Zuwachs des ſämmtlichen haubaren Holzvorraths ſo berechnete, daß man nach der Regel Detri ſagte: an 60 Kubikfuße wachſen jährlich 2 Kubikfuße zu; wie viel werden an Kubikfußen des ſämmtlichen haubaren Holzvorrathes jährlich zuwachſen? Durch dieſes Verfahren würde man Zuwachs auf Zuwachs rechnen, welches aber nach der Natur der Sache nicht Statt finden darf.

Hat man z. B. in einem haubaren Buchendiſtrikte gefunden:

1) 1000 Stämme, wovon jeder 1 Klafter giebt, und jährlich 1 Kubikfuß zuwächſt.
2) 800 Stämme von $\frac{1}{2}$ Klafter Holzmaſſe, und $\frac{1}{2}$ Kubikfuß Zuwachs.
3) 600 Stämme von $\frac{1}{4}$ Klafter Holzmaſſe und $\frac{1}{4}$ Kubikfuß Zuwachs;

ſo betragen vorſtehende 2420 Stämme 1550 Klaftern, an welchen jährlich 1550 Kubikfuß zuwachſen. Der jährliche Zuwachs an einer Klafter iſt alſo ein Kubikfuß, oder für den Stamm im Durchſchnitt $\frac{31}{48}$ Kubikfuße. Soll nun aber dieſe jetzt gefundene Holzmaſſe und der davon zu hoffende Zuwachs ſo vertheilt werden, daß 6 Jahre lang jährlich eine gleich große Anzahl von Klaftern geſchlagen werden kann, ſo muß die ganze Klafterſumme des gegenwärtig gefundenen haubaren Holzes durch 6 dividirt, der Zuwachs, welcher bei Verminderung der Hauptmaſſe jährlich abnimmt, für

jedes

jedes Jahr beſonders ausgeworfen, die Hauptſumme ebenfalls durch 6 dividirt, dieſes letzte $\frac{1}{6}$ zum $\frac{1}{6}$ der Hauptmaſſe addirt, und ſo die jährlich zu ſchlagende Klafteranzahl, oder das Holzquantum beſtimmt werden.

Man rechne daher in gegenwärtigem Falle alſo: Aus 1550 Klaftern gegenwärtig taxirter haubarer Holzmaſſe, beträgt das $\frac{1}{6}$ jährlich $258\frac{1}{3}$ Klafter. Der jährliche Zuwachs iſt:

im 1ten Jahre	aus	1550	Klaftern	1550	Kubikfuß
— 2ten	—	$1291\frac{2}{3}$	—	$1291\frac{2}{3}$	—
— 3ten	—	$1033\frac{1}{3}$	—	$1033\frac{1}{3}$	—
— 4ten	—	775	—	775	—
— 5ten	—	$516\frac{2}{3}$	—	$516\frac{2}{3}$	—
— 6ten	—	$258\frac{1}{3}$	—	$258\frac{1}{3}$	—
zuſammen in 6 Jahren				5425	Kubikfuß.

Davon $\frac{1}{6}$, oder auf ein Jahr $904\frac{1}{6}$ Kubikfuß, oder 9 Klaftern, wobei vorausgeſetzt wird, daß eine Klafter von 4′ Scheitlänge, ſtatt 144, nur 100 Kubikfuß Holzmaſſe habe, alſo im Durchſchnitt der leere Raum 44 bis 46 Kubikfuß groß iſt. Dieſe 9 Klaftern zu den obigen $258\frac{1}{3}$ addirt, giebt die jährlich zu ſchlagende Holzmaſſe in $267\frac{1}{3}$ Klaftern. Hierbei iſt zu merken, daß wenn die Taxation im Herbſte gemacht iſt, und das nämliche Jahr fürs erſte gerechnet wird, kein Zuwachs angerechnet werden darf, weil er für dieſes Jahr ſchon in der Taxation begriffen iſt.

Dieſe Vergleichung des Zuwachſes iſt zwar nicht aufs äußerſte genau, weil ein weitläuftigerer Kalkul etwas mehr Zuwachs giebt; doch iſt ſie richtig genug für dieſe Berechnung, wodurch man nur der Wahrheit nahe kommen will, weil ſie in dieſem Falle vollkommen unmöglich erreicht werden kann.

B) Wie

B) Wie erfährt man den periodiſchen und totalen Holzertrag der jungen Waldungen?

Aus der Erfahrung iſt hinlänglich bekannt, daß die Nutzung aus den Hochwaldungen nicht auf einmal, ſondern nach und nach erfolgt, weil nämlich die jungen, anfangs ſehr dicht ſtehenden Waldungen, zu Beförderung ihres beſſern Wachsthums, von Zeit zu Zeit durchhauen, und die unterdrückten Stämme weggenommen werden müſſen.

Um alſo den periodiſchen Holzertrag eines Morgen Waldes und eines ganzen Forſts zu berechnen, und das Verhältniß des Holzbeſtandes im Forſt, in Rückſicht ſeines Alters überſehen zu können, iſt eine, nach den verſchiedenen Zwiſchenhauungen und nach der merklichen Verſchiedenheit des Alters eingerichtete Klaſſifikation jeder Holzſorte, nöthig.

Man bringt daher die eichene Baumwaldungen, welche 200 Jahre alt werden ſollen, von 40 zu 40 Jahren in 5 Klaſſen. Die buchene Hochwaldungen, welche 120 Jahre wachſen ſollen, werden von 30 zu 30 Jahren in 4 Klaſſen eingetheilt. Die Nadelholzwaldungen, welche 100 Jahre ſtehen bleiben ſollen, bringt man von 20 zu 20 Jahren in 5 Klaſſen. Niederwaldungen, welche in 30jährigen Umtrieb geſetzt werden, theilt man von 10 zu 10 Jahren in 3, Reiſerholzreviere aber, die alle 15 Jahre abgebuſchet werden, von 5 zu 5 Jahren, ebenfalls in 3 Klaſſen. Bei den Niederwaldungen iſt die Klaſſifikation deswegen nöthig, um das Verhältniß des Holzbeſtandes in einem Forſte darnach beurtheilen zu können.

Den Zuwachs oder künftigen Ertrag einer jeden Holzſorte zu erfahren, verfährt man auf folgende Art:

Man laſſe z. B. in einem 30 bis 40jährigen Buchenwalde von gutem Beſtande, Boden und Lage, einen Probemorgen ordnungsmäßig durchforſten (S. L. Hartigs An-

Anweiſung zur Holzzucht für Förſter, Marburg, 179 S. 15.); notire den Holzertrag, zähle die ſtehen gebliebenen Stangen und Reidel, und meſſe ihre Dicke und Höhe. Hierauf ſuche man einen eben ſolchen Morgen von 50 bis 60jährigem Alter, welcher beinah, oder wo möglich eben ſo viele Reidel enthält, als Stämmchen bei der Durchforſtung ſtehen geblieben. Dieſen Morgen laſſe man durchpläntern und bemerke ebenfalls, ſowohl die Holzmaſſe, welche durch dieſe Hauung erfolgt, als auch die Anzahl, die Höhe und Dicke der jetzt ſtehenbleibenden Reidel. Man ſuche noch ferner, doch immer auf Boden, der in Güte und Lage gleich iſt, einen Holzbeſtand von 80 bis 90jährigem Alter, worauf auf dem Morgen eben ſo viele Stämme ſich finden, als bei der Pläntерung im 50ſten oder 60ſten Jahre ſtehen geblieben waren. Davon laſſe man ebenfalls einen Morgen ordnungsmäßig durchpläntern, und bemerke wieder, ſowohl die geſchlagene Holzmaſſe, als auch die Anzahl und die verſchiedene Stärke der jetzt ſtehenbleibenden Stämme. Endlich laſſe man einen Morgen in haubarem 120jährigem Holze, worauf ſo viele Stämme ſich finden, als bei der Pläntерung im 90ſten Jahre ſtehen bleiben mußten, umhauen, oder ſehr genau taxiren, und zähle ſowohl dieſe als alle vorherige Holzbeuten zuſammen, ſo wird man nicht nur erfahren, wieviel ein ſolcher Morgen Wald in 120 Jahren überhaupt trägt, ſondern man wird auch in Stand geſetzt, zu beſtimmen, auf wie viel Zwiſchennutzungsholz man in jeder Periode auf den Morgen rechnen darf, und wie hoch der Zuwachs eines einzelnen Stammes, nach Verſchiedenheit ſeines Alters, von 30 zu 30 Jahren angeſchlagen werden kann.

Eben dieſe, freilich etwas mühſamen Verſuche müſſen mehrmals wiederholt und von jeder Holzart auf gutem, mittelmäßigem und ſchlechtem Boden, bei gehörig geſchloſſenem Beſtande, angeſtellt, und aus den Reſultaten muß eine

eine beſondere Erfahrungs-Tabelle angefertiget werden. Aus einer Tabelle dieſer Art läßt ſich alsdenn ſo wohl der periodiſche und ſummariſche Zuwachs eines ganzen, gutbeſtandenen Morgen Waldes, als auch der Zuwachs eines einzelnen Stammes ſehr bequem finden.

Geſetzt, man wollte den periodiſchen Zuwachs auf einen Morgen Buchwald vom 30ſten bis 60ſten Jahre wiſſen, ſo berechne man nach der Erfahrungstabelle den ganzen Holzbeſtand im 60ſten Jahre, d. i. ſowohl die gegen das 60ſte Jahr vorfallende Nutzung, als auch den bleibenden Holzbeſtand im Kubikmaße, und ſubtrahire davon den im 30ſten Jahre gebliebenen Holzbeſtand. Der Reſt iſt der geſuchte Zuwachs vom 30ſten bis zum 60ſten Jahre.

Will man aber wiſſen, wie ſtark z. B. ein Buchenſtamm der erſten Größe vom 60ſten bis 90ſten Jahre zuwächſt, ſo darf man nur den körperlichen Inhalt eines Stammes der erſten Größe von 60 Jahren, vom Inhalte eines Stammes der erſten Größe von 90jährigem Alter ſubtrahiren und den Reſt durch 30 dividiren, um den jährlichen Zuwachs vom 60ſten bis 90ſten Jahre im Durchſchnitte zu finden.

Außer dieſen und andern nützlichen Berechnungen, läßt ſich auch aus vollſtändigen Erfahrungstabellen der periodiſche und ſummariſche Holzertrag der nicht vollkommen dicht beſtandenen und der gemiſchten Waldungen beſtimmen. Man darf nämlich nur das Alter, die Verſchiedenheit und die Anzahl der auf einem ſolchen Morgen befindlichen Stämme gehörig unterſuchen, in jeder Periode mit dem Beſtande eines gut beſtandenen Morgens nach den Tabellen vergleichen, und die Nutzung nach dem angenommenen Maßſtabe berechnen. Die Erfahrung durch Probemorgen muß allein den Maßſtab zu dieſen Berechnungen geben, und Proportionen ſo wenig wie Progreſſionen können den Zuwachs beſtimmen, weil die Bäume mit den Jahren nicht verhältnißmäßig zuwachſen.

C) Wie

C. Wie erfährt man den Holzertrag der Niederwaldungen in einem Forſte?

Hierzu führen ebenfalls Verſuche, die aber nicht ſo weitläuftig und mühſam ſind, wie bei den Hochwaldungen, indem in den Niederwaldungen keine Zwiſchenhauungen Statt finden. Man braucht daher nur verſchiedene Male in gutem, mittelmäßigem und ſchlechtem Boden, von jeder Holzart einen haubaren halben oder ganzen Morgen Wald taxiren oder abtreiben zu laſſen und die gefundene Holzmaſſe zu berechnen, welche in jedem Falle herauskommt. Aus den Reſultaten werden auch hier Erfahrungs-Tabellen angefertiget, wornach der Holzertrag ähnlich und gleich beſtandener Waldungen angeſetzt werden kann. Bei ſolchen Niederwaldungen, welche als Reiſerholz benußt werden, iſt das Abhauen eines $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Morgens hinlänglich, um zu erfahren, wie viel hundert Wellen (Bünde) auf den Morgen erfolgen werden. Niederwaldungen aber, welche zu Prügelholz erzogen werden, kann man, ohne einen Theil davon umzuhauen, ſehr genau ſchätzen. Man braucht nur die Stangen nach ihrer verſchiedenen Stärke und Höhe, ſo weit ſie nämlich Prügelholz geben, zu klaſſificiren, die Stangen auf einem $\frac{1}{4}$ Morgen zu zählen, und von jeder Klaſſe den körperlichen Inhalt einer Stange zu ſuchen, ſo wird man mit leichter Mühe und geſchwind finden können, wie viel Kubikfuße Holzmaſſe auf einem Morgen ſteht.

Wird nun der gefundene körperliche Inhalt der ganzen Holzmaſſe durch die Anzahl der Kubikfuße, die man auf eine Klafter Holzmaſſe rechnet, dividirt, ſo giebt der Quotient die Zahl der Klaftern Holz, die ein ſo beſtandener Morgen beim Schlagen liefert. Sicherer aber erhält man den Ertrag für einen Morgen, wenn man ihn aus dem Ertrage eines gleichbeſtandenen ganzen Schlages von mehreren Morgen berechnet.

Vorſtehende Hartigſche Methode, den Zuwachs und Holzertrag zu berechnen, wird hinläng-

länglich ſeyn, die in dieſen Stücken unzuläßigen Methoden des Vierenklee zu ergänzen.

Wer ſich dem Forſtweſen ganz widmet, beſitzt auch ſicher die angeführte Anweiſung zur Taxation der Forſte vom Hrn. Forſtmeiſter Hartig, und kann die gemachte Anmerkung überſchlagen. In dieſer Anweiſung findet man auch bei der gegenwärtigen Materie, Kap. 4. ſehr brauchbare und nöthige Muſter zu den erwähnten Tabellen. In den neueſten Zeiten hat ſich um dieſe Materie, nämlich um den Zuwachs der Bäume, nach phyſikaliſchen Gründen ſowohl, als auch nach Größenbeſtimmung, kein Schriftſteller verdienter gemacht, als Hr. Prof. Späth in Altorf. Da ſeine Behandlungsart aber, wenigſtens in ſeiner neueſten hierher gehörigen Schrift, über die Anfangsgründe der Mathematik hinausreicht, und allgemeine Formeln ſich ohne große Umſchweife nicht durch Worte ausdrücken laſſen; ſo hat in gegenwärtigem Unterrichte, der ſeinem Zwecke nach für Anfänger und ſolche Forſtmänner beſtimmt iſt, die entweder vor jetzt nichts mehr als erſte Anfänger ſind, oder die keine Gelegenheit und Zeit haben, ſich mit höhern Kenntniſſen bekannt zu machen, keine Anwendung davon gemacht werden können. Inzwiſchen wäre zu wünſchen, daß jeder Forſtoffiziant es mit der Zeit ſo weit bringen könnte, ſeine und andere ähnliche Schriften mit Nutzen zu leſen; aus dieſer Urſache verdienen ſie wenigſtens genannt zu werden: Ueber die örtliche progreſſive Wachsthumszunahme der Waldbäume in Anwendung auf den möglichſten Ertrag eines Waldbodens. Nürnberg 1796. Auch ohne Kenntniſſe der allgemeinen Arithmetik verſtändlich; man muß aber das Ganze ſtudiren, um die Reſultate zu faſſen. Ferner deſſelben ſchon erwähnte Anleitung die Mathematik und phyſikaliſche Chemie auf das Forſtweſen nützlich anzuwenden. Hiermit vergleiche man die Erfahrungen über den Zuwachs des

Schlagholzes: Dühamel von Fällung der Wälder ꝛc. 1766. I Theil, S. 126. Aus Späths Anleitung gehört hieher §. 1. bis §. 14. §. 23. bis §. 28.

XIII.

Von den Gehauen, nach welchen man jährlich eine gewiſſe Anzahl von Holzklaftern oder Maltern ohne Rückſicht auf den Flächeninhalt ſchlagen kann.

§. 86.

Aufgabe.

Die Anzahl der Holzklaftern oder Malter auf einem Reviere zu finden, das in ein Gehau nach Klafter⸗ oder Malterholzſchlägen, wobei man zugleich auf den Zuwachs des rückſtändigen Holzes zu ſehen hat, eingetheilt werden ſoll.

Auflöſung.

1) Man ſucht den geſammten Holzbeſtand des Waldes oder Reviers, das unter Klafterholzſchläge geſetzt werden ſoll, in Kubikmaße, und dividirt denſelben durch die Zahl der Jahre, in welchen er geſchlagen werden ſoll. Der Quotient giebt die Anzahl der Kubikfuße, die vom Holzbeſtande jährlich geſchlagen werden können; die gefundenen Kubikfuße verwandelt man in Klafter oder Malter.

2) Hierauf ſucht man den Zuwachs dieſes Holzes nach Kubikfußen oder nach Klaftern in dem erſten Jahre, in welchem dieſe Gehaue anfangen ſollen. Dieſen Zuwachs halbire man, und dividire in eine dieſer Hälften mit der Anzahl der Jahre, die zur Niederſchlagung des Holzes beſtimmt ſind.

3) Den

3) Den gefundenen Quotient ſubtrahire man von der erwähnten Hälfte, und der Reſt giebt die Anzahl der Klaftern oder Kubikfuße, welche noch von dem Zuwachſe mit dem jährlichen Antheile des Holzbeſtandes weggenommen werden können.

Beiſpiel.

Der geſammte gegenwärtige Holzbeſtand einer Waldung betrage 12000 Klaftern auf den Stämmen, und der (nach §. 85. in der allgem. Anmerkung berechnete) Zuwachs ſei, auf jede 100 Klaftern, jährlich 2 Klaftern (nach neuerer Erfahrung freilich nur etwas über 1 Kubikfuß per Klafter); mithin erhält man im gegenwärtigen Jahre 240 Klaftern Zuwachs. Das Gehölze aber ſoll innerhalb 6 Jahren abgetrieben werden; die Frage iſt: Wie viel Klaftern kommen auf ein jährliches Gehau? Dividirt man den Holzbeſtand der 12000 Klaftern durch die Zahl der Jahre, hier durch 6, ſo hat man $\frac{12000}{6}$ $=$ 2000 Klaftern. Nun halbire man den angenommenen Zuwachs von 240 Klaftern, ſo erhält man $\frac{240}{2}$ $=$ 120 Klaftern; in dieſe dividire man mit der Zahl der Jahre, die das Gehau dauern ſoll, nämlich 6, ſo giebt $\frac{120}{6}$ $=$ 20. Subtrahirt man 20 von 120, ſo zeigt der Reſt $120 - 20 = 100$ Klaftern des Zuwachſes, die man noch zu den erhaltenen $\frac{1}{6}$ von 12000 Klaftern, nämlich zu 2000 addiren muß, und $2000 + 100$ geben 2100 Klaftern, welche jährlich aus dem Gehölze oder aus der Waldung geſchlagen werden können.

Hievon kann man ſich durch folgende Probe überzeugen:

Die angenommenen 12000 Klaftern werden in folgende Gehaue geſetzt:

12000 Klaftern
2100 — das 1ſte Gehau
9900 Klaftern Reſt. Dieſe geben $198\frac{00}{100}$ Klftr. Zuwachs
198
10098
2100 — das 2te Gehau
7998 Klaftern Reſt. — $159\frac{96}{100}$ —
159
8157
2100 — das 3te Gehau
6057 Klaftern Reſt. — $121\frac{14}{100}$ —
121
6178
2100 — das 4te Gehau
4078 Klaftern Reſt. — $81\frac{56}{100}$ —
81
4159
2100 — das 5te Gehau
2059 Klaftern Reſt. — $41\frac{18}{100}$ —
41
2100
2100 — das 6te Gehau
0 Ueberſchuß vom Zuwachſe $\frac{184}{100} = 1\frac{21}{25}$ Klafter.

Anmerkung.

Dieſe Gehaueintheilung vergleiche man mit der Hartigſchen Methode §. 85. in der allgem. Anmerkung. Was die Abtheilung oder Ausmeſſung des Gehaues nach der jährlich zu ſchlagenden Klafterzahl betrift, ſo kann dieſe keine Schwierigkeit machen, wenn man die vorhergehenden geometriſchen Lehren mit der Gehauberechnung verbindet.

Schlagholzes: Dühamel von Fällung der Wälder ꝛc. 1766. I Theil, S. 126. Aus Späths Anleitung gehört hieher §. 1. bis §. 14. §. 23. bis §. 28.

XIII.

Von den Gehauen, nach welchen man jährlich eine gewiſſe Anzahl von Holzklaftern oder Maltern ohne Rückſicht auf den Flächeninhalt ſchlagen kann.

§. 86.

Aufgabe.

Die Anzahl der Holzklaftern oder Malter auf einem Reviere zu finden, das in ein Gehau nach Klafter- oder Malterholzſchlägen, wobei man zugleich auf den Zuwachs des rückſtändigen Holzes zu ſehen hat, eingetheilt werden ſoll.

Auflöſung.

1) Man ſucht den geſammten Holzbeſtand des Waldes oder Reviers, das unter Klafterholzſchläge geſetzt werden ſoll, in Kubikmaße, und dividirt denſelben durch die Zahl der Jahre, in welchen er geſchlagen werden ſoll. Der Quotient giebt die Anzahl der Kubikfuße, die vom Holzbeſtande jährlich geſchlagen werden können; die gefundenen Kubikfuße verwandelt man in Klaſter oder Malter.

2) Hierauf ſucht man den Zuwachs dieſes Holzes nach Kubikfußen oder nach Klaftern in dem erſten Jahre, in welchem dieſe Gehaue anfangen ſollen. Dieſen Zuwachs halbire man, und dividire in eine dieſer Hälften mit der Anzahl der Jahre, die zur Niederſchlagung des Holzes beſtimmt ſind.

3) Den

3) Den gefundenen Quotient ſubtrahire man von der erwähnten Hälfte, und der Reſt giebt die Anzahl der Klaftern oder Kubikfuße, welche noch von dem Zuwachſe mit dem jährlichen Antheile des Holzbeſtandes weggenommen werden können.

Beiſpiel.

Der geſammte gegenwärtige Holzbeſtand einer Waldung betrage 12000 Klaftern auf den Stämmen, und der (nach §. 85. in der allgem. Anmerkung berechnete) Zuwachs ſei, auf jede 100 Klaftern, jährlich 2 Klaftern (nach neuerer Erfahrung freilich nur etwas über 1 Kubikfuß per Klafter); mithin erhält man im gegenwärtigen Jahre 240 Klaftern Zuwachs. Das Gehölze aber ſoll innerhalb 6 Jahren abgetrieben werden; die Frage iſt: Wie viel Klaftern kommen auf ein jährliches Gehau? Dividirt man den Holzbeſtand der 12000 Klaftern durch die Zahl der Jahre, hier durch 6, ſo hat man $\frac{12000}{6}$ = 2000 Klaftern. Nun halbire man den angenommenen Zuwachs von 240 Klaftern, ſo erhält man $\frac{240}{2}$ = 120 Klaftern; in dieſe dividire man mit der Zahl der Jahre, die das Gehau dauern ſoll, nämlich 6, ſo giebt $\frac{120}{6}$ = 20. Subtrahirt man 20 von 120, ſo zeigt der Reſt 120 — 20 = 100 Klaftern des Zuwachſes, die man noch zu den erhaltenen $\frac{1}{6}$ von 12000 Klaftern, nämlich zu 2000 addiren muß, und 2000 + 100 geben 2100 Klaftern, welche jährlich aus dem Gehölze oder aus der Waldung geſchlagen werden können.

Hievon kann man ſich durch folgende Probe überzeugen:

Die angenommenen 12000 Klaftern werden in folgende Gehaue geſetzt:

12000 Klaftern
2100 — das 1ſte Gehau

9900 Klaftern Reſt. Dieſe geben $198\frac{00}{100}$ Klſtr. Zuwachs
198

10098
2100 — das 2te Gehau

7998 Klaftern Reſt. — $159\frac{96}{100}$ —
159

8157
2100 — das 3te Gehau

6057 Klaftern Reſt. — $121\frac{14}{100}$ —
121

6178
2100 — das 4te Gehau

4078 Klaftern Reſt. — $81\frac{56}{100}$ —
81

4159
2100 — das 5te Gehau

2059 Klaftern Reſt. — $41\frac{18}{100}$ —
41

2100
2100 — das 6te Gehau

0 Ueberſchuß vom Zuwachſe $\frac{184}{100} = 1\frac{21}{25}$ Klafter.

Anmerkung.

Dieſe Gehaueintheilung vergleiche man mit der Hartigſchen Methode §. 85. in der allgem. Anmerkung. Was die Abtheilung oder Ausmeſſung des Gehaues nach der jährlich zu ſchlagenden Klafterzahl betrift, ſo kann dieſe keine Schwierigkeit machen, wenn man die vorhergehenden geometriſchen Lehren mit der Gehauberechnung verbindet.

Erſter

Erſter Anhang,

welcher

einige Tafeln,

die durch

Herrn Johann Wiegand Kröhne,

Förſter zu Frömmerswalda,

zu der erſten Ausgabe des gegenwärtigen Lehrbuchs berechnet worden ſind,

enthält.

Einrichtung
und
Gebrauch der Tafeln.

Die 1ſte Tafel.

Die erſte Tafel gründet ſich auf die Längenmeſſung, und zeigt das Verhältniß des Umfangs oder der Peripherie eines Baumſtammes zu ſeinem Durchmeſſer. In der erſten Zahlenreihe findet man den Umfang des Baums in Zollen, und in den folgenden drei Zahlenreihen den dazu gehörigen Durchmeſſer in Fußen, Zollen und Linien ausgedrückt. Der Gebrauch iſt folgender: Hat man durch unmittelbare Meſſung den Umfang eines Baums z. B. 2 Ellen oder 4 Fuß, d. i. 40 Zoll gefunden, und man verlangt den Durchmeſſer, und aus beiden die Grundfläche oder den Durchſchnitt des Baums zu finden; ſo ſucht man in der erſten Zahlenreihe die Zahl 40″, und man hat in den Zahlen der drei folgenden Reihen, nämlich 1 Fuß 2 Zoll 7 Linien, den Durchmeſſer.

Die 2te Tafel.

Die zweite Tafel gründet ſich auf die Flächenmeſſung, nämlich auf die Meſſung der Grundflächen eines Baums. In der erſten Zahlenreihe ſtehet der Durchmeſſer eines Baums in Zollen ausgedrückt; in den folgenden drei Zahlenreihen findet man die Größe der dazu gehörigen Kreisfläche, hier Grundfläche oder Durchſchnitt des Baums in Quadratfußen, Zollen und Linien.

Man braucht ſie auf dieſe Art: Beträgt z. B. der Durchmeſſer eines Baums 24 Zoll, ſo ſucht man 24″ in der erſten Zahlenreihe, und man findet in den drei darneben ſtehenden Reihen die Größe der Grundfläche, nämlich 4 Quadratfuß, 52 Quadratzoll und 16 Quadratlinien.

Die 3te Tafel.

Die dritte Tafel gründet ſich auf die Körpermeſſung. Sie enthält einen ganzen Baum, als Kegel betrachtet, aus ſeinem mittleren Durchmeſſer und ſeiner Höhe berechnet. In der erſten Zahlenreihe ſteht die Höhe des Baums in Decimalfußen; in der zweiten, der Durchmeſſer deſſelben Baums in Decimalzollen; die übrigen drei Zahlenreihen enthalten den körperlichen Inhalt in Kubikfußen, Zollen und Linien. Der Gebrauch iſt dieſer: Die Höhe eines Baums werde 88 Fuß, und ſein mittlerer Durchmeſſer 21 Zoll gefunden. Man ſuche zuerſt in der Reihe der Durchmeſſer 21 Zoll, und dann die in der erſten Reihe ſtehende Höhe von 88′, ſo hat man in den drei folgenden Reihen den Inhalt des Baums, nämlich in dieſem Falle 304 Kubikfuß 642 Kubikzoll und 800 Kubiklinien. Dieſen Kubikinhalt kann man nach Verlangen leicht in Klaftern oder Malter verwandeln.

Die 4te Tafel.

Die vierte Tafel gründet ſich auf die Winkelmeſſung, und gehört zu der Lehre von den regulären Polygonen und Vielecken. Die erſte Zahlenreihe enthält die Anzahl der Seiten irgend eines Vielecks; die zweite den Polygonwinkel eines regulären Vielecks, und die dritte die Summe aller Winkel im Umfange aller regulären und irregulären Vielecke oder Polygone. Ihr Gebrauch findet dann Statt: Einmal, wenn man irgend eine vielſeitige Figur aufgenommen hat, um die gefundene Summe aller Winkel mit der zu vergleichen, die das Vieleck

eck nach der Anzahl der Seiten enthalten muß; dann, wenn man reguläre Polygone auf gegebene Seiten auftragen ſoll, um den Polygonwinkel aus der zweiten Reihe ſogleich ohne Berechnung nehmen zu können.

Die 5te Tafel.

Die fünfte Tafel gründet ſich auf die Klafter- und Malterberechnung, und enthält Verhältniſſe einer Art Holzklaftern oder Malter gegen eine andere Art. Durch ihren Gebrauch kann man auf eine kurze und leichte Weiſe, Klaftern und Malter verſchiedener Art in einander verwandeln.

Die Tafel ſelbſt iſt ſo eingerichtet:

a	bedeutet eine	Holzklafter	von	2	Fuß	Scheitlänge;
b	—	—	—	$2\frac{1}{2}$	—	—
c	—	—	—	3	—	—
d	—	—	—	$3\frac{1}{2}$	—	—
e	—	—	—	4	—	—
f	—	—	—	$4\frac{1}{2}$	—	—
g	—	—	—	5	—	—
h	—	—	—	$5\frac{1}{2}$	—	—
i	—	—	—	6	—	—

Hierzu kommt noch:

k	bedeutet einen	Holzmalter,		von 4′ Höhe, Breite und Tiefe.
l	—	—	—	der 3′ breit 4′ hoch und 35″ lang iſt.
m	—	—	—	der 6′ breit 3′ hoch und 45″ lang iſt.

Man braucht dieſe Tafel, wenn ohne Zeitverluſt eine gewiſſe Anzahl Klafterholz, deſſen Scheitlänge bekannt iſt, in eine andere Art Klafterholz verwandelt werden ſoll. Zu dieſem Zwecke ſuche man das Verhältniß der beiden

Arten von Klaftern in der Tafel auf, und ſchließe nach der Regel Detri: Wie ſich die eine Art zu der andern verhält; ſo verhält ſich auch die gegebene Anzahl der Klaftern zu der, die man zu wiſſen verlangt.

Z. B. Man habe 316 Klaftern Holz von 3′ Scheitlänge; wie viel Holz betragen dieſe in Klaftern von 5′ Scheitlänge.

Man ſuche in der Tafel das Verhältniß der Holzklaftern von 3′ und von 5′ Scheitlänge auf, d. i. man ſuche c : g. In dem Fache, worin c den Anfang macht, gehe man unterwärts ſo weit, bis man in der dabei ſtehenden Reihe g findet; dadurch findet man zugleich die Zahlen 5 und 3, d. i. 5 Klaftern von der Art c, geben 3 Klaftern der Art g; folglich

$$5 : 3 = 316 : x.$$

und es iſt $x = \frac{3 \cdot 316}{5} = 189\frac{3}{5}$ Klaftern von g.

Erſte Tafel.

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
"	'	"	'''	"	'	"	'''	"	'	"	'''
4	—	1	2	41	1	3	0	78	2	4	8
5	—	1	5	42	1	3	3	79	2	5	1
6	—	1	9	43	1	3	6	80	2	5	4
7	—	2	2	44	1	4	0	81	2	5	8
8	—	2	5	45	1	4	3	82	2	6	1
9	—	2	8	46	1	4	6	83	2	6	4
10	—	3	1	47	1	4	9	84	2	6	7
11	—	3	5	48	1	5	2	85	2	7	0
12	—	3	9	49	1	5	6	86	2	7	3
13	—	4	1	50	1	5	9	87	2	7	7
14	—	4	4	51	1	6	3	88	2	8	0
15	—	4	7	52	1	6	6	89	2	8	3
16	—	5	0	53	1	6	8	90	2	8	6
17	—	5	4	54	1	7	1	91	2	8	9
18	—	5	7	55	1	7	5	92	2	9	2
19	—	6	0	56	1	7	8	93	2	9	6
20	—	6	3	57	1	8	1	94	2	9	9
21	—	6	6	58	1	8	4	95	3	0	2
22	—	7	0	59	1	8	7	96	3	0	5
23	—	7	3	60	1	9	1	97	3	0	8
24	—	7	6	61	1	9	4	98	3	1	2
25	—	7	9	62	1	9	7	99	3	1	5
26	—	8	2	63	2	0	0	100	3	1	8
27	—	8	5	64	2	0	3	101	3	2	1
28	—	8	9	65	2	0	7	102	3	2	4
29	—	9	2	66	2	1	0	103	3	2	8
30	—	9	5	67	2	1	3	104	3	3	1
31	—	9	8	68	2	1	6	105	3	3	4
32	1	0	1	69	2	1	9	106	3	3	7
33	1	0	5	70	2	2	2	107	3	4	0
34	1	0	8	71	2	2	6	108	3	4	3
35	1	1	1	72	2	2	9	109	3	4	7
36	1	1	4	73	2	3	2	110	3	5	0
37	1	1	7	74	2	3	5	111	3	5	3
38	1	2	1	75	2	3	8	112	3	5	6
39	1	2	4	76	2	4	2	113	3	5	9
40	1	2	7	77	2	4	5	114	3	6	3

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
″	′	″	‴	″	′	″	‴	″	′	″	‴
115	3	6	6	154	4	9	0	193	6	1	4
116	3	6	9	155	4	9	3	194	6	1	7
117	3	7	2	156	4	9	6	195	6	2	1
118	3	7	5	157	5	0	0	196	6	2	4
119	3	7	8	158	5	0	3	197	6	2	7
120	3	8	2	159	5	0	6	198	6	3	0
121	3	8	5	160	5	0	9	199	6	3	3
122	3	8	8	161	5	1	2	200	6	3	6
123	3	9	1	162	5	1	5	201	6	4	0
124	3	9	4	163	5	1	9	202	6	4	3
125	3	9	8	164	5	2	2	203	6	4	6
126	4	0	1	165	5	2	5	204	6	4	9
127	4	0	4	166	5	2	8	205	6	5	2
128	4	0	7	167	5	3	1	206	6	5	6
129	4	1	0	168	5	3	5	207	6	5	9
130	4	1	4	169	5	3	8	208	6	6	2
131	4	1	7	170	5	4	1	209	6	6	5
132	4	2	0	171	5	4	4	210	6	6	8
133	4	2	3	172	5	4	7	211	6	7	1
134	4	2	6	173	5	5	0	212	6	7	5
135	4	2	9	174	5	5	4	213	6	7	8
136	4	3	3	175	5	5	7	214	6	8	1
137	4	3	6	176	5	6	0	215	6	8	4
138	4	3	9	177	5	6	3	216	6	8	7
139	4	4	2	178	5	6	6	217	6	9	1
140	4	4	5	179	5	7	0	218	6	9	4
141	4	4	9	180	5	7	3	219	6	9	7
142	4	5	2	181	5	7	6	220	7	0	0
143	4	5	5	182	5	7	9	221	7	0	3
144	4	5	8	183	5	8	2	222	7	0	7
145	4	6	1	184	5	8	5	223	7	1	0
146	4	6	4	185	5	8	9	224	7	1	3
147	4	6	8	186	5	9	2	225	7	1	6
148	4	7	1	187	5	9	5	226	7	1	9
149	4	7	4	188	5	9	8	227	7	2	2
150	4	7	7	189	6	0	1	228	7	2	6
151	4	8	0	190	6	0	5	229	7	2	9
152	4	8	4	191	6	0	8	230	7	3	2
153	4	8	7	192	6	1	1	231	7	3	5

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
″	′	″	‴	″	′	″	‴	″	′	″	‴
232	7	3	8	260	8	2	8	288	9	1	7
233	7	4	2	261	8	3	1	289	9	2	0
234	7	4	5	262	8	3	4	290	9	2	3
235	7	4	8	263	8	3	7	291	9	2	6
236	7	5	1	264	8	4	0	292	9	2	9
237	7	5	4	265	8	4	3	293	9	3	3
238	7	5	7	266	8	4	7	294	9	3	6
239	7	6	1	267	8	5	0	295	9	3	9
240	7	6	4	268	8	5	3	296	9	4	2
241	7	6	7	269	8	5	6	297	9	4	5
242	7	7	0	270	8	5	9	298	9	4	9
243	7	7	3	271	8	6	3	299	9	5	2
244	7	7	7	272	8	6	6	300	9	5	5
245	7	8	0	273	8	6	9	301	9	5	8
246	7	8	3	274	8	7	2	302	9	6	1
247	7	8	6	275	8	7	5	303	9	6	4
248	7	8	9	276	8	7	8	304	9	6	8
249	7	9	2	277	8	8	2	305	9	7	1
250	7	9	6	278	8	8	5	306	9	7	4
251	7	9	9	279	8	8	8	307	9	7	7
252	8	0	2	280	8	9	1	308	9	8	0
253	8	0	5	281	8	9	4	309	9	8	4
254	8	0	8	282	8	9	8	310	9	8	7
255	8	1	2	283	9	0	1	311	9	9	0
256	8	1	5	284	9	0	4	312	9	9	3
257	8	1	8	285	9	0	7	313	9	9	6
258	8	2	1	286	9	1	0	314	10	0	0
259	8	2	4	287	9	1	4	—	—	—	—

Zweite Tafel.

Durchmeſſer	Grundfläche			Durchmeſſer	Grundfläche			Durchmeſſer	Grundfläche		
″	□′	□″	□‴	″	□′	□″	□‴	″	□′	□″	□‴
2	—	3	14	41	13	19	58	80	50	24	00
3	—	7	06	42	13	84	74	81	51	50	38
4	—	12	56	43	14	51	46	82	52	78	34
5	—	19	62	44	15	19	76	83	54	07	86
6	—	28	26	45	15	89	62	84	55	38	96
7	—	38	46	46	16	61	06	85	56	71	62
8	—	50	24	47	17	34	06	86	58	05	86
9	—	63	58	48	18	08	64	87	59	41	66
10	—	78	50	49	18	84	78	88	60	79	04
11	—	94	98	50	19	62	50	89	62	07	98
12	1	13	04	51	20	41	78	90	63	58	50
13	1	32	66	52	21	22	64	91	65	00	58
14	1	53	86	53	22	05	06	92	66	44	24
15	1	76	62	54	22	89	06	93	67	89	46
16	2	00	96	55	23	74	62	94	69	36	26
17	2	26	86	56	24	61	76	95	70	84	62
18	2	54	34	57	25	50	46	96	72	34	56
19	2	83	38	58	26	40	74	97	73	86	06
20	3	14	00	59	27	32	58	98	75	93	14
21	3	46	18	60	28	26	00	99	76	93	78
22	3	79	94	61	29	20	98	100	78	50	00
23	4	05	26	62	30	17	54	101	80	07	78
24	4	52	16	63	31	15	66	102	81	67	14
25	4	90	62	64	32	15	36	103	83	28	06
26	5	30	66	65	33	16	62	104	84	90	56
27	5	72	26	66	34	19	46	105	86	54	62
28	6	15	44	67	35	23	86	106	88	20	26
29	6	00	18	68	36	29	84	107	89	87	46
30	7	06	50	69	37	37	38	108	91	56	24
31	7	54	38	70	38	46	50	109	93	26	58
32	8	03	84	71	39	57	18	110	94	98	50
33	8	54	86	72	40	69	44	111	96	71	98
34	9	07	46	73	41	83	26	112	98	47	04
35	9	61	62	74	42	98	66	113	100	21	66
36	10	17	36	75	44	15	62	114	102	01	86
37	10	74	66	76	45	26	31	115	102	81	62
38	11	33	54	77	46	54	26	116	105	62	96
39	11	93	98	78	47	75	94	117	107	45	86
40	12	56	00	79	48	99	18	118	109	30	34

Dritte Tafel.

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
′	″	Cub.′	C.″	C.‴
20	3″	1	415	—
24		1	695	600
28		1	978	200
32		2	260	800
36		2	543	400
40		2	826	—
20	4″	2	512	—
24		3	014	400
28		3	576	800
32		4	019	200
36		4	521	600
40		5	024	—
20	5″	3	925	—
24		4	710	—
28		5	495	—
32		6	280	—
36		7	065	—
40		7	848	—
44		8	632	800
20	6″	5	652	—
24		6	782	400
28		7	912	800
32		9	043	200
36		10	173	600
40		11	304	600
44		12	434	400
20	7″	7	693	—
24		9	231	600
28		10	770	200
32		12	308	800
36		13	847	400
40		15	386	—
44		16	924	600
48		18	463	200

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
′	″	Cub.′	C.″	C.‴
24	8″	12	057	600
28		14	067	200
32		16	076	800
36		18	086	400
40		20	096	—
44		22	005	600
48		24	115	200
24	9″	15	260	400
28		17	803	800
32		20	347	200
36		22	890	600
40		25	434	—
44		27	977	400
48		30	520	800
52		33	064	200
24	10″	18	840	—
28		21	980	—
32		25	110	—
36		28	260	—
40		31	400	—
44		34	540	—
48		37	680	—
52		40	820	—
56		43	960	—
60		47	100	—
24	11″	22	796	400
28		26	595	800
32		30	395	200
36		34	194	600
40		37	994	—
44		41	793	400
48		45	592	800
52		49	392	200
56		53	191	600
60		56	991	—

Erſte Tafel.

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
''	'	''	'''	''	'	''	'''	''	'	''	'''
4	—	1	2	41	1	3	0	78	2	4	8
5	—	1	5	42	1	3	3	79	2	5	1
6	—	1	9	43	1	3	6	80	2	5	4
7	—	2	2	44	1	4	0	81	2	5	8
8	—	2	5	45	1	4	3	82	2	6	1
9	—	2	8	46	1	4	6	83	2	6	4
10	—	3	1	47	1	4	9	84	2	6	7
11	—	3	5	48	1	5	2	85	2	7	0
12	—	3	9	49	1	5	6	86	2	7	3
13	—	4	1	50	1	5	9	87	2	7	7
14	—	4	4	51	1	6	3	88	2	8	0
15	—	4	7	52	1	6	6	89	2	8	3
16	—	5	0	53	1	6	8	90	2	8	6
17	—	5	4	54	1	7	1	91	2	8	9
18	—	5	7	55	1	7	5	92	2	9	2
19	—	6	0	56	1	7	8	93	2	9	6
20	—	6	3	57	1	8	1	94	2	9	9
21	—	6	6	58	1	8	4	95	3	0	2
22	—	7	0	59	1	8	7	96	3	0	5
23	—	7	3	60	1	9	1	97	3	0	8
24	—	7	6	61	1	9	4	98	3	1	2
25	—	7	9	62	1	9	7	99	3	1	5
26	—	8	2	63	2	0	0	100	3	1	8
27	—	8	5	64	2	0	3	101	3	2	1
28	—	8	9	65	2	0	7	102	3	2	4
29	—	9	2	66	2	1	0	103	3	2	8
30	—	9	5	67	2	1	3	104	3	3	1
31	—	9	8	68	2	1	6	105	3	3	4
32	1	0	1	69	2	1	9	106	3	3	7
33	1	0	5	70	2	2	2	107	3	4	0
34	1	0	8	71	2	2	6	108	3	4	3
35	1	1	1	72	2	2	9	109	3	4	7
36	1	1	4	73	2	3	2	110	3	5	0
37	1	1	7	74	2	3	5	111	3	5	3
38	1	2	1	75	2	3	8	112	3	5	6
39	1	2	4	76	2	4	2	113	3	5	9
40	1	2	7	77	2	4	5	114	3	6	3

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
″	′	″	‴	″	′	″	‴	″	′	″	‴
115	3	6	6	154	4	9	0	193	6	1	4
116	3	6	9	155	4	9	3	194	6	1	7
117	3	7	2	156	4	9	6	195	6	2	1
118	3	7	5	157	5	0	0	196	6	2	4
119	3	7	8	158	5	0	3	197	6	2	7
120	3	8	2	159	5	0	6	198	6	3	0
121	3	8	5	160	5	0	9	199	6	3	3
122	3	8	8	161	5	1	2	200	6	3	6
123	3	9	1	162	5	1	5	201	6	4	0
124	3	9	4	163	5	1	9	202	6	4	3
125	3	9	8	164	5	2	2	203	6	4	6
126	4	0	1	165	5	2	5	204	6	4	9
127	4	0	4	166	5	2	8	205	6	5	2
128	4	0	7	167	5	3	1	206	6	5	6
129	4	1	0	168	5	3	5	207	6	5	9
130	4	1	4	169	5	3	8	208	6	6	2
131	4	1	7	170	5	4	1	209	6	6	5
132	4	2	0	171	5	4	4	210	6	6	8
133	4	2	3	172	5	4	7	211	6	7	1
134	4	2	6	173	5	5	0	212	6	7	5
135	4	2	9	174	5	5	4	213	6	7	8
136	4	3	3	175	5	5	7	214	6	8	1
137	4	3	6	176	5	6	0	215	6	8	4
138	4	3	9	177	5	6	3	216	6	8	7
139	4	4	2	178	5	6	6	217	6	9	1
140	4	4	5	179	5	7	0	218	6	9	4
141	4	4	9	180	5	7	3	219	6	9	7
142	4	5	2	181	5	7	6	220	7	0	0
143	4	5	5	182	5	7	9	221	7	0	3
144	4	5	8	183	5	8	2	222	7	0	7
145	4	6	1	184	5	8	5	223	7	1	0
146	4	6	4	185	5	8	9	224	7	1	3
147	4	6	8	186	5	9	2	225	7	1	6
148	4	7	1	187	5	9	5	226	7	1	9
149	4	7	4	188	5	9	8	227	7	2	2
150	4	7	7	189	6	0	1	228	7	2	6
151	4	8	0	190	6	0	5	229	7	2	9
152	4	8	4	191	6	0	8	230	7	3	2
153	4	8	7	192	6	1	1	231	7	3	5

Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer			Umfang	Durchmeſſer		
″	′	″	‴	″	′	″	‴	″	′	″	‴
232	7	3	8	260	8	2	8	288	9	1	7
233	7	4	2	261	8	3	1	289	9	2	0
234	7	4	5	262	8	3	4	290	9	2	3
235	7	4	8	263	8	3	7	291	9	2	6
236	7	5	1	264	8	4	0	292	9	2	9
237	7	5	4	265	8	4	3	293	9	3	3
238	7	5	7	266	8	4	7	294	9	3	6
239	7	6	1	267	8	5	0	295	9	3	9
240	7	6	4	268	8	5	3	296	9	4	2
241	7	6	7	269	8	5	6	297	9	4	5
242	7	7	0	270	8	5	9	298	9	4	9
243	7	7	3	271	8	6	3	299	9	5	2
244	7	7	7	272	8	6	6	300	9	5	5
245	7	8	0	273	8	6	9	301	9	5	8
246	7	8	3	274	8	7	2	302	9	6	1
247	7	8	6	275	8	7	5	303	9	6	4
248	7	8	9	276	8	7	8	304	9	6	8
249	7	9	2	277	8	8	2	305	9	7	1
250	7	9	6	278	8	8	5	306	9	7	4
251	7	9	9	279	8	8	8	307	9	7	7
252	8	0	2	280	8	9	1	308	9	8	0
253	8	0	5	281	8	9	4	309	9	8	4
254	8	0	8	282	8	9	8	310	9	8	7
255	8	1	2	283	9	0	1	311	9	9	0
256	8	1	5	284	9	0	4	312	9	9	3
257	8	1	8	285	9	0	7	313	9	9	6
258	8	2	1	286	9	1	0	314	10	0	0
259	8	2	4	287	9	1	4	—	—	—	—

Zweite Tafel.

Durchmeſſer	Grundfläche			Durchmeſſer	Grundfläche			Durchmeſſer	Grundfläche		
''	□'	□''	□'''	''	□'	□''	□'''	''	□'	□''	□'''
2	—	3	14	41	13	19	58	80	50	24	00
3	—	7	06	42	13	84	74	81	51	50	38
4	—	12	56	43	14	51	46	82	52	78	34
5	—	19	62	44	15	19	76	83	54	07	86
6	—	28	26	45	15	89	62	84	55	38	96
7	—	38	46	46	16	61	06	85	56	71	62
8	—	50	24	47	17	34	06	86	58	05	86
9	—	63	58	48	18	08	64	87	59	41	66
10	—	78	50	49	18	84	78	88	60	79	04
11	—	94	98	50	19	62	50	89	62	07	98
12	1	13	04	51	20	41	78	90	63	58	50
13	1	32	66	52	21	22	64	91	65	00	58
14	1	53	86	53	22	05	06	92	66	44	24
15	1	76	62	54	22	89	06	93	67	89	46
16	2	00	96	55	23	74	62	94	69	36	26
17	2	26	86	56	24	61	76	95	70	84	62
18	2	54	34	57	25	50	46	96	72	34	56
19	2	83	38	58	26	40	74	97	73	86	06
20	3	14	00	59	27	32	58	98	75	93	14
21	3	46	18	60	28	26	00	99	76	93	78
22	3	79	94	61	29	20	98	100	78	50	00
23	4	05	26	62	30	17	54	101	80	07	78
24	4	52	16	63	31	15	66	102	81	67	14
25	4	90	62	64	32	15	36	103	83	28	06
26	5	30	66	65	33	16	62	104	84	90	56
27	5	72	26	66	34	19	46	105	86	54	62
28	6	15	44	67	35	23	86	106	88	20	26
29	6	00	18	68	36	29	84	107	89	87	46
30	7	06	50	69	37	37	38	108	91	56	24
31	7	54	38	70	38	46	50	109	93	26	58
32	8	03	84	71	39	57	18	110	94	98	50
33	8	54	86	72	40	69	44	111	96	71	98
34	9	07	46	73	41	83	26	112	98	47	04
35	9	61	62	74	42	98	66	113	100	21	66
36	10	17	36	75	44	15	62	114	102	01	86
37	10	74	66	76	45	26	31	115	102	81	62
38	11	33	54	77	46	54	26	116	105	62	96
39	11	93	98	78	47	75	94	117	107	45	86
40	12	56	00	79	48	99	18	118	109	30	34

Dritte Tafel.

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
′	″	Cub.′	C.″	C.‴
20	3″	1	415	—
24		1	695	600
28		1	978	200
32		2	260	800
36		2	543	400
40		2	826	—
20	4″	2	512	—
24		3	014	400
28		3	576	800
32		4	019	200
36		4	521	600
40		5	024	—
20	5″	3	925	—
24		4	710	—
28		5	495	—
32		6	280	—
36		7	065	—
40		7	848	—
44		8	632	800
20	6″	5	652	—
24		6	782	400
28		7	912	800
32		9	043	200
36		10	173	600
40		11	304	600
44		12	434	400
20	7″	7	693	—
24		9	231	600
28		10	770	200
32		12	308	800
36		13	847	400
40		15	386	—
44		16	924	600
48		18	463	200
24	8″	12	057	600
28		14	067	200
32		16	076	800
36		18	086	400
40		20	096	—
44		22	005	600
48		24	115	200
24	9″	15	260	400
28		17	803	800
32		20	347	200
36		22	890	600
40		25	434	—
44		27	977	400
48		30	520	800
52		33	064	200
24	10″	18	840	—
28		21	980	—
32		25	110	—
36		28	260	—
40		31	400	—
44		34	540	—
48		37	680	—
52		40	820	—
56		43	960	—
60		47	100	—
24	11″	22	796	400
28		26	595	800
32		30	395	200
36		34	194	600
40		37	994	—
44		41	793	400
48		45	592	800
52		49	392	200
56		53	191	600
60		56	991	—

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	"	Cub.'	C."	C.'''
28		31	651	200
32		36	172	800
36		40	694	400
40		45	216	—
44		49	737	600
48	12"	54	259	200
52		58	780	800
56		63	302	400
60		67	824	—
64		72	345	600
68		76	867	200
72		81	388	800
28		37	146	200
32		42	452	800
36		47	759	400
40		53	066	—
44		58	372	600
48		63	679	200
52	13"	68	985	800
56		74	292	400
60		79	599	—
64		84	905	600
68		90	212	200
72		95	518	800
76		100	825	400
80		106	132	—
32		49	235	200
36		55	281	600
40		61	424	—
44		67	566	400
48	14"	73	708	800
52		79	851	200
56		85	993	600
60		92	136	—
64		98	278	400
68		104	420	800

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	"	Cub.'	C."	C.'''
72		110	563	200
76	14"	116	705	600
80		123	088	—
32		56	520	—
36		63	585	—
40		70	650	—
44		77	715	—
48		84	780	—
52		91	845	—
56	15"	98	910	—
60		105	975	—
64		113	040	—
68		120	105	—
72		127	170	—
76		134	235	—
80		141	300	—
36		72	345	600
40		80	384	—
44		88	422	400
48		96	460	800
52		104	499	200
56		112	537	600
60	16"	120	576	—
64		128	614	400
68		136	634	800
72		144	691	200
76		152	729	600
80		160	768	—
84		168	806	400
88		176	844	800
36		81	671	400
40		90	746	—
44	17"	99	820	600
48		108	895	200
52		117	969	800
56		127	044	400

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
′	″	Cub.′	C.″	C.‴
60	17″	136	119	
64		145	193	600
68		154	268	200
72		163	342	800
76		172	417	400
80		181	492	—
84		190	566	600
88		199	641	200
40	18″	101	736	—
44		111	909	600
48		122	083	200
52		132	256	800
56		142	430	400
60		152	604	—
64		162	777	600
68		172	951	200
72		183	124	800
76		193	298	400
80		203	472	—
84		213	645	600
88		223	819	200
40	19″	113	354	—
44		124	689	400
48		136	024	800
52		147	360	200
56		158	695	600
60		170	031	
64		181	366	400
68		192	701	800
72		204	037	200
76		215	372	600
80		226	708	—
84		238	043	400
88		249	378	800
92		260	714	200
40	20″	125	600	—

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
′	″	Cub.′	C.″	C.‴
44	20″	138	160	
48		150	720	—
52		163	280	—
56		175	840	—
60		188	400	—
64		200	960	—
68		213	520	—
72		226	080	—
76		23[illegible]	640	—
80		251	200	—
84		263	760	—
88		276	320	
92		288	880	—
40	21″	138	474	—
44		152	321	400
48		166	168	800
52		180	016	200
56		193	863	600
60		207	711	—
64		221	558	400
68		235	405	800
72		248	253	200
76		263	000	600
80		276	948	—
84		290	795	400
88		304	642	800
92		318	490	200
96		332	337	600
40	22″	151	976	—
44		167	173	600
48		182	371	200
52		197	568	800
56		212	766	00
60		227	964	—
64		243	161	600
68		258	359	200

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	''	Cub.'	C.''	C.'''
72	22''	273	556	800
76		288	754	400
80		303	952	—
84		319	149	600
88		334	347	200
92		349	544	800
96		364	742	400
40	23''	166	106	—
44		182	716	600
48		199	327	200
52		215	937	800
56		232	548	400
60		249	159	—
64		265	769	600
68		282	380	200
72		298	990	800
76		314	601	400
80		332	212	—
84		348	822	600
88		365	433	200
92		382	043	800
96		398	654	400
100		415	265	—
40	24''	180	864	—
44		198	950	400
48		217	036	800
52		235	123	200
56		253	209	600
60		271	296	—
64		289	382	400
68		307	468	800
72		325	555	200
76		343	641	600
80		361	728	—
84		379	814	400
88		397	900	800
92	24''	415	987	200
96		434	073	600
100		452	160	—
40	25''	196	250	—
44		215	875	—
48		235	500	—
52		255	125	—
56		274	750	—
60		294	375	—
64		314		—
68		333	625	—
72		353	250	—
76		372	875	—
80		392	500	
84		412	125	—
88		431	750	—
92		451	375	—
96		471	—	—
100		490	625	—
40	26''	212	264	—
44		233	490	400
48		254	716	800
52		275	943	200
56		297	169	600
60		318	396	—
64		339	622	400
68		360	848	800
72		382	075	200
76		403	301	600
80		424	528	—
84		445	754	400
88		466	980	800
92		488	207	200
96		509	433	600
100		530	660	—

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	''	Cub.'	C.''	C.'''
40		228	906	—
44		251	796	600
48		274	687	200
52		297	577	800
56		320	468	400
60		343	359	—
64		366	249	600
68	27''	389	140	200
72		412	003	800
76		434	921	400
80		457	812	—
84		480	702	600
88		503	593	200
92		526	483	800
96		549	374	400
100		572	265	—
40		246	176	—
44		270	793	600
48		295	411	200
52		320	028	800
56		344	646	400
60		369	264	
64		393	881	600
68	28''	418	499	200
72		443	116	800
76		467	734	400
80		492	352	—
84		516	969	600
88		541	587	200
92		566	204	800
96		590	822	400
100		615	440	—
40		264	074	—
44	29''	290	481	400
48		316	888	800
52		343	296	200
56		369	703	600
60		396	111	—
64		422	518	400
68		448	925	800
72		475	333	200
76	29''	501	740	600
80		528	148	—
84		554	555	400
88		580	962	800
92		607	370	200
96		633	777	600
100		660	185	—
40		282	600	—
44		310	860	—
48		339	120	—
52		367	380	—
56		395	640	—
60		423	900	—
64		452	160	—
68	30''	480	420	—
72		508	680	—
76		536	940	—
80		565	200	—
84		593	460	—
88		621	720	—
92		649	980	—
96		678	240	—
100		706	500	—
40		301	754	—
44		331	929	400
48		362	004	800
52	31''	392	280	200
56		422	455	600
60		452	631	—
64		482	806	400
68		512	981	800

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	''	Cub.'	C.''	C.'''
72	31''	543	157	200
76		573	332	600
80		603	508	—
84		633	683	400
88		663	858	800
92		694	034	200
96		724	209	600
100		754	385	—
40	32''	321	536	—
44		353	689	600
48		385	843	200
52		417	996	800
56		450	150	400
60		482	304	—
64		514	457	600
68		546	611	200
72		578	764	800
76		610	918	400
80		643	072	—
84		675	225	600
88		707	379	200
92		739	532	800
96		771	686	400
100		803	840	—
40	33''	341	946	—
44		376	140	600
48		410	335	200
52		444	529	800
56		478	724	400
60		512	919	—
64		547	113	600
68		581	308	200
72		615	502	800
76		649	697	400
80		683	892	—
84		718	086	600
88	33''	752	281	200
92		786	475	800
96		820	670	400
100		854	865	—
40	34''	362	984	—
44		399	282	400
48		435	580	800
52		471	879	200
56		508	177	600
60		544	476	—
64		580	774	400
68		617	372	800
72		653	371	200
76		689	669	600
80		725	968	—
84		762	266	400
88		798	564	800
92		834	863	200
96		871	161	600
100		907	460	—
40	35''	384	650	—
44		423	015	—
48		461	580	—
52		500	045	—
56		538	510	—
60		576	975	—
64		615	440	—
68		653	905	—
72		692	370	—
76		730	835	—
80		769	300	—
84		807	765	—
88		846	230	—
92		884	695	—
96		923	160	—
100		961	625	—

Höhe	Durch-meſſer	Körperlicher Inhalt		
'	''	Cub.'	C.''	C.'''
40		406	944	—
44		447	638	400
48		488	332	800
52		529	027	200
56		569	721	600
60		610	416	—
64		651	110	400
68	36''	691	804	800
72		732	499	200
76		773	193	600
80		813	888	—
84		854	582	400
88		895	276	800
92		935	971	200
96		976	665	600
100		1017	360	—
40		429	866	—
44		472	852	600
48		515	839	200
52		558	828	800
56		601	812	400
60		644	799	—
64		687	785	600
68	37''	730	772	200
72		773	758	800
76		816	745	400
80		859	732	—
84		902	718	600
88		945	705	200
92		988	691	800
96		1031	678	400
100		1074	665	—
40		453	416	—
44	38''	498	757	600
48		544	099	200
52		589	440	800
56		634	782	400
60		680	124	—
64		725	465	600
68		770	807	200
72		816	148	800
76	38''	861	490	400
80		906	832	—
84		952	173	600
88		997	515	200
92		1042	856	800
96		1088	198	400
100		1133	540	—
40		477	594	—
44		525	253	400
48		573	112	800
52		620	872	200
56		668	631	600
60		716	391	—
64		764	150	400
68	39''	811	909	800
72		859	669	200
76		907	428	600
80		955	188	—
84		1002	947	400
88		1050	706	800
92		1098	466	200
96		1146	225	600
100		1193	985	—
40		502	400	—
44		552	640	—
48		602	880	—
52	40''	653	120	—
56		703	360	—
60		753	600	—
64		803	840	—
68		854	080	—

Höhe	Durchmeſſer	Körperlicher Inhalt		
'	"	Cub.'	C.''	C.'''
72	40"	904	320	—
76		954	560	—
80		1004	800	—
84		1055	040	—
88		1105	280	—
92		1155	520	—
96		1205	760	—
100		1256	—	—
40	41"	527	834	
44		580	617	400
48		633	400	800
52		686	184	200
56		738	967	600
60		791	751	—
64		844	544	400
68		897	317	800
72		950	101	200
76		1002	884	600
80		1055	668	—
84		1108	451	400
88		1161	234	800
92		1214	018	200
96		1266	801	600
100		1319	585	
40	42"	553	896	—
44		609	285	600
48		664	675	200
52		720	064	800
56		775	454	400
60		830	844	—
64		886	233	600
68		941	623	200
72		993	012	800
76		1052	002	400
80		1107	792	
84		1163	181	600
88	42"	1218	571	200
92		1273	960	800
96		1329	350	400
100		1384	740	—
40	43"	580	586	—
44		638	644	600
48		696	703	200
52		754	761	800
56		812	820	400
60		870	879	—
64		928	937	600
68		986	996	200
72		1035	054	800
76		1103	113	400
80		1161	172	—
84		1219	230	600
88		1271	289	200
92		1335	347	800
96		1393	406	400
100		1451	465	—
40	44"	607	904	—
44		668	694	400
48		729	484	800
52		790	275	200
56		851	065	600
60		911	856	—
64		972	646	400
68		1033	436	800
72		1094	227	200
76		1155	017	600
80		1215	808	—
84		1276	598	400
88		1337	388	800
92		1398	179	200
96		1458	969	600
100		1519	760	—

Höhe '	Durchmeſſer ''	Körperlicher Inhalt Cub.'	C.''	C.'''
40	45''	635	850	—
44		699	435	—
48		763	020	—
52		826	605	—
56		890	190	—
60		953	775	—
64		1017	360	—
68		1080	945	—
72		1144	530	—
76		1208	115	—
80		1271	700	—
84		1335	285	—
88		1398	870	—
92		1462	455	—
96		1526	040	—
100		1589	625	—
40	46''	664	424	—
44		730	866	400
48		797	308	800
52		863	751	200
56		930	193	600
60		996	636	—
64		1063	078	400
68		1129	520	800
72		1195	963	200
76		1258	405	600
80		1328	848	—
84		1395	290	400
88		1461	732	800
92		1528	175	200
96		1594	617	600
100		1661	060	—
40	47''	693	626	—
44		762	988	600
48		832	351	200
52		901	713	800

Höhe '	Durchmeſſer ''	Körperlicher Inhalt Cub.'	C.''	C.'''
56	47''	971	076	400
60		1040	439	—
64		1109	801	600
68		1179	164	200
72		1248	526	800
76		1317	889	400
80		1387	252	—
84		1456	614	600
88		1525	977	200
92		1595	339	800
96		1664	702	400
100		1734	065	—
40	48''	723	456	—
44		795	801	600
48		868	147	200
52		940	492	800
56		1012	838	400
60		1085	184	—
64		1157	529	600
68		1229	857	200
72		1302	220	800
76		1374	566	400
80		1446	912	—
84		1519	257	600
88		1591	603	200
92		1663	948	800
96		1736	294	400
100		1808	640	—
40	49''	753	914	—
44		829	305	400
48		904	696	800
52		980	088	200
56		1055	479	600
60		1130	871	—
64		1206	262	400
68		1282	653	800

Höhe	Durch=meſſer	Körperlicher Inhalt			Höhe	Durch=meſſer	Körperlicher Inhalt		
'	"	Cub.'	C."	C.'''	'	"	Cub.'	C."	C.'''
72	49"	1357	045	200	56	50"	1099	—	—
76		1432	436	600	60		1177	500	—
80		1507	828	—	64		1256	—	—
84		1583	219	400	68		1334	500	—
88		1658	610	800	72		1413	—	—
92		1734	002	200	76		1491	500	—
96		1809	393	600	80		1570	—	—
100		1884	785	—	84		1648	500	—
40	50"	785		—	88		1727	—	—
44		863	500	—	92		1805	500	—
48		942		—	96		1884	—	—
52		1020	500	—	100		1962	500	—

Vierte Tafel.

Anzahl der Seiten	Die Winkel deſſelben	Summe aller Winkel	Anzahl der Seiten	Die Winkel deſſelben	Summe aller Winkel
5	108	540	21	162 $\frac{6}{7}$	3420
6	120	720	22	163 $\frac{1}{3}$	3593
7	128 $\frac{5}{7}$	900	23	164 $\frac{8}{23}$	3780
8	135	1080	24	165	3960
9	140	1260	25	165 $\frac{1}{5}$	4130
10	144	1440	26	166 $\frac{2}{13}$	4320
11	147 $\frac{3}{11}$	1620	27	166 $\frac{2}{3}$	4500
12	150	1800	28	167 $\frac{1}{7}$	4680
13	152 $\frac{4}{13}$	1980	29	167 $\frac{17}{29}$	4860
14	154 $\frac{2}{7}$	2160	30	168	5040
15	156	2340	31	168 $\frac{12}{31}$	5228
16	157 $\frac{1}{2}$	2520	32	168 $\frac{3}{4}$	5400
17	158 $\frac{14}{17}$	2700	33	169 $\frac{1}{11}$	5580
18	160	2880	34	169 $\frac{7}{17}$	5760
19	161 $\frac{9}{19}$	3059	35	169 $\frac{5}{7}$	5940
20	162	3240	36	170	6120

Fünfte Tafel.

Klaftern	betragen	Klaftern	betragen	Klaftern	betragen	Klaftern	betragen	Klaftern	betragen	Klaftern	betragen
5 a	4 b	2 c	3 a	1 e	2 a	2 g	5 a	1 i	3 a	12 l	7 a
3 -	2 c	5 -	6 b	5 -	8 b	1 -	2 b	5 -	12 b	15 -	7 b
7 -	4 d	7 -	6 d	3 -	4 c	3 -	5 c	1 -	2 c	18 -	7 c
2 -	1 e	4 -	3 e	7 -	9 d	7 -	11 d	7 -	12 d	3 -	1 d
9 -	4 f	3 -	2 f	9 -	8 f	4 -	5 e	2 -	3 e	24 -	7 e
5 -	2 g	5 -	3 g	5 -	4 g	9 -	10 f	3 -	4 f	27 -	7 f
11 -	4 h	11 -	6 h	11 -	8 h	11 -	10 h	5 -	6 g	30 -	7 g
3 -	1 i	2 -	1 i	3 -	2 i	6 -	5 i	12 -	11 h	33 -	7 h
8 -	9 k	16 -	27 k	4 -	9 k	16 -	45 k	8 -	27 k	36 -	7 i
7 -	12 l	7 -	18 l	7 -	24 l	7 -	30 l	7 -	36 l	32 -	21 k
9 -	8 m	3 -	4 m	9 -	16 m	9 -	20 m	3 -	8 m	27 -	14 m
4 b	5 a	4 d	7 a	4 f	9 a	4 h	11 a	9 k	8 a	8 m	9 a
6 -	5 c	5 -	7 b	5 -	9 b	5 -	11 b	45 -	32 b	70 -	63 b
7 -	5 d	6 -	7 c	2 -	3 c	6 -	11 c	27 -	16 c	4 -	3 c
8 -	5 e	8 -	7 e	7 -	10 d	7 -	11 d	63 -	32 d	14 -	9 d
9 -	5 f	9 -	7 f	8 -	9 e	8 -	11 e	9 -	4 e	16 -	9 e
2 -	1 g	10 -	7 g	10 -	9 g	9 -	11 f	81 -	32 f	2 -	1 f
11 -	5 h	11 -	7 h	11 -	9 h	10 -	11 g	45 -	16 g	20 -	9 g
12 -	5 i	12 -	7 i	4 -	3 i	11 -	12 i	99 -	32 h	22 -	9 h
32 -	45 k	32 -	63 k	32 -	81 k	32 -	99 k	27 -	8 i	8 -	3 i
28 -	60 l	1 -	3 l	7 -	27 l	7 -	33 l	21 -	32 l	64 -	81 k
63 -	70 m	9 -	14 m	1 -	2 m	9 -	22 m	81 -	64 m	14 -	27 l

Zweiter Anhang,

welcher

die Beſchreibung der illuminirten Forſtcharte

enthält.

Alle Forſtvermeſſungen bezwecken, den Forſtoffizianten eine genaue Ueberſicht ſowohl von der Größe ihres Reviers mit allen ſeinen Abtheilungen, als auch von der Beſchaffenheit des Wald- oder Forſtbeſtandes zu verſchaffen Zur Fortführung oder Einrichtung einer guten Forſtwirthſchaft aber genügt in den meiſten Fällen nicht bloß eine allgemeine Kenntniß des Forſts, ſondern eine ſpecielle Einſicht in die einzelnen Gegenſtände, welche ſich auf dem Reviere befinden.

Eine ſpecielle, nach vollſtändigen geometriſchen Principien vorgenommene Vermeſſung eines Forſts, und eine alle darin merkwürdigen Gegenſtände und vorſchriftmäßigen Eintheilungen enthaltende Charte iſt das erſte Erforderniß, worauf man eine zweck- und planmäßige Forſtwirthſchaft gründen kann. Vermeſſungen dieſer Art gehören für eigen dazu beſtimmte Waldmeſſer und die davon angefertigte Charte heißt eine eigentliche Forſt-Charte.

Ver-

Vermeſſungen, welche nicht ſo speciell ſind, ſondern nur das Ganze und die einzelnen Theile ohne konſiderable Abweichungen von der wahren Größe bezwecken, alſo auch nur Plane nach dieſer Abſicht liefern, und in ſolchen Fällen vorgenommen werden, wenn augenblicklich eine ſpecielle Vermeſſung unmöglich iſt, geben Forſt-Situationsplane, und ſind ebenfalls Werke der Waldmeſſer oder auch wohl der Forſtmänner. Von beiden Vermeſſungsarten, ſo wie von den daraus gefertigten Charten, ſoll hier das Wiſſenswertheſte bemerkt werden. Da die letztere Vermeſſungsmethode die leichtere iſt, und den einfachſten Zeichnungsentwurf veranlaßt, ſo wird damit der Anfang gemacht.

I.

Von der Aufnahme und dem Entwurfe der Forſtſituationsplane.

Die eigentliche Abſicht der Situationsplane iſt, ſchneller als auf dem gewöhnlichen Wege einer ſpeciellen Waldvermeſſung, eine generelle Ueberſicht von folgenden Stükken zu erhalten:

1) Von den Diſtrikten in dem Forſte; ob ſolche mit haubarem Holze oder mit Nachwuchs beſtanden, und von den Holzarten, die auf den Revieren angetroffen werden.

2) Von den in den Revieren liegenden und nicht zum Holzboden gehörigen Theilen, nach Größe und Lage.

3) Von den Wohnungen der Ober- und Unterforſtbedienten in Abſicht der Lage und Schicklichkeit zur bequemen Aufſicht.

4) Von

4) Von der Lage der nächſten Dorfſchaften und den Triften, welche von dieſen Dörfern in dem Forſt mit der Hut betrieben werden.

5) Von den Seen und Gewäſſern in und an Forſten, die zum Holztransport etwas beitragen können.

6) Von den zerſtreut liegenden Revieren eines Forſts nach Größe, Lage und Entfernung, ſo wie von dem was zwiſchen dieſen Revieren liegt.

Solche zerſtreut liegende Reviere müſſen entweder auf dem Situationsplane ſelbſt mit dem Hauptforſte verbunden ſeyn, oder ſie werden wie kleine geographiſche Charten nach einem verjüngten Maßſtabe beſonders gezeichnet.

Nach dieſen Begriffen kann ein geſchickter Waldvermeſſer ſich die Principia feſtſtellen, nach welchen am leichteſten und ſicherſten ein Situationsplan aufzunehmen iſt. Zum nähern Unterrichte eines Forſtoffizianten, der kein Waldmeſſer von Profeſſion iſt, können folgende Vorſchriften nützen:

a) In manchen nicht vermeſſenen Forſten, wie z. B. in einigen K. Preußiſchen, trift es ſich, daß ſie doch durch Geſtelle, welche in der Richtung von Morgen gegen Abend, und von Mittag gegen Mitternacht, gemeiniglich in einer Breite von 2 Ruthen durchgeſchlagen worden, in Vierecke getheilt ſind, welche Jagen genannt werden. Die Geſtelle von Morgen gegen Abend durch den Forſt heißen Hauptgeſtelle, wie AA, BB, CC, ꝛc. des beigefügten illuminirten Forſt-Plans; diejenigen aber, welche den Forſt von Mitternacht gegen Mittag durchſchneiden, Feuergeſtelle, wie aa, bb, cc, ꝛc.

In Forſten dieſer Art muß der Waldmeſſer einige dergleichen, und zwar die längſten Geſtelle beider Arten

ten meſſen. Werden überdies die Winkel, welche durch die ſich ſchneidenden Geſtelllinien entſtehen, entweder durch Hülfe der Bouſſole oder des Aſtrolabiums gemeſſen, ſo iſt der Waldmeſſer im Stande, davon ein Netz auf das Papier zu entwerfen, welches bei der fernern Aufnahme mit Nutzen und vielen Abkürzungen gebraucht werden kann. Mit dieſem Netz in der Hand geht der Waldmeſſer in den Forſt und fängt bei einem Jagen an, welches an das zur Baſis genommene Geſtelle ſtößt, nummerirt es ſo wohl auf dem Papiere als auch in dem Forſt, und geht das Jagen durch, nimmt Blößen, Schonungen, Brüche und ſo alle nicht zum Forſtboden gehörigen Theile auf. Hierbei kann er auch zugleich mit auf die Holzbeſtände in den Jagen Rückſicht nehmen. Die Jagen, wie z. B. Nr. 49. 50 ꝛc. im Plane, welche an die Gränze ſtoßen und nicht voll ſind, werden mit der Gränze nach geometriſchen Principien verbunden, die der leicht findet, der den abgehandelten geometriſchen Unterricht gefaßt hat. Mit den Wegen, Straßen, Gewäſſern ꝛc. wird auf eine ähnliche Art verfahren, und alles auf das Papier gebracht, wodurch ein Plan entſtehen muß, der mit der wirklichen Größe in einem ſolchen Verhältniſſe ſtehen muß, welches keine beträchtlichen Differenzen giebt.

b) Wenn ein Forſt nicht in Jagen durch Geſtelle eingetheilt iſt, ſo werden vom Waldmeſſer zuvörderſt Wege, Straßen, Gewäſſer ꝛc. überhaupt alle natürlichen Theilungslinien durch den Forſt gemeſſen und zu Papier gebracht, wodurch auch eine Art von Netz entſteht, welches aber nicht ſo bequem ausfällt, als im erſten Falle. Beim Aufnehmen ſolcher Forſten iſt anzurathen, wenn die Vermeſſung der innern Theile vorgenommen wird, auf Wegen oder Linien von Diſtanz zu Diſtanz kleine Pfähle einzuſchlagen, ſie zu numeriren, und ſolche mit ihren Nummern auch ins Brouillon und

auf

auf den Plan zu zeichnen, um darnach bequem einzele Theile aus einem Diſtrikte herauszumeſſen.

Mit der Aufnahme eines ſolchen Situationsplans wird gewöhnlich die Abſchätzung oder Taxation des Forſts verbunden, und zwar ſo, wie ſie bereits beſchrieben worden iſt.

Der Maßſtab, wornach Situationsplane aufgezeichnet werden, wird nicht größer als 200 Ruthen, und nicht kleiner als 500 Ruthen auf einen rheinländiſchen Decimalzoll genommen, wornach im erſten Falle eine geographiſche Meile auf 10 rheinl. Decimalzolle, und im letzten Falle 4 dergleichen auf eine Meile gehen; demnach können auf einen gewöhnlichen Zeichenbogen 4 Quadratmeilen nach dem großen Maßſtabe, und nach dem kleinern füglich 24 Quadratmeilen gezeichnet werden. Größer als dieſes Format wird ſelten ein Situationsplan gezeichnet, und wenn der Forſt ſehr groß iſt, ſo wird er auf verſchiedene Sektionen von dieſer Größe gebracht.

Die bei der Ausarbeitung gebrauchten Farben, womit die verſchiedenen Abtheilungen des Forſts angelegt werden, bringt man in Rechtecke auf den Plan mit gehörigen Erklärungen, doch aber in jedem Falle nur ſo vielerlei als der Plan ſelbſt enthält.

Dieſe Situationsplane können auch dann noch von Nutzen ſeyn, wenn ein Forſt ſpeciell vermeſſen wird, denn man braucht ſie ſtatt der, von der ſpeciell entworfenen Forſtcharte, gemachten reducirten Charten mit mehr Sicherheit als dieſe, weil durch das Verjüngen doch immer einige Unrichtigkeiten entſtehen.

Ueber dieſe Plane, ihre Aufnahme, Zweck, Nutzen und die damit verbundene Forſtabſchätzung, ſehe man des K. Pr. Geh. Forſtrath C. W. Hennerts Anweiſung zu Taxation der Forſten. 1r Theil §. 50ff.

Noch

Noch iſt zu bemerken, daß es nicht nothwendig iſt, einen Forſt vor der Abſchäꜩung in Blöcke und Schläge einzutheilen, wie im Plane auf der Hälfte linker Hand, bloß Jagen wie N 1, 2, 3 ꝛc. durch Geſtelle; rechter Hand aber Blöcke I, K, L, M, in Schläge getheilt vorkommen; im Gegentheil richtet ſich die Eintheilung zur Regulirung des Haues, wenn ſie nach richtigen Grundſäꜩen entworfen wird, nach dem Holzbeſtand und nicht nach der Größe der Fläche.

Die Jagen werden mit Pfählen markirt, welche in die entgegengeſeꜩten Ecken nach der Diagonallinie ſo eingeſeꜩt werden, wie ſie die illuminirte Charte in der Abtheilung rechter Hand anzeigt. Bezeichnung der Jagen, Blöcke und Geſtelle wird nach speciellen Vorſchriften vorgenommen, wornach ſich ſo wohl der Waldmeſſer, als auch die Forſtoffizianten richten müſſen.

II.

Von der Aufnahme und dem Entwurfe der ſpeciellen Forſtcharten.

Da die Forſtcharten vermöge ihrer Beſtimmung, mannichfaltigen Veränderungen unterworfen ſind, ſo iſt es nothwendig, dieſen Charten eine ſolche Einrichtung zu geben, daß ſie auf die möglich längſte Zeit bei allen nachzutragenden Veränderungen brauchbar bleiben, und es nicht nöthig iſt, ſie wieder neu anfertigen zu laſſen. Die Forſtcharten, welche nach K. Preuß. Verordnungen nach dem Maßſtabe von 50 Ruthen auf einen rheinl. Decimallzoll gezeichnet werden, heißen reine Brouilloncharten und dienen hauptſächlich dazu, um nach denſelben über den Flächeninhalt und über die Größe und Lage der Gränzlinien zu entſcheiden. Solche Charten müſſen, wegen ihrer fortwährenden Dauer, ſo wenig wie möglich vom Detail enthalten, weil dieſes den mehreſten Veränderungen unterworfen iſt.

Nächſt

Nächſt dieſen werden reducirte Charten verfertiget und zwar nach einem Maßſtabe von 250 rheinl. Ruthen auf einen dergleichen Decimalzoll. Dieſe dienen ſowohl zur ſchnellern Ueberſicht, als auch zum eigentlichen Gebrauche in Forſten. Der dazu beſtimmte Maßſtab aber iſt doch von der Größe, daß man alle Schläge, Jagen und die übrigen innern Theile des Forſts auf der Charte deutlich und kennbar antrift. Forſtcharten dieſer Art fügt man verſchiedene Regiſter bei, als das Gränzvermeſſungsregiſter, das Vermeſſungsregiſter, die Tabelle der Schläge und Schonungen, das ſpecielle Regiſter des Holzes nebſt der dazu gehörigen Rekapitulation. Die Einrichtung dieſer Regiſter beſchreibt das Reglement für Ingenieurs im Preuß. von 1787.

Die Principia, nach welchen Forſten ſpeciell aufgenommen, und in Zeichnung gebracht werden, ſind die, welche im vorhergehenden beſchrieben worden ſind, und die mit denen völlig übereinkommen, nach welchen überhaupt Felder, Gegenden ꝛc. vermeſſen werden.

Was die Ausarbeitung einer Forſtcharte auf dem Papiere betrift, und wovon die illuminirte Charte ein Beiſpiel giebt, ſo kommt es vorzüglich darauf an, daß ſie ein deutliches Bild von dem aufgenommenen Reviere enthalte. Sie muß daher ſo gearbeitet werden, daß alle darauf vorkommenden Gegenſtände nach ihrer Lage und Größe durch charakteriſtiſche und vorgeſchriebene Zeichen ohne Verwechſelung mit andern augenblicklich und vollkommen nach ihrer wahren Bedeutung unterſchieden werden können. Die Zeichen müſſen entweder den Gegenſtänden weſentlich zukommen, oder vorgeſchrieben werden, wie dies der Fall im Preußiſchen iſt, und nach dieſen Zeichen werden ſowohl die Brouillons, als auch die reducirten oder eigentlichen Forſtcharten bezeichnet.

Jede Holzgattung wird nach einer inſtruktionsmäßigen Farbe eingetragen, wie dieſe der illuminirte Plan in den Rechtecken für Kihnen oder Kiefern, Eſchen, Birken, Eichen und Buchen enthält. Die Verſchiedenheit des Holzalters wird nach den angenommenen Klaſſen durch verſchiedene Abſtufungen der Farben unterſchieden, ſo daß bei allen Holzarten das haubare Holz oder die erſte Klaſſe am ſtärkſten erſcheint. Damit die Farbenabſtufung nicht zu groß werde, ſo legt man das in Schonung liegende Holz nur mit einer Einfaſſung durch ſtarke Striche an, wie man dies auf dem illum. Plane bei jeder Holzgattung findet. Der Zeichner muß die Holzbeſtands- oder eigentlichen, zum Gebrauche in den Forſten beſtimmten Charten ſo anlegen, daß nicht die erſten Klaſſen oder die mit Holz beſtandenen Oerter, welche die ſtärkſte Farbe erhalten, zuerſt angelegt werden, ſondern der ganze, mit Nadel- oder Laubholz beſtandene Diſtrikt muß zuerſt mit einer nur ſchwachen, vorſchriftsmäßigen Farbe ſo angelegt werden, daß ſie ſich genugſam von den Blößen, welche weiß bleiben, unterſcheidet. Mit derſelbigen ſchwachen Farbe werden nun die übrigen Oerter, welche mit dem nächſt ältern Holze nach Verhältniß der Klaſſifikation beſtanden, ſo lange übergangen, bis ſich dieſe Diſtrikte von denen der nächſt jüngern Klaſſe deutlich unterſcheiden. So findet man ſowohl in den Rechtecken, als auch in den beiden Abtheilungen des illuminirten Plans dieſe Farbenabſtufung mit dazu gehörigen Erklärungen angewandt. Ferner übergeht man mit der nämlichen ſchwachen Tinte oder Farbentuſche alle Oerter, welche mit Nadelholz von dem Alter der erſten und zweiten Klaſſe beſtanden, ſo oft bis die Farbe eine ſolche Stärke erhält, daß ſie ſich von der, womit die dritte Klaſſe und die Schonung angelegt iſt, unterſcheidet. Wenn alles getrocknet iſt, ſo wird auf eben dieſe Art die zweite Klaſſe, und zuletzt die erſte ſo lange, bis ſich auch dieſe von den übrigen deutlich auszeichnen, übertragen. Steht Holz von

gleichem

gleichem Alter nicht Diſtriktweiſe beiſammen, ſondern zerſtreut in andern Klaſſen, ſo muß ſolches Fleckweiſe nach ſeiner Stärke bezeichnet werden, wie auf dem illum. Plane in der zweiten Klaſſe des Kihnenholzes, wie auch des Eichen-, Birken- und Buchenholzes zu ſehen iſt. Dieſe Flecke werden nach ihrer Größe am ſicherſten mit Tuſchlinien mit der Feder eingefaßt, und vor dem übrigen Holze ſcharf markirt.

Im Schlagholze wird das ſtarke Anlegen des haubaren Holzes vermieden, damit die Charte dadurch nicht auf Jahrelang unbrauchbar wird. Dieſes Umſtands wegen legen manche die Forſtcharten nicht ſo an, wie im Preuß., ſondern z. B. alles Nadelholz ꝛc. mit einer einzigen blaſſen Tinte. Man ſehe des Hrn. Forſtmeiſters Hartigs Anweiſung zur Taxation der Forſte, wobei man ebenfalls einen illum. geometriſchen Plan findet.

Die Hauptfarben müſſen ſo viel möglich unter eine geringe Anzahl gebracht werden, damit keine Undeutlichkeit entſtehe. Man legt daher alles Nadelholz mit ſchwarzer Tuſche an, und unterſcheidet weder Tannen noch Fichten von Kihnen, ſondern überläßt die ſpecielle Nachweiſung den Vermeß- und Abſchätzungsregiſtern. Eben ſo bezeichnet man alles Baumlaubholz, nämlich Linden, Ahorn, Wachholder, Eſchen, Pappeln, Sahlweiden, Espen ꝛc mit der Farbe der Ellern oder Erlen; Birken, Eichen und Buchen haben andere eigenthümliche Farben; a ſind Kihnen oder Kiefern, b Eichen c und e Birken, d Buchen, f Ellern, g Eichen mit anderm Holze gemiſcht.

Blößen, wie n, werden in der Charte ganz weiß gelaſſen.

Räumden, wie m, bleiben ebenfalls weiß mit kleinen Punkten oder Bäumchen.

Torfbrüche werden hellroth oder fleiſchfarbig illuminirt, und wenn es Kihnenmoor iſt, zeichnet man ſchwarze Punkte oder Bäumchen darauf.

Moräſte und Sümpfe legt man dunkelgelb mit Parallelſtrichen an, und Waſſer darauf, wird mit blauen Streifen angedeutet.

Sandſchollen wie k legt man blaßgelb mit Punkten an.

Wieſen, wie h, grün mit Grasbüſchchen.

Aecker ſchwarz punktirt wie bei m unter dem Namen Forſtgrund, oder mit braunen Streifen, wie bei l unter dem Namen Scheffelplatz.

Hutung wird durch linienförmige Punkte angezeigt, zwiſchen welche blaßgelbe, grüne und rothe Streifen gezogen werden.

Weyher oder Teiche und Flüſſe werden blau angelegt, und entweder verwaſchen oder die Ufereinfaſſungen mit Tuſchlinien umzogen.

Wege legt man bräunlich an; Landſtraßen, Wege, Fußpfade findet man nach ihren Zeichen linker Hand auf dem illum. Plane.

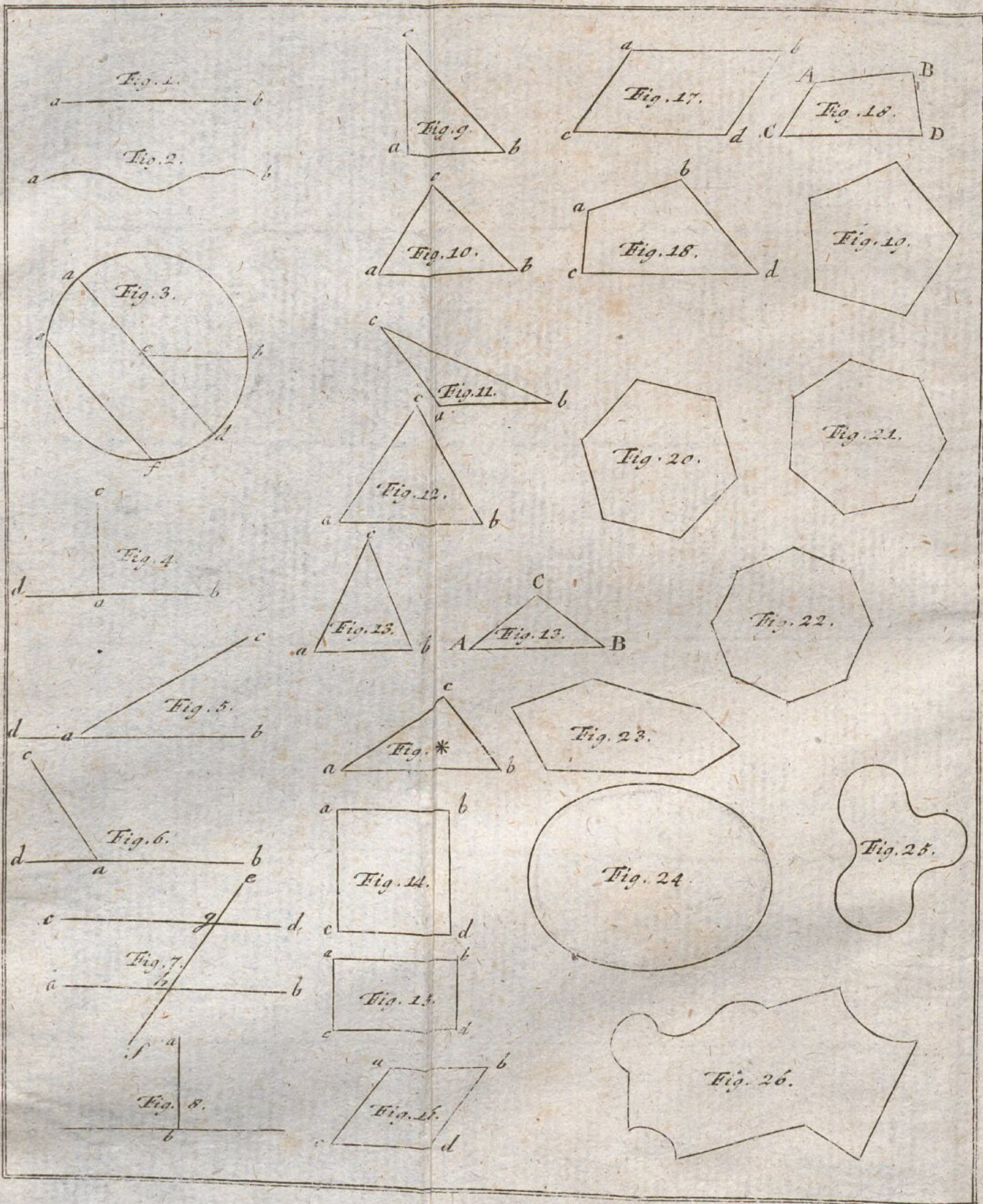
Gränzen werden roth an den Linien angelegt.

Alle übrigen Zeichen, ſo wie die Maßſtäbe, die Bezeichnung der anliegenden Gränzorte und dergl. findet man auf dem Plane mit den dazu nöthigen Erklärungen.

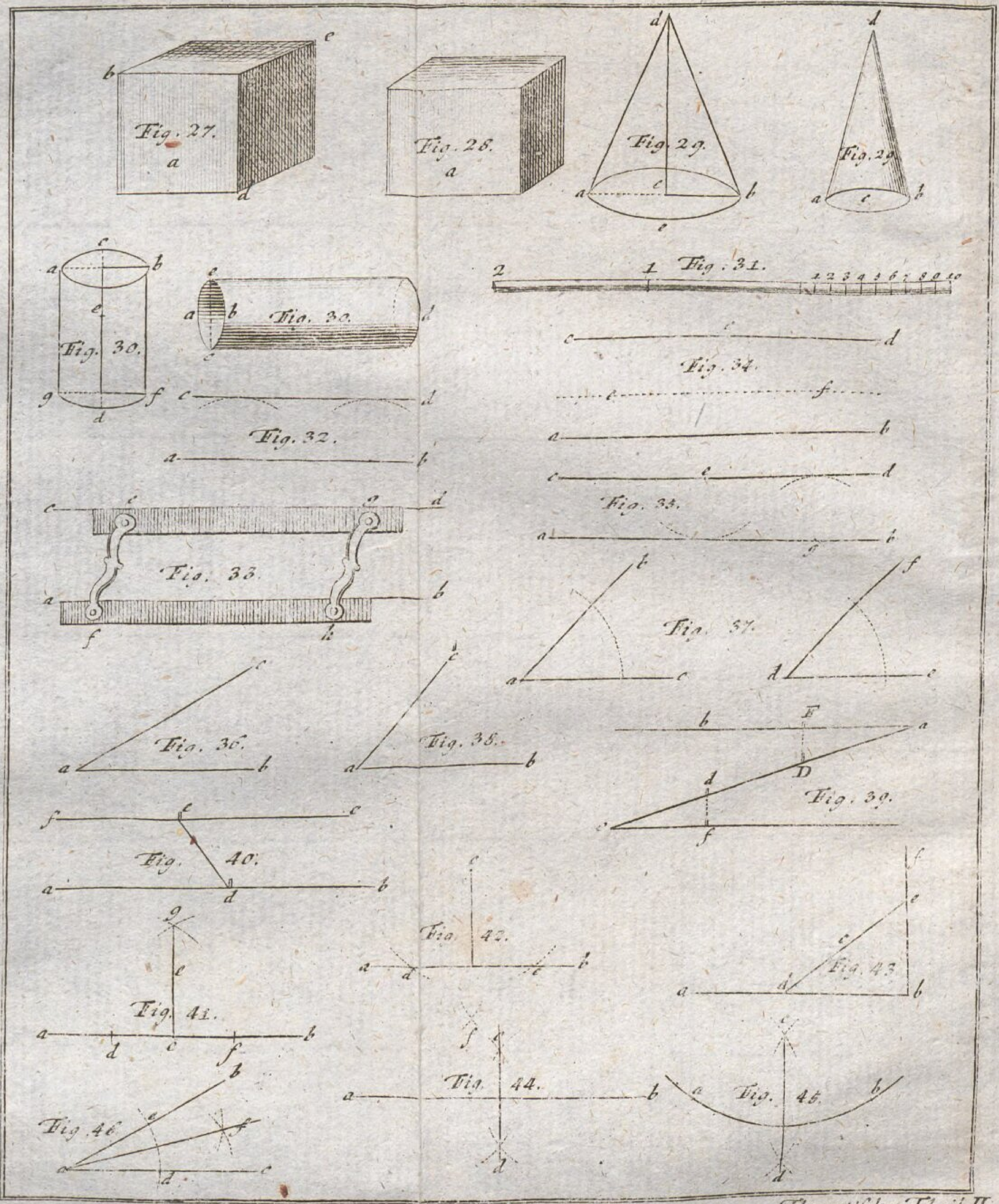
Was

Was die Schönheit einer Forſt-Charte betrift, ſo beruht dieſe vorzüglich auf dem Gebrauche ſanfter Farbentinten, weil zu hart aufgetragene Farben den Plan undeutlich machen und das Auge beleidigen. Richtigkeit und Nettigkeit im Auftragen, ſo daß man nicht über die Gränzen einer zu illuminirenden Fläche kommt, und daß keine Flecken bleiben und keine Streifen entſtehen ꝛc. ſind Dinge, die einen Plan zieren, aber nicht beſchrieben, ſondern nur durch Uebung erlernt werden können. Feine Linien und Punkte und deutliche Umriſſe von merkwürdigen Bäumen, die charakteriſtiſch ſind, als Gränzbäume ꝛc. ſo wie Schatten und Licht, geben der Charte mehr Deutlichkeit und gutes Anſehen, ſo wie ſchöne Inſcription eine vorzügliche Zierde einer Charte iſt.

Bayerische Staatsbibliothek München



Theoretiſcher Theil I



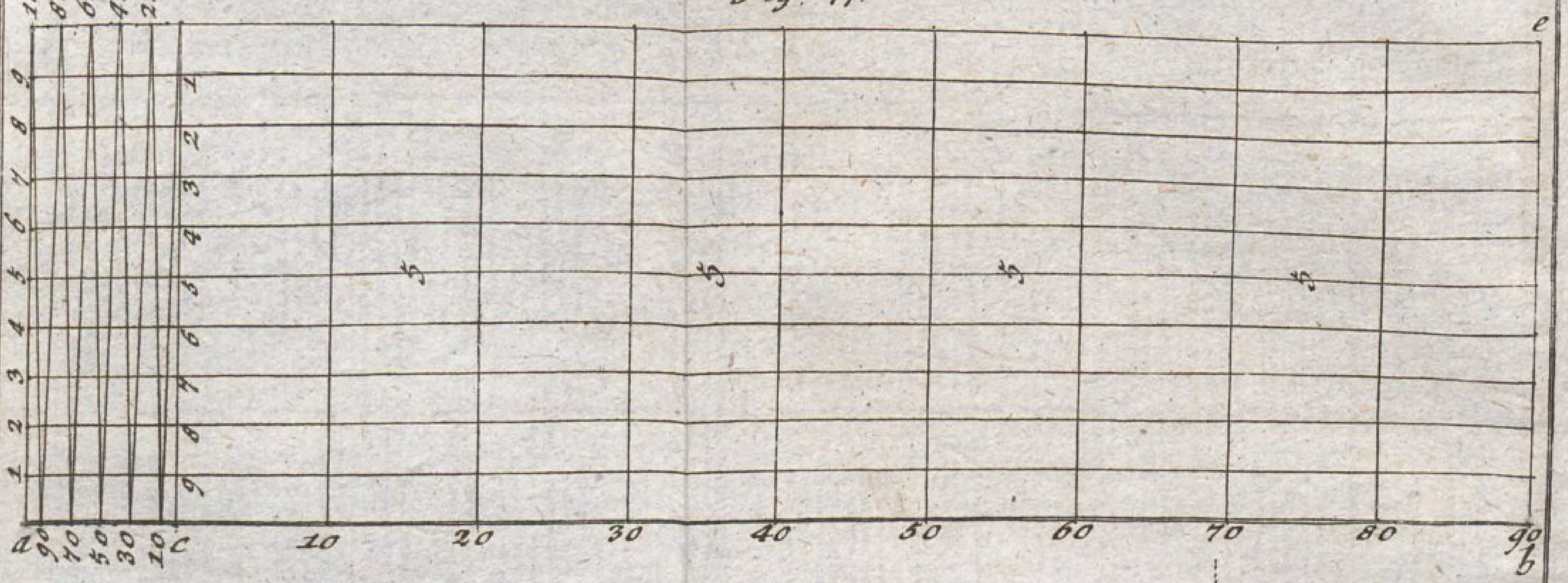
Theoretiſcher Theil II

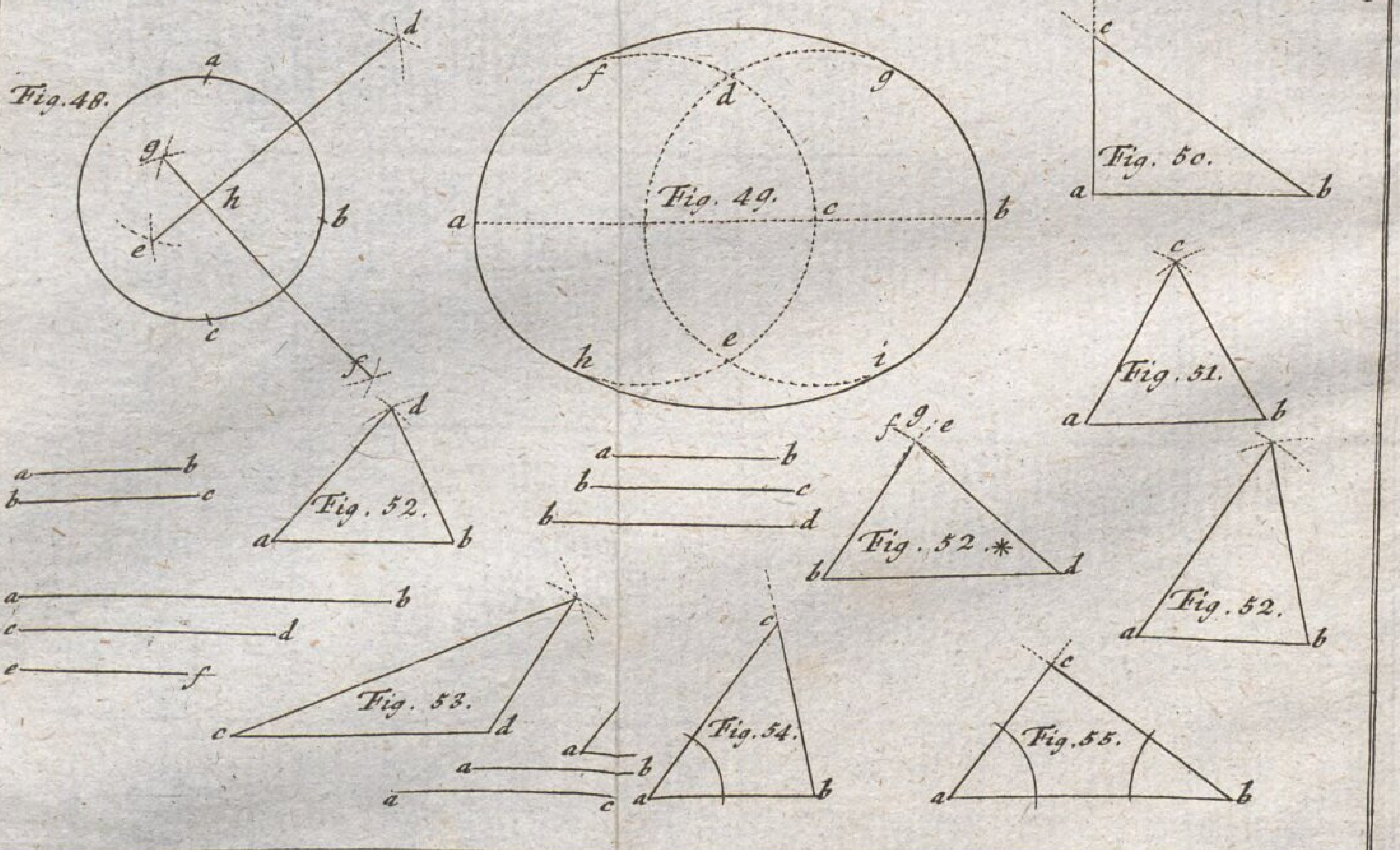
A

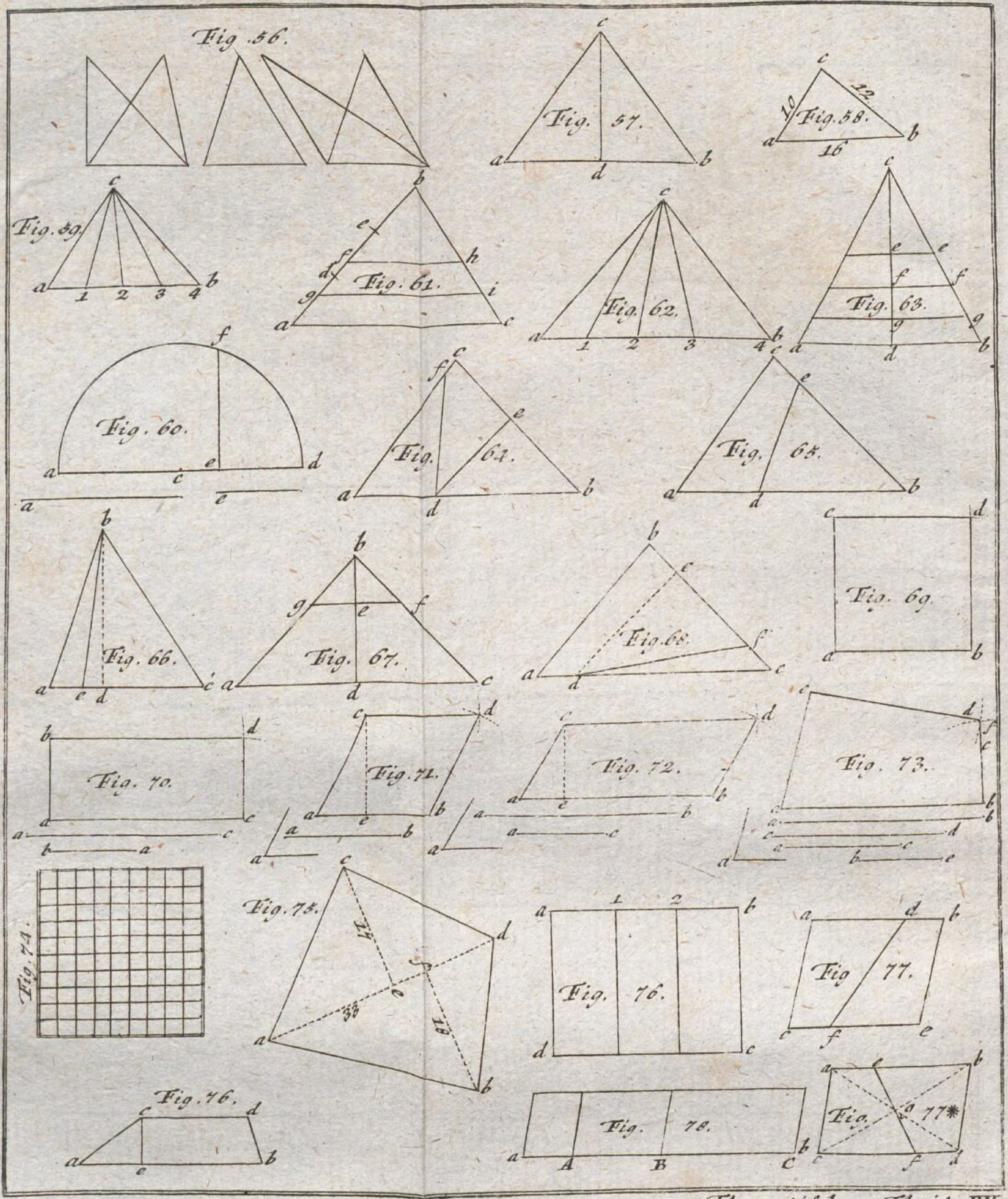
M.

Ein veriüngter Maasſtab
von Drey Decimal Zoll, wie derſelbe gebraucht wird die Waldungen in Sachsen auf zu nehmen.

Fig. 47.

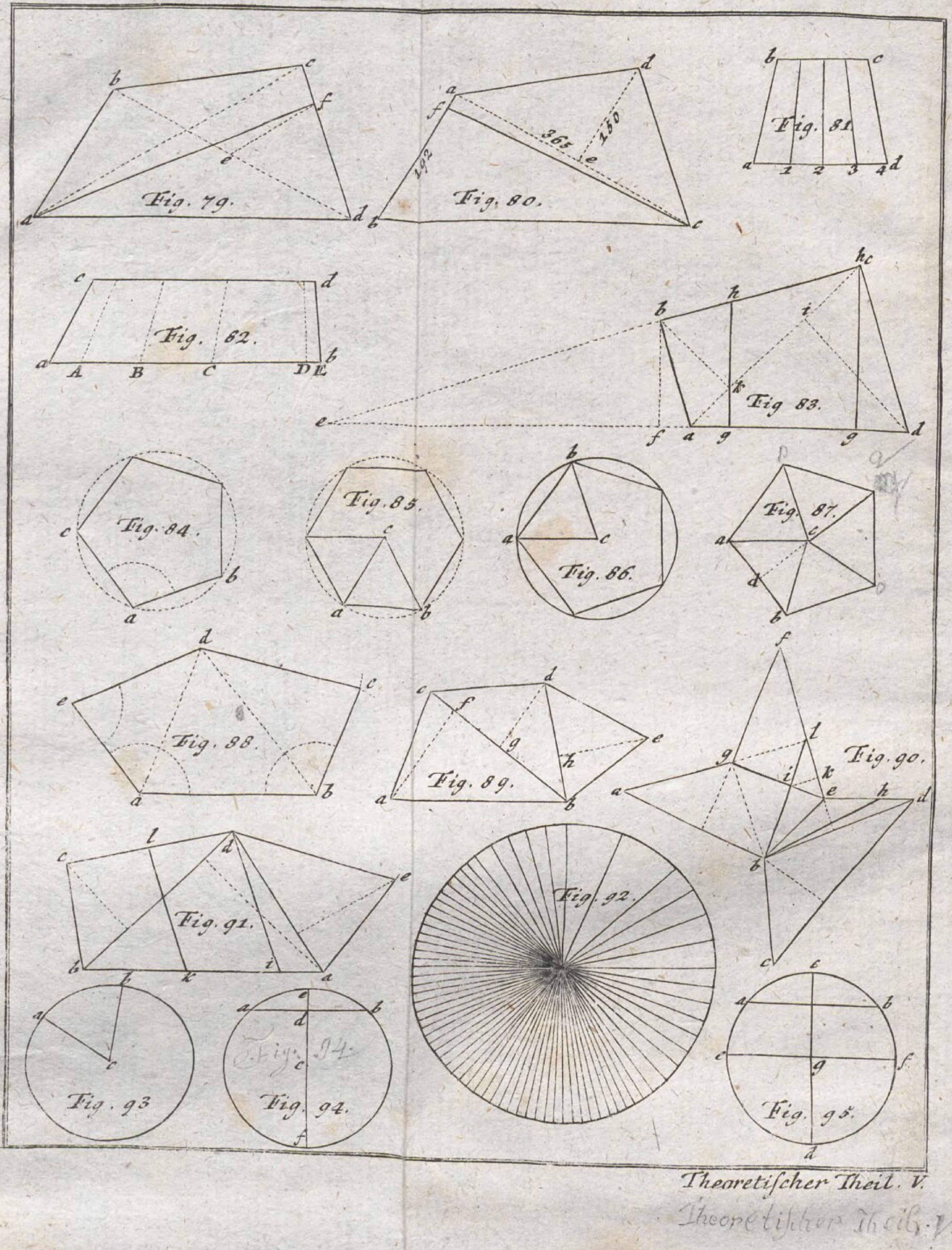






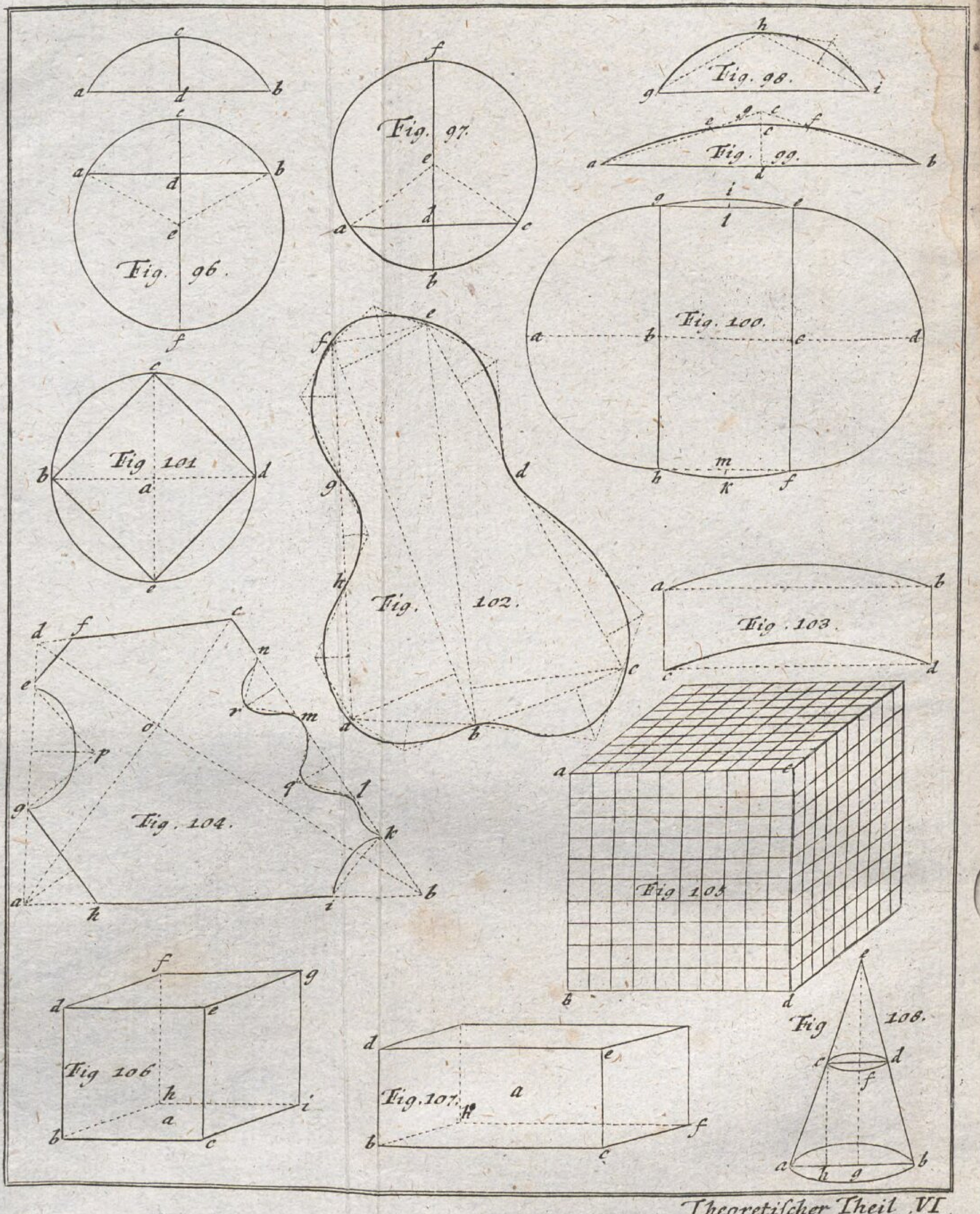
Theoretiſcher Theil IIII.

Theoretiſcher Theil III
N. 4.



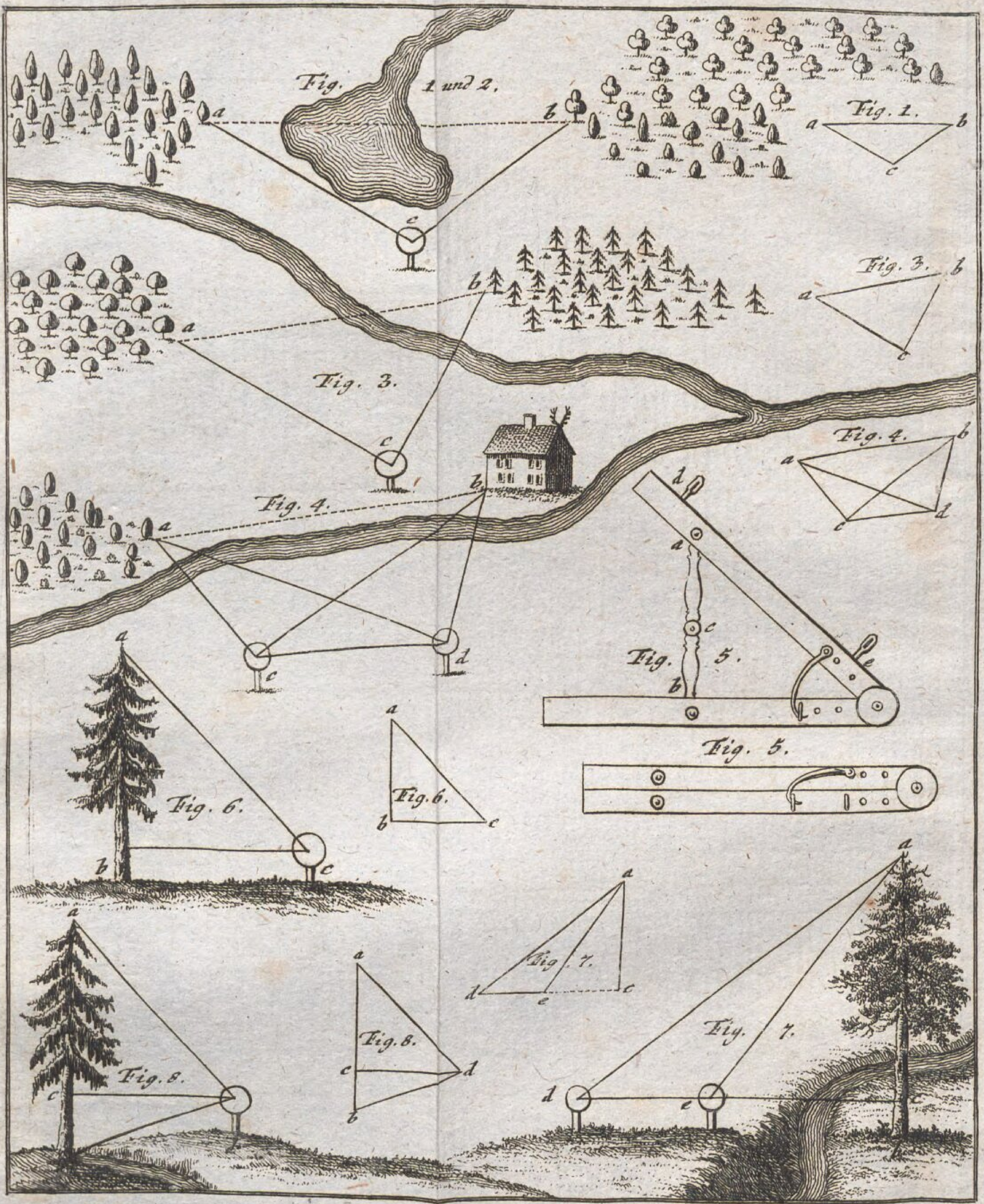
Theoretiſcher Theil. V.

Theoretiſcher Theil. V

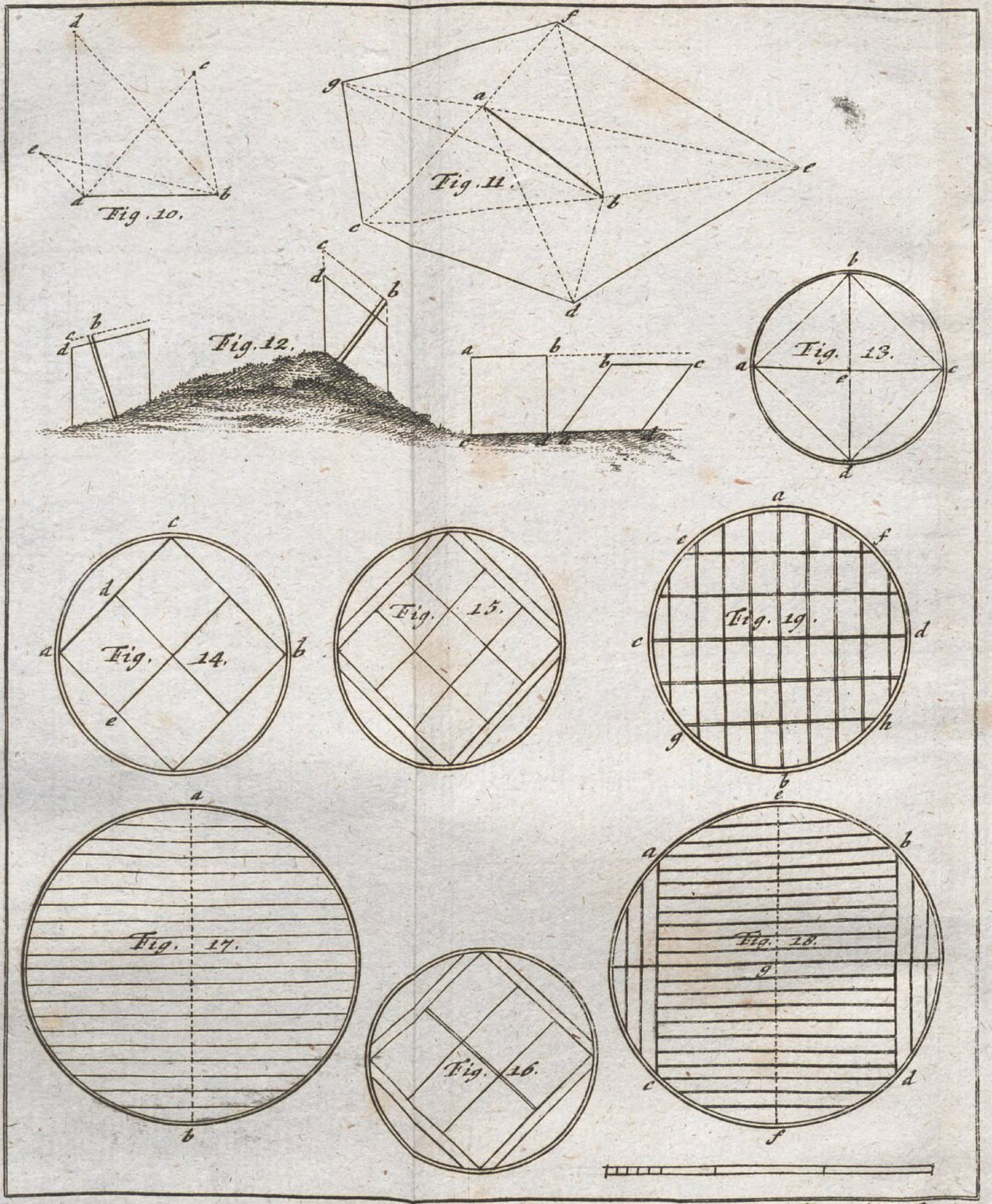


Theoretiſcher Theil VI.

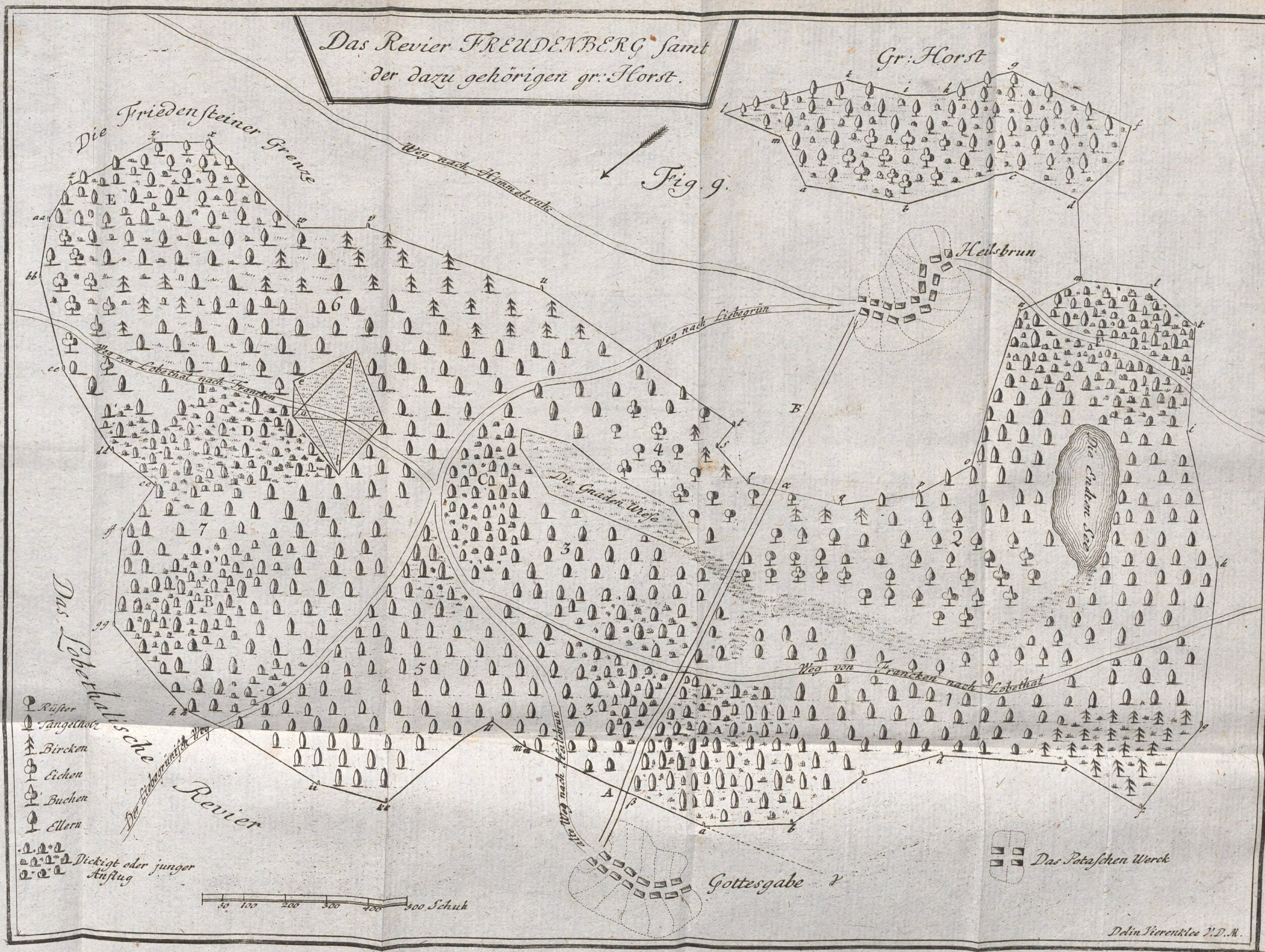
C

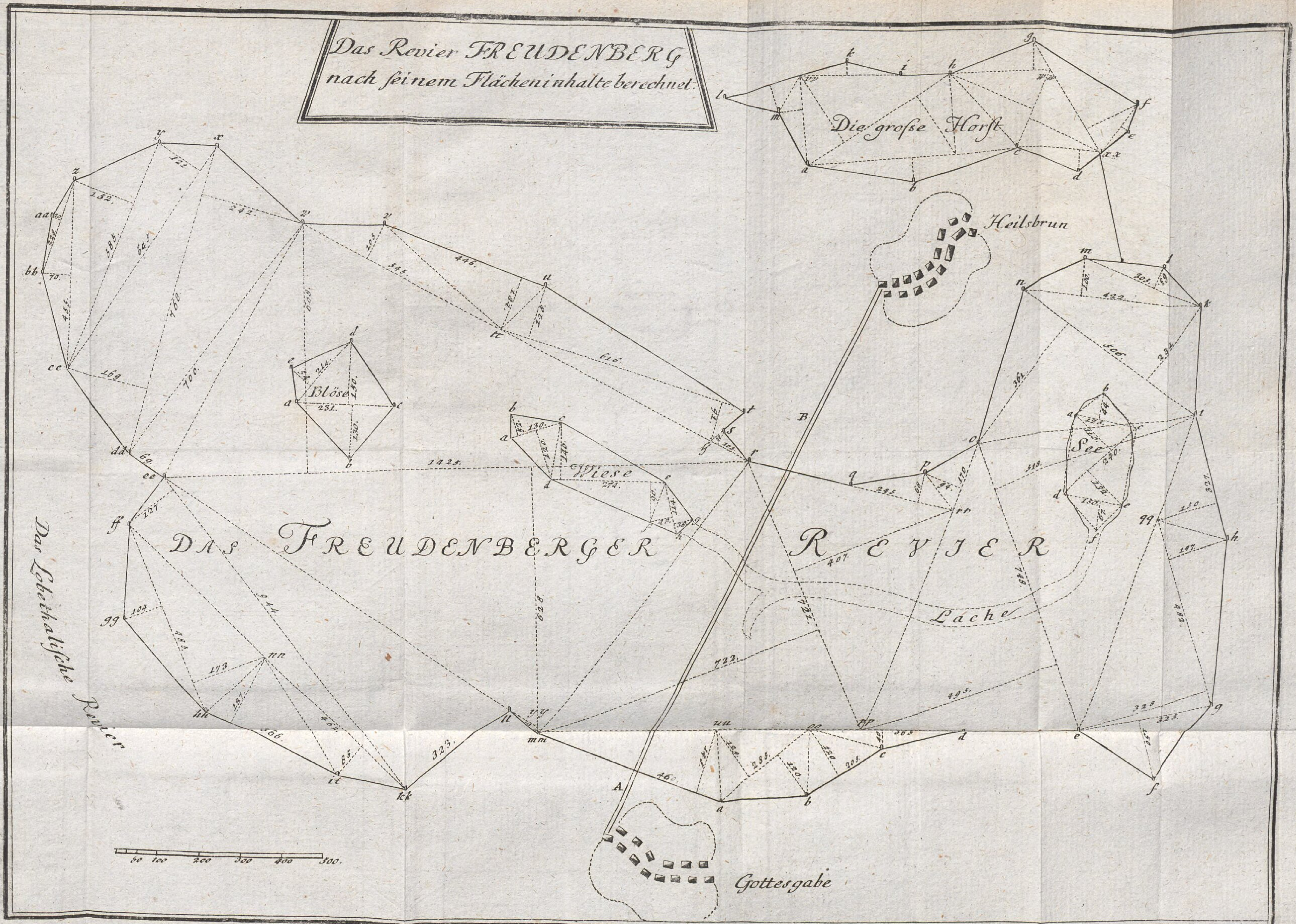


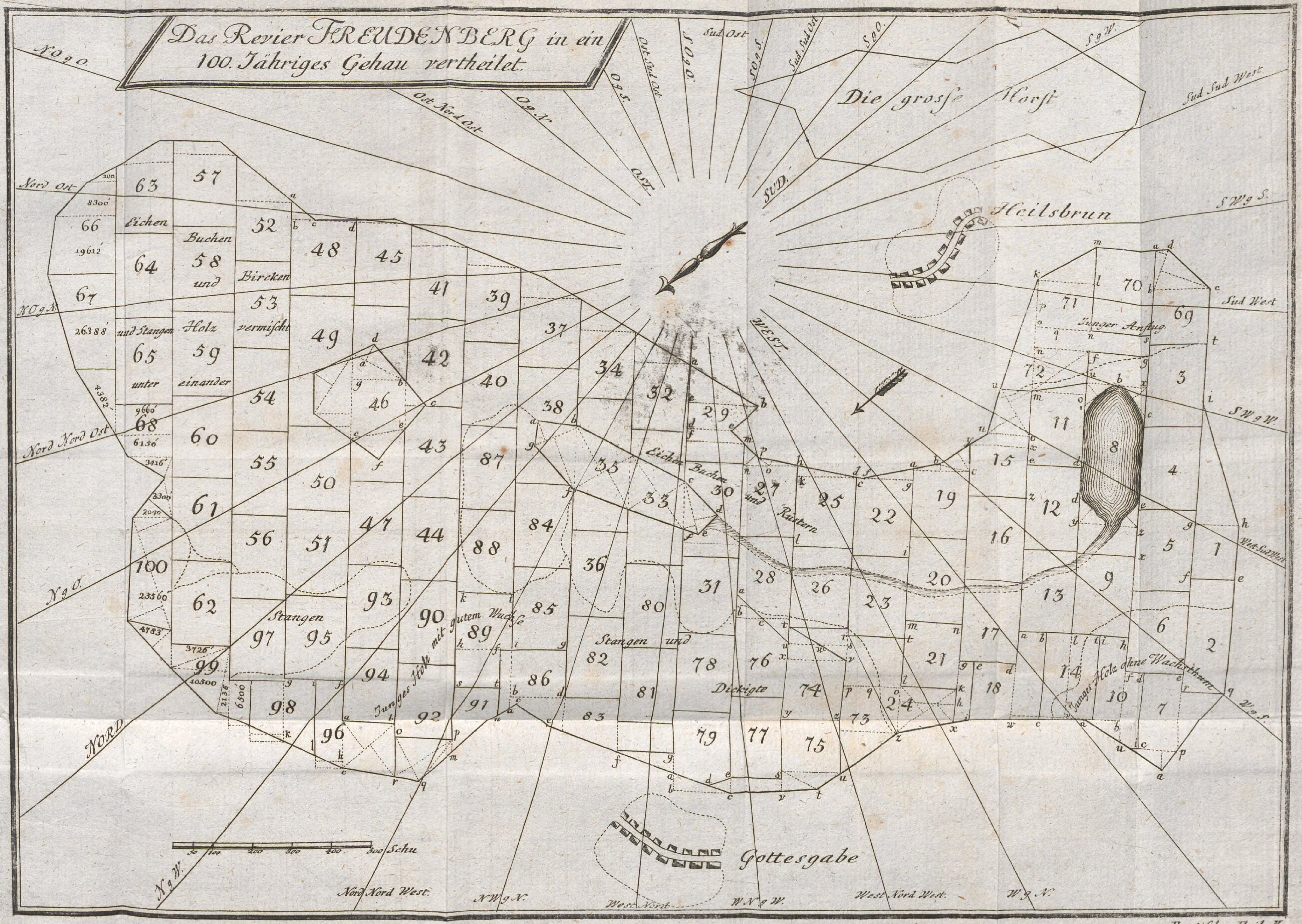
Practiſcher Theil I.



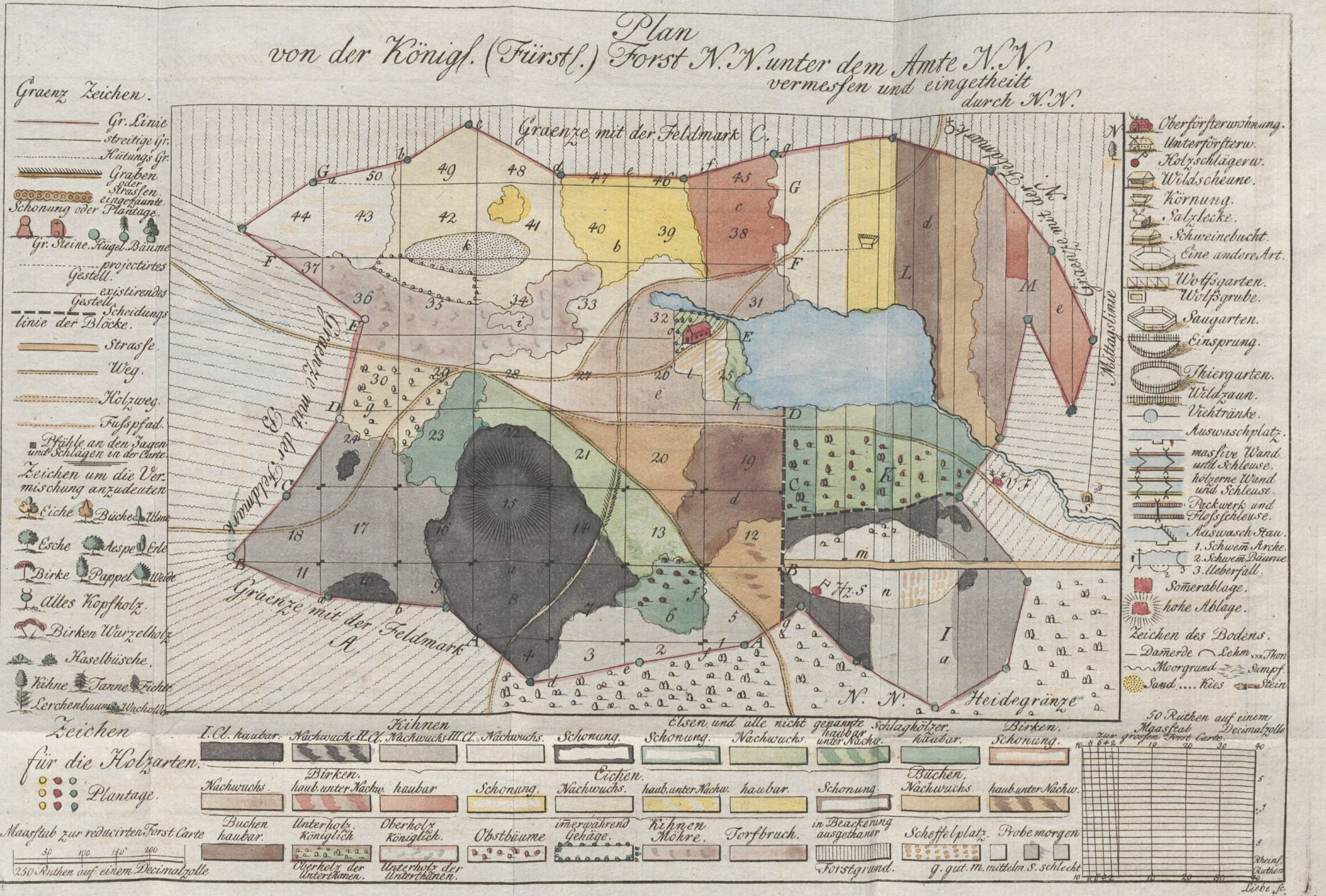
Practiſcher Theil II.

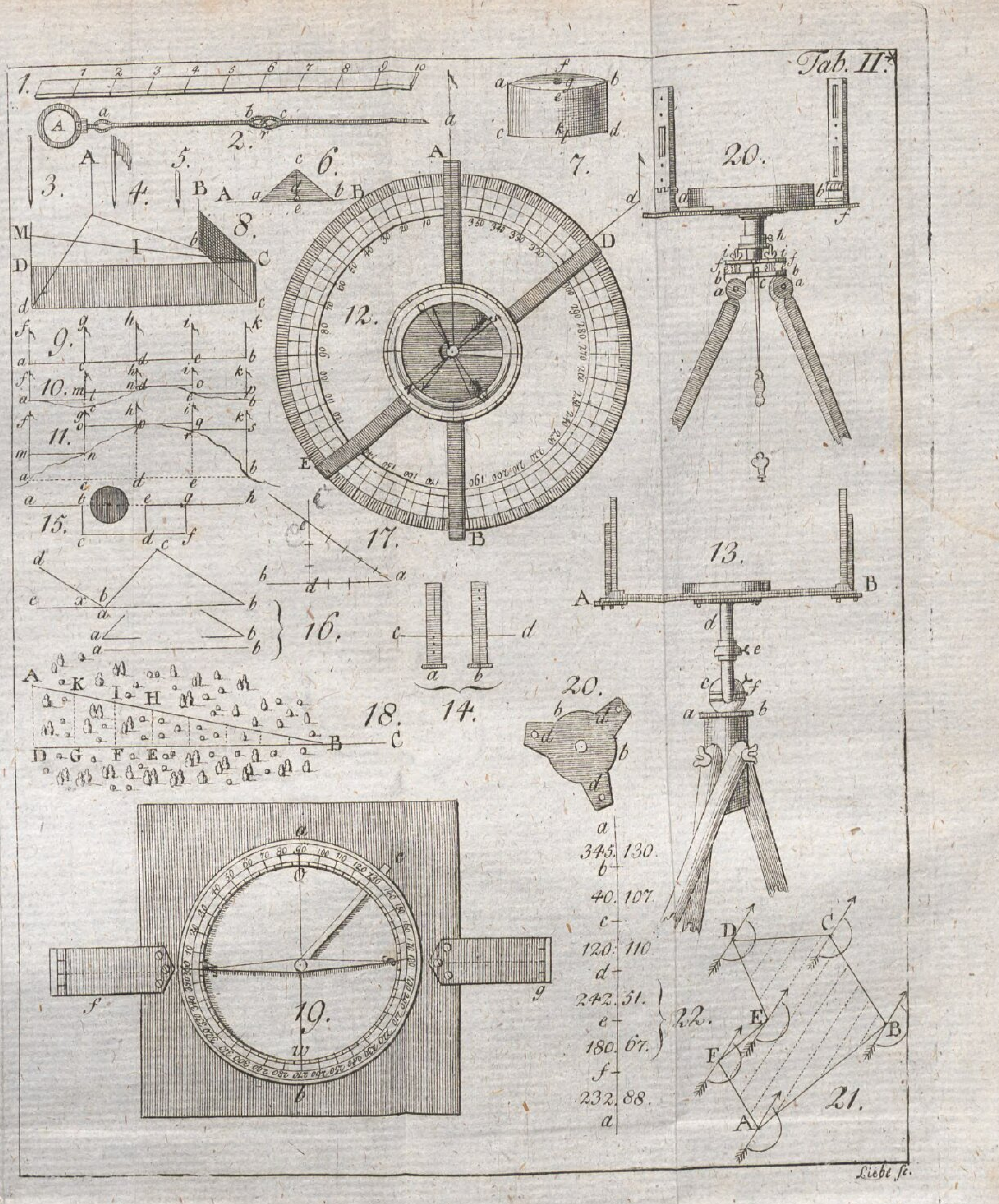

Das Revier FREUDENBERG ſamt
der dazu gehörigen gr: Horſt.
Gr: Horſt
Die Friedenſteiner Grenze
Fig. 9
Heilsbrun
Weg nach Liebigrün
Die Gnaden Wieſe
Weg von Francken nach Lobethal
Das Lobethalſche Revier
Rüſter
Tangelholz
Bircken
Eichen
Buchen
Ellern
Dickigt oder junger Anflug
Gottesgabe
Das Potaſchen Werck
Schuh
Delin Vierenklee V.D.M.

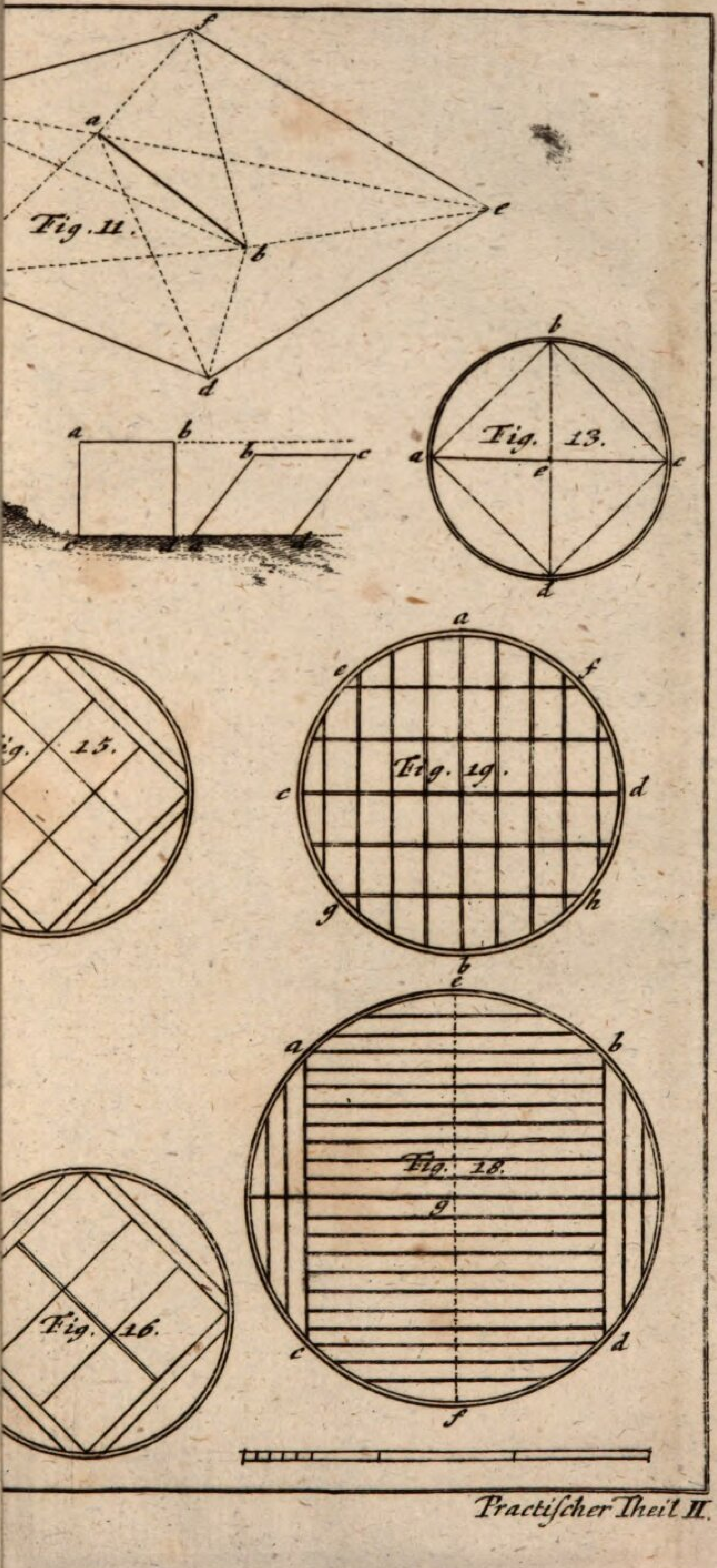

Das Revier FREUDENBERG
nach ſeinem Flächeninhalte berechnet.
Die groſse Horſt
Heilsbrun
Blöſe
Wieſe
DAS FREUDENBERGER REVIER
See
Lache
Das Lobethaliſche Revier
Gottesgabe
50 100 200 300 400 500.



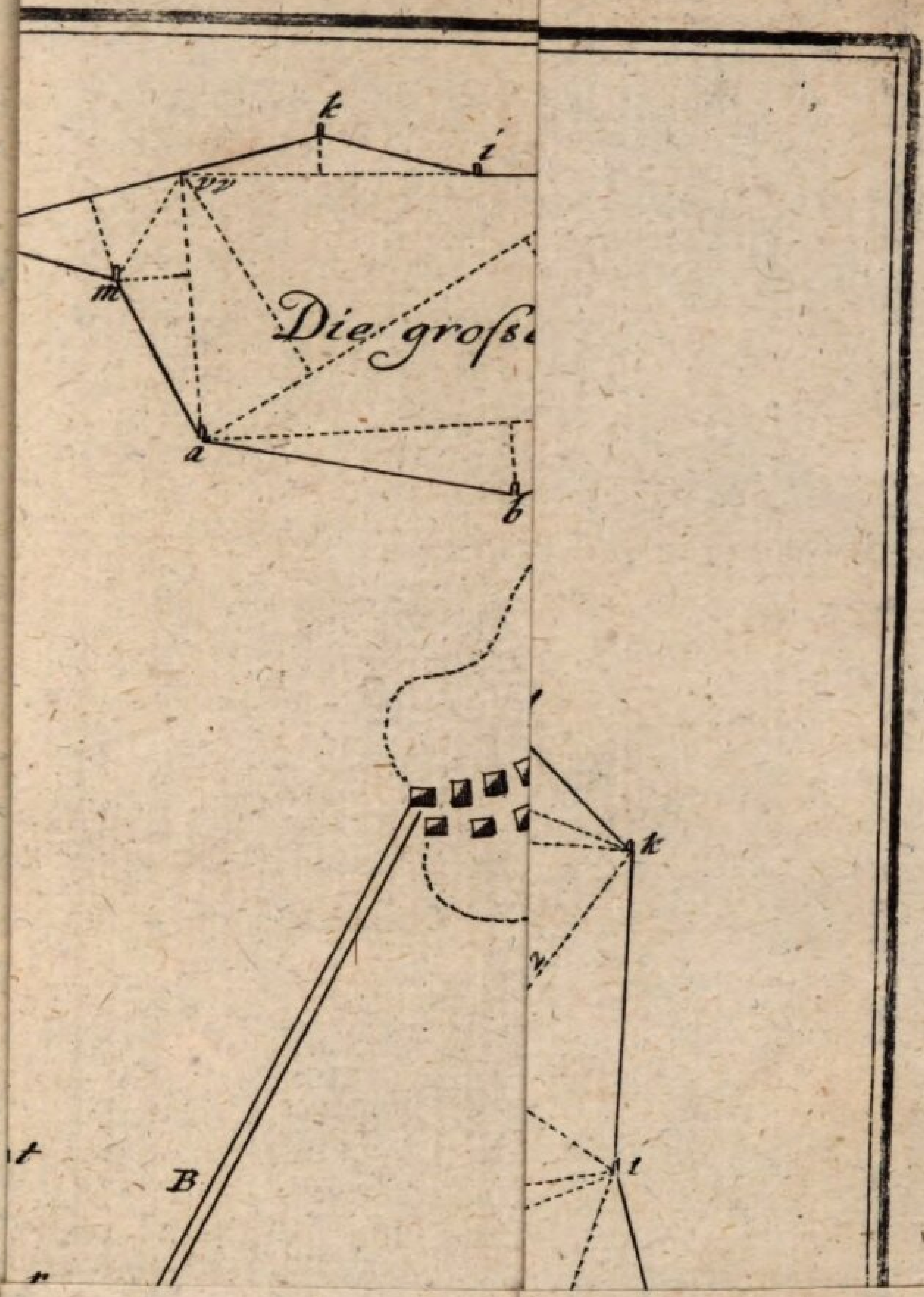
Practiſcher Theil. V.

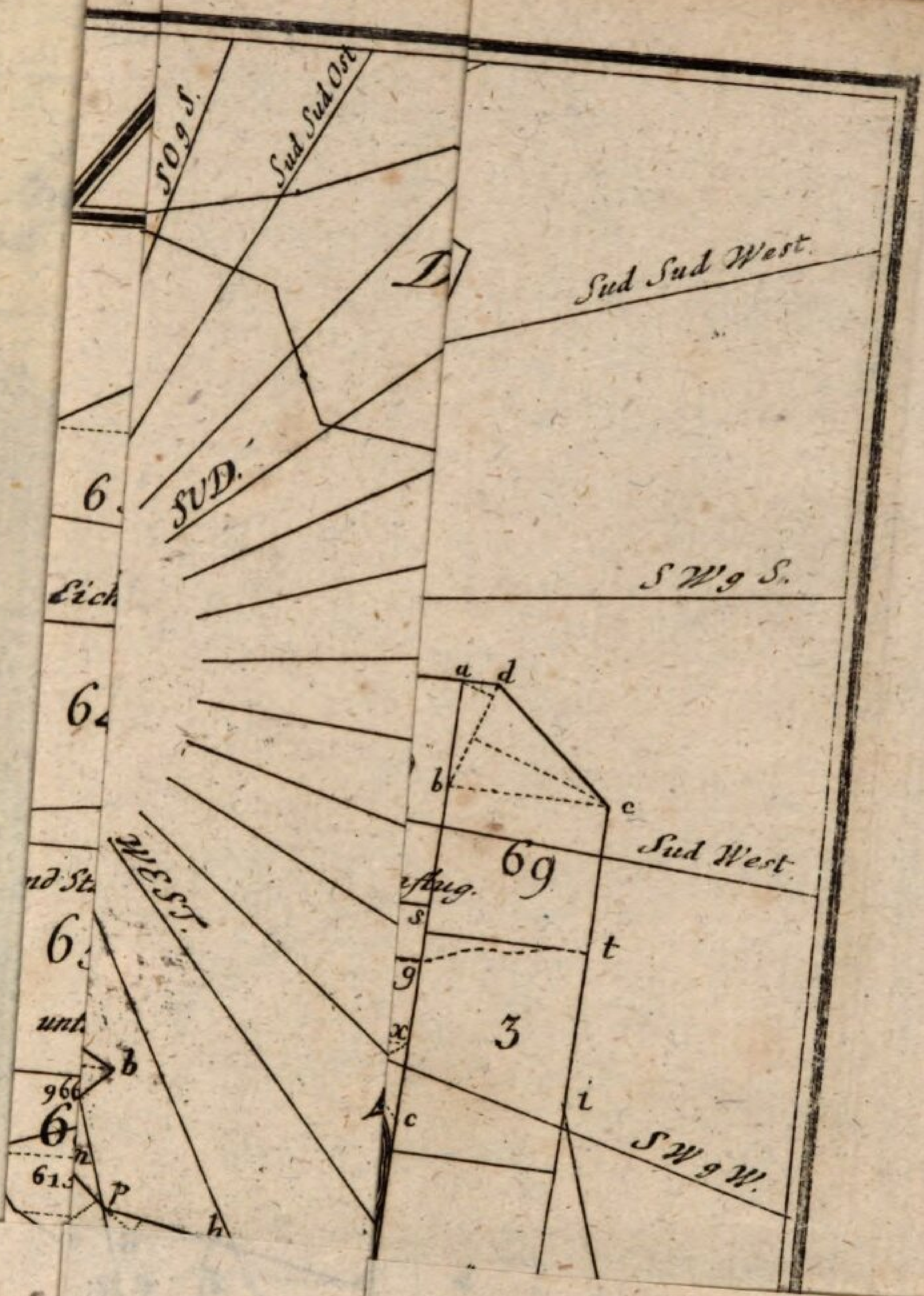

Plan
von der Königl. (Fürstl.) Forst N.N. unter dem Amte N.N.
vermeſsen und eingetheilt
durch N.N.
Graenz Zeichen.
Gr. Linie
streitige Gr.
Hütungs Gr.
Graben oder Straſsen
eingezäunte Schonung oder Plantage.
Gr. Steine. Hügel. Bäume
projectirtes Gestell.
existirendes Gestell.
Scheidungs linie der Blöcke.
Straſse.
Weg.
Holzweg.
Fuſspfad.
Pfähle an den Jagen und Schlägen in der Carte
Zeichen um die Vermischung anzudeuten
Eiche
Buche
Ulme
Esche
Aespe
Erle
Birke
Pappel
Weide
alles Kopfholz.
Birken Wurzelholz
Haselbüsche.
Kihne
Tanne
Fichte
Lerchenbaum
Wachold
Graenze mit der Feldmark C.
Graenze mit der Feldmark A.
Graenze mit der Feldmark B.
Graenze mit der Feldmark D.
Mittagslinie
N. N. Heidegränze
Oberförsterwohnung.
Unterförsterw.
Holzschlägerw.
Wildscheune.
Körnung.
Salzlecke.
Schweinebucht.
Eine andere Art.
Wolfsgarten.
Wolfsgrube.
Saugarten.
Einsprung.
Thiergarten.
Wildzaun.
Viehtränke.
Auswaschplatz.
masſive Wand und Schleuse.
hölzerne Wand und Schleuse.
Packwerk und Floſsschleuse.
Auswasch Stau.
1. Schwem Arche.
2. Schwem Bäume.
3. Ueberfall.
Somerablage.
hohe Ablage.
Zeichen des Bodens.
Damerde
Lehm
Thon
Moorgrund
Sumpf.
Sand
Kies
Stein
Zeichen für die Holzarten.
Plantage.
I. Cl. haubar.
Kihnen
Nachwuchs II. Cl.
Nachwuchs III. Cl.
Nachwuchs.
Schonung.
Elsen und alle nicht genannte Schlaghölzer.
Schonung.
Nachwuchs.
haubar unter Nachw.
haubar.
Birken.
Schonung.
Nachwuchs.
Birken.
haub. unter Nachw.
haubar
Schonung.
Eichen.
Nachwuchs.
haub. unter Nachw.
haubar.
Schonung
Buchen.
Nachwuchs.
haub. unter Nachw.
Buchen haubar.
Unterholz Königlich
Oberholz der Unterthanen.
Oberholz Königlich.
Unterholz der Unterthanen.
Obstbäume
immerwährend Gehäge.
Kihnen Möhre.
Torfbruch.
in Beackerung ausgethaner Forstgrund.
Scheffelplatz.
Probe morgen
g. gut. m. mitteln. s. schlecht
Maasſtab zur reducirten Forst Carte
250 Ruthen auf einem Decimalzolle
50 Ruthen auf einem Decimalzolle
Maasſtab zur groſsen Forst Carte
Rheinl. Ruthen
Liebe sc.

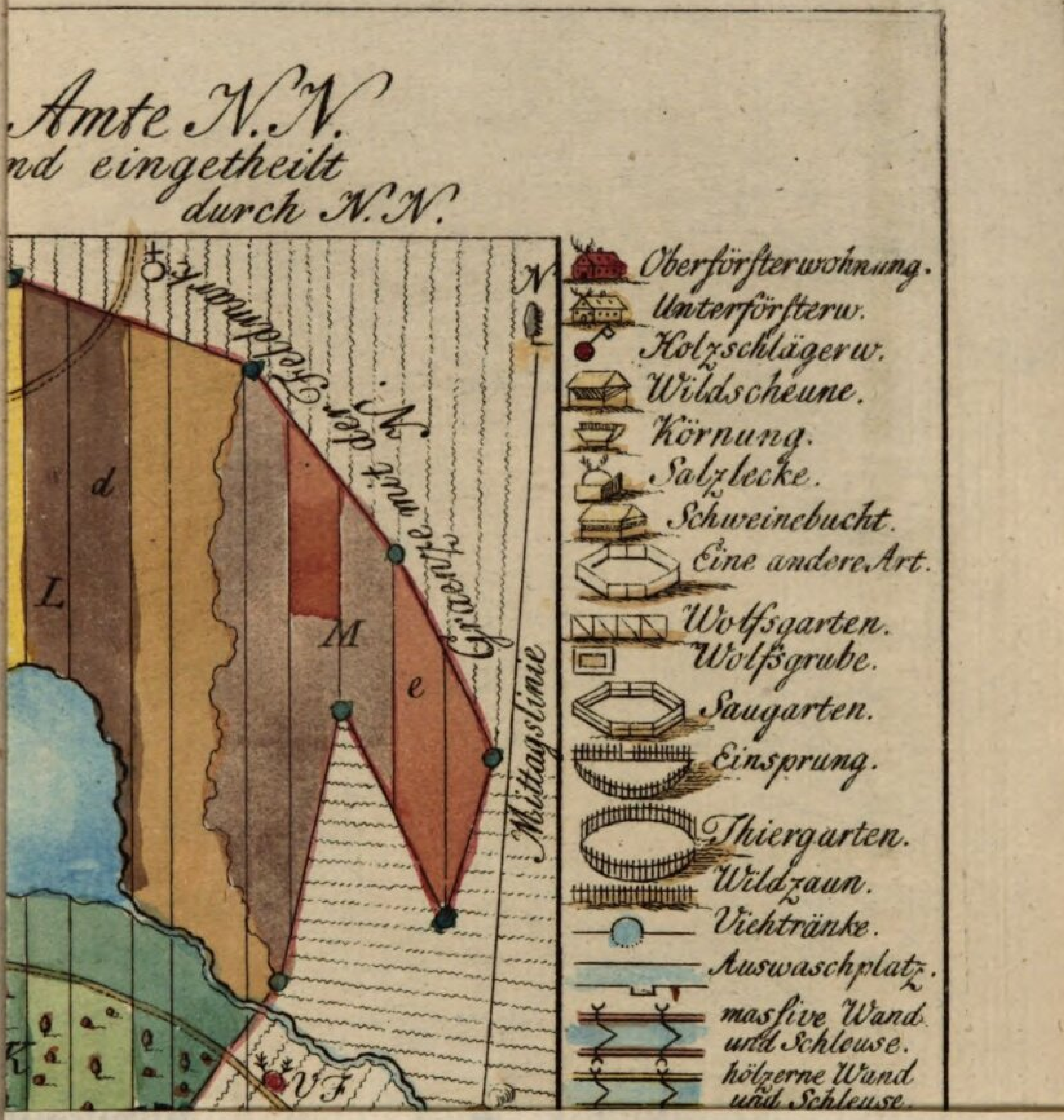

Tab. II.*
Liebe sc.

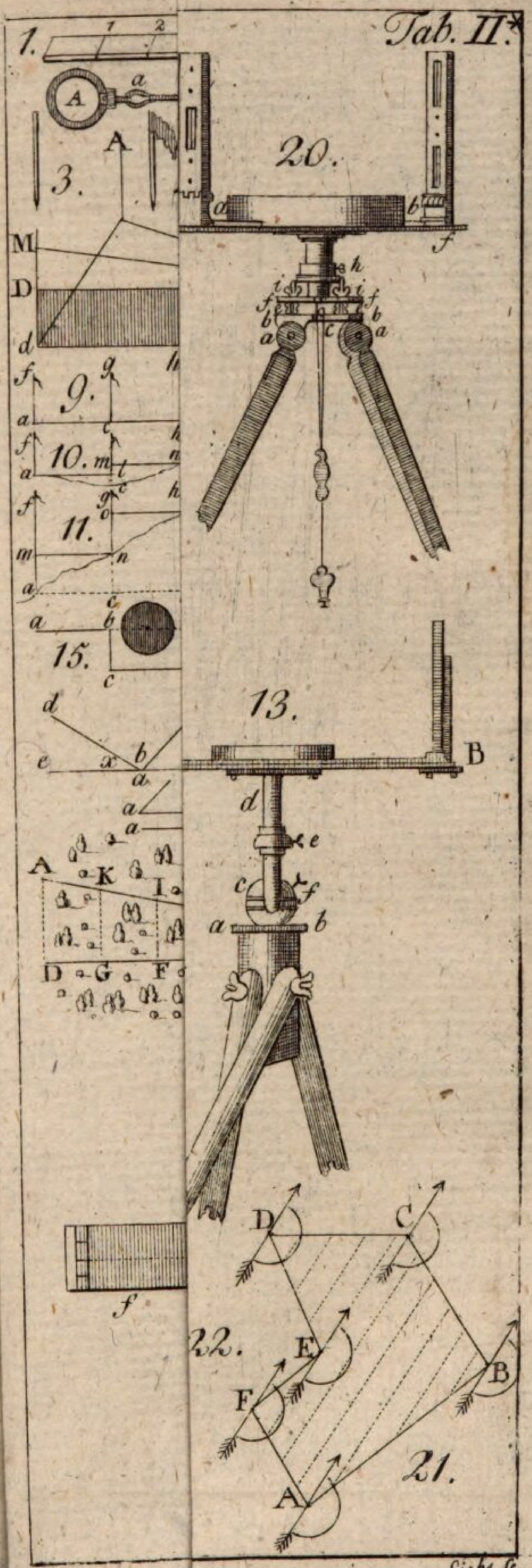


Practiſcher Theil II.


k
i
m
a
b
Die groſs
k
B
t


SOgS.
Sud Sud Ost
Sud Sud West.
SUD.
SWgS.
Sud West
WEST.
SWgW.
69
3


Amte N.N.
nd eingetheilt
durch N.N.
Feldmark
Graenze mit der N.
Mittagslinie
N
d
L
M
e
K
VF
Oberförſterwohnung.
Unterförſterw.
Holzſchlägerw.
Wildſcheune.
Körnung.
Salzlecke.
Schweinebucht.
Eine andere Art.
Wolfsgarten.
Wolfsgrube.
Saugarten.
Einſprung.
Thiergarten.
Wildzaun.
Viehtränke.
Auswaſchplatz.
maſſive Wand
und Schleuſe.
hölzerne Wand
und Schleuſe.



Liebe ſc.

Bayerische
Staatsbibliothek
Munchen

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vierenklee, Johann Ehrenfried, / Meinert, Friedrich, / Kröhne, Johann Wiegand,

Johann Ehrenfried Vierenklee's Anfangsgründe der theoretisch-praktischen Arithmetik und Geometrie für diejenigen, welche sich dem Forstwesen widmen

Leipzig 1797

BHS II K 30
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708118-6
VD18 15243702